

Exercice n°1 (04 pts)

Soit le système d'équations suivant:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 - a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \end{cases}$$

- 01 1. Ecrire le système ci-dessus sous forme matricielle $Ax = b$.
- 01 2. Ecrire le système ci-dessus sous forme matricielle $Ax = b$, si $a_{ij} = 0$ pour $i \geq j$.
- 0,5 a) De quel type de matrice A s'agit-il?
- 1,5 b) Donner l'algorithme général de résolution du système dans ce cas.

Exercice n°2 (10 pts)

Soit le système d'équations algébriques suivant:

$$\begin{cases} x_4 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_4 + 2x_3 = 2 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

- 0,5 1. Ecrire le système d'équations ci-dessus sous forme matricielle $AX=b$.
- 0,5 2. Représenter les deux matrices L et U d'ordre 4×4 sachant que :

$$L_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i < j \end{cases}$$

$$U_{ij} = 0 \quad \text{si } i > j$$

- 0,5 3. De quel type de matrices s'agit-il dans ce cas ?
- 0,5 4. En se servant de la méthode d'élimination de Gauss, calculer les termes des deux matrices L et U qui vérifient l'égalité $L.U=A$.
- 0,5 5. Déduire $\det(A)$.

Exercice n°3 (06 pts)

Pour résoudre une équation aux dérivées partielles (EDP), on peut appliquer la méthode des différences finies.

- 1 1. donner le principe de la méthode des différences finies.
- 1,5 2. quelles sont les étapes de sa mise en œuvre ?
- 1,5 3. quels sont ses avantages et inconvénients ?
- 1 4. donner un schéma différences finies de résolution lié à l'équation $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}$

Compte rendu de l'interrogation n°1

Modèles, Méthodes numériques appliquées et optimisation

M1. Elt. Com. DE 2019/2020

Exo 1

Soit le système d'équations algébrique suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = b_3 \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = b_4 \end{cases}$$

1°) Ecrire le système d'équation sous forme matricielle $A \cdot x = b$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_x = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}}_b$$

2°) Si $a_{ij} = 0$ pour $i > j$, il s'agit d'un système à matrice A triangulaire supérieure.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

3°) Matrice triangulaire supérieure.

5°) L'algorithme général de résolution est

$$x_4 = \frac{b_4}{a_{44}}$$

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j \right] \quad i=3,2,1.$$

Soit le système d'équation suivant:

$$\begin{cases} x_4 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_4 + 2x_3 = 2 \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

1°) Ecrire le système d'équation sous forme matricielle $Ax=b$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2°) Représentation des matrices. Let U venant les conditions

$$L_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i < j \end{cases}$$

$$U_{ij} = 0 \quad \text{si } i > j$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ 0 & U_{22} & U_{23} & U_{24} \\ 0 & 0 & U_{33} & U_{34} \\ 0 & 0 & 0 & U_{44} \end{bmatrix}$$

3°) L : Matrice triangulaire inférieure avec éléments du diagonal égaux à 1

U : Matrice triangulaire supérieure.

4°) Calcul des termes des deux matrices. Let U venant l'égalité $A=L.U$ en se servant de la technique d'élimination de Gauss.

La méthode d'élimination de Gauss consiste à éliminer les termes sous diagonal à partir qu'on obtient d'une matrice triangulaire supérieure. Pour cela, on applique l'algorithme suivant

$$a_{ij}^k = a_{ij}^{k-1} - d_{ik} a_{kj}^{k-1}$$

$$b_i^k = b_i^{k-1} - d_{ik} b_k^{k-1}$$

$$d_{ik} = \frac{a_{ik}^{k-1}}{a_{kk}^{k-1}}$$

$$i, k, j \geq k$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}, b^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

on voit immédiatement que $a_{11} = 0$, ce qui nous oblige à permuter les lignes.
on peut donc avoir par permutation $L_1 \leftrightarrow L_2$.

$$A^0 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, b^0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$k=1$

$$i=2 \rightarrow \alpha_{21} = \frac{a_{21}^0}{a_{11}^0} = \frac{0}{3} = 0 \Rightarrow a_{ij}^1 = a_{ij}^0 \quad j \geq 2, \text{ la ligne 2 reste la même.}$$

$$i=3 \rightarrow \alpha_{31} = \frac{a_{31}^0}{a_{11}^0} = \frac{5}{3}$$

$$a_{31}^1 = 0, a_{32}^1 = a_{32}^0 - \frac{5}{3} \cdot a_{12}^0 = 3 - \frac{5}{3} \cdot 0 = 3.$$

$$a_{33}^1 = a_{33}^0 - \frac{5}{3} \cdot a_{13}^0 = 1 - \frac{5}{3} \cdot 2 = 1 - \frac{10}{3} = -\frac{7}{3}.$$

$$a_{34}^1 = a_{34}^0 - \frac{5}{3} \cdot a_{14}^0 = 1 - \frac{5}{3} \cdot 1 = 1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3}.$$

$$b_3^1 = b_3^0 - \frac{5}{3} \cdot b_1^0 = 0 - \frac{5}{3} \cdot 2 = -\frac{10}{3}.$$

$$i=4 \rightarrow \alpha_{41} = \frac{a_{41}^0}{a_{11}^0} = \frac{5}{3}$$

$$a_{41}^1 = 0, a_{42}^1 = a_{42}^0 - \frac{5}{3} \cdot a_{12}^0 = -1 - \frac{5}{3} \cdot 0 = -1$$

$$a_{43}^1 = a_{43}^0 - \frac{5}{3} \cdot a_{13}^0 = 1 - \frac{5}{3} \cdot 2 = 1 - \frac{10}{3} = -\frac{7}{3}$$

$$a_{44}^1 = a_{44}^0 - \frac{5}{3} \cdot a_{14}^0 = 2 - \frac{5}{3} \cdot 1 = 2 - \frac{5}{3} = \frac{1}{3}$$

$$b_4^1 = b_4^0 - \frac{5}{3} \cdot b_1^0 = 1 - \frac{5}{3} \cdot 2 = -\frac{7}{3}$$

Après cette étape le système d'équation devient

$$A^1 x = b^1 \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -\frac{7}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & -1 & -\frac{7}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -\frac{10}{3} \\ -\frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

Construire une matrice E^0 qui contient les termes d'élimination d'ordre k .

$$E^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -7/3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (0,1)$$

Calculer $A^1 = E^0 \cdot A^0$

Vérification

$$E^0 \cdot A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ -7/3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2/3 & -2/3 \\ 0 & -1 & -7/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Alors, } A^1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2/3 & -2/3 \\ 0 & -1 & -7/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -7/3 & 0 & 1 & 0 \\ -5/3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E^0} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{A^0}$$

$k=2$, on travaille sur la matrice A^1 et on annule les éléments hors diagonaux de la 2^e colonne.

$l=3$

$$d_{32}^2 = d_{32}^1 = \frac{a_{32}^1}{a_{22}^1} = \frac{3}{2}$$

$$a_{32}^2 = 0, \quad a_{33}^2 = a_{33}^1 - \frac{3}{2} a_{23}^1 = -7/3 - 3/2 \left(-\frac{7}{3}\right) = -\frac{7}{3} + \frac{7}{2} = \frac{7}{6}$$

$$a_{34}^2 = a_{34}^1 - \frac{3}{2} a_{24}^1 = -\frac{2}{3} - \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{7}{6}$$

$$b_3^2 = b_3^1 - \frac{3}{2} b_2^1 = -\frac{10}{3} - \frac{3}{2} \cdot 1 = -\frac{29}{6}$$

$l=4$

$$d_{42}^2 = \frac{a_{42}^1}{a_{22}^1} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$a_{42}^2 = 0, \quad a_{43}^2 = a_{43}^1 + \frac{1}{2} a_{23}^1 = -\frac{7}{3} + \frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{11}{6}$$

$$a_{44}^2 = a_{44}^1 + \frac{1}{2} a_{24}^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{5}{6}$$

$$b_4^2 = b_4^1 + \frac{1}{2} b_2^1 = -\frac{7}{3} + \frac{1}{2} \cdot 1 = -\frac{11}{6}$$

Finalement, on a

$$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -13/6 & -13/6 \\ 0 & 0 & -1/6 & 5/6 \end{bmatrix}, \quad b^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -29/6 \\ -11/6 \end{bmatrix}$$

longer

$$E^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vérification

$$E^1 A^1 = A^2$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E^1} \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -13/6 & -2/3 \\ 0 & -1 & -1/6 & 1/3 \end{bmatrix}}_{A^1} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -23/6 & -13/6 \\ 0 & 0 & -1/6 & 5/6 \end{bmatrix}}_{A^2} \quad \checkmark$$

$$k=3$$

$$l=4$$

$$\alpha_{43} = \frac{a_{43}^2}{a_{33}^2} = \frac{-11/6}{-23/6} = \frac{11}{23}$$

$$a_{43}^3 = 0, \quad a_{44}^3 = a_{44}^2 - \frac{11}{23} \cdot a_{34}^2 = \frac{5}{6} - \frac{11}{23} \cdot \left(-\frac{13}{6}\right) = \frac{5}{6} + \frac{11}{23} \cdot \frac{13}{6} = \frac{115 + 11 \cdot 13}{23 \cdot 6}$$

$$a_{44}^3 = \frac{258}{23 \cdot 6} = \frac{258}{138}$$

$$b_4^3 = b_4^2 - \frac{11}{23} \cdot b_3^2 = -\frac{11}{6} - \frac{11}{23} \cdot \left(-\frac{29}{6}\right) = \frac{-253 + 319}{138} = \frac{66}{138} = \frac{33}{69}$$

Ensuite, la matrice A^3 est

$$A^3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -23/6 & -13/6 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{258}{138} \end{bmatrix}, E^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 1 \end{bmatrix}, b^3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -23/6 \\ 33/69 \end{bmatrix}$$

Vérification

$$E^2 \cdot A^2 = A^3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -23/6 & -13/6 \\ 0 & 0 & -1/6 & 5/6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -23/6 & -13/6 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{258}{138} \end{bmatrix}$$

E^2 A^2 A^3

Le système final après élimination de zéro

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -23/6 & -13/6 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{258}{138} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -23/6 \\ 33/69 \end{bmatrix}$$

Nous avons

$$A^3 = E^2 \cdot A^2 = E^2 \cdot E^1 \cdot A^1 = E^2 \cdot E^1 \cdot E^0 \cdot A^0$$

$$\Rightarrow A^0 = (E^2 \cdot E^1 \cdot E^0)^{-1} \cdot A^3$$

$$\text{Posons } A^3 = U, \text{ Alors, } L = (E^2 \cdot E^1 \cdot E^0)^{-1} = (E^0)^{-1} \cdot (E^1)^{-1} \cdot (E^2)^{-1}$$

$$(E^0)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5/3 & 0 & 1 & 0 \\ 7/3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(E^1)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 1 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(E^2)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/23 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(E^0)^{-1} \cdot (E^1)^{-1} \cdot (E^2)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5/3 & 3/2 & 1 & 0 \\ 7/3 & -1/2 & 1/23 & 1 \end{bmatrix} = L. \quad \text{(01)}$$

$$L \cdot U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5/3 & 3/2 & 1 & 0 \\ 7/3 & -1/2 & 1/23 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -23/6 & -13/6 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{258}{138} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

(7)

$$\det(A) = \det(A \cdot U) = \det(L) \cdot \det(U)$$

$$= 1 \cdot \left(3 \times 2 \times \left(-\frac{23}{6} \right) \cdot \left(\frac{258}{138} \right) \right)$$

$$= \frac{-23 \times 258}{138} = \frac{-258}{6} = -43$$

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

01

$$= 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \left\{ 2 \times (2-1) - 1(6+1) + 1(4) \right\} + 2 \left\{ 0 - 2(5) + 1(-20) \right\}$$

$$- 1 \left\{ -2(0) + 1(-20) \right\}$$

$$= 3(2-7+4) + 2(-10-20) - 1(-20)$$

$$= 3(-1) - 60 + 22 = 22 - 3 - 60 = 22 - 63 = -43$$

✓

1°/ La méthode des différences finies est une technique numérique appliquée pour résoudre les équations aux dérivées partielles. Elle est basée sur la transformation de l'EDP en un système d'équations algébriques.

$$\text{EDP} \xrightarrow{\text{MSP}} [A][E] = [B] \quad (01)$$

2°/ Pour mettre en œuvre la méthode, on applique les étapes suivantes:

(01a) 1- Maillage du domaine d'étude. Il s'agit de la génération du maillage par discrétisation du domaine d'étude en sous-domaines appelés mailles et construction de toutes les matrices définissant la géométrie; la numérotation des nœuds et des mailles, ...

2- Selon le type de l'EDP, on élabore le schéma de différences finies associé.

3- Appliquer ce schéma pour tous les nœuds du maillage hors ceux situés sur les frontières où des conditions aux limites sont imposées.

4- Introduire des conditions aux limites.

5- Résolution du système algébrique final.

3°/ Comparativement aux méthodes analytiques, elle peut prendre en charge:

- (01b)
- La non linéarité des milieux
 - La non homogénéité des milieux
 - L'anisotropie des milieux
 - Les géométries complexes.
 - Tous types de conditions aux limites et explicitement de mise en œuvre.

Ces inconvénients résident dans le fait qu'elle présente une mauvaise approximation de la solution dans la maille; l'incapacité de prendre en charge des fissures et les déformations critiques des géométries.

4°/ Le schéma de différences finies explicite basé sur la différence avant est

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} = \frac{f_i^n - f_{i-1}^n}{\Delta x} \quad (2) \quad (9)$$