

EGYETEMI SEGÉDKÖNYVEK

MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SZERKESZTI:
FAZEKAS FERENC
EGYETEMI DOCENS



BELSŐ MUNKATÁRSÁK:

DR. FREY TAMÁS
EGYETEMI DOCENS
KANDIDÁTUS

DR. BAJCSAY PÁL
EGYETEMI ADJUNKTUS
KANDIDÁTUS

DR. KÖRMENDI ISTVÁN
EGYETEMI ADJUNKTUS



SZEMLÉLTETÉS:
GYURCSY ENDRE
OKL. VILLANOSMÉRNÖK



TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST
1962

EGYETEMI SEGÉDKÖNYV

B. VII.

KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

IRTA:

DR. BAJCSAY PÁL

EGYETEMI ADJUNKTUS
KANDIDÁTUS

MÁSODIK KIADÁS



TARTALOMJEGYZÉK

BEVEZETÉS

a) Definíciók, osztályozás	15.
b) Differenciálegyenletek megoldása, a megoldások geometriai értelmezése	17
c) Differenciálegyenletek jelentősége és származtatása	19.
<i>Példák</i>	
<i>Feladatok</i>	

I. ELSŐRENDŰ, AZ ISMERETLEN FÜGGVÉNY DERIVÁLTJÁBAN ELSŐ- FOKÚ KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

1. §. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

a) $y' = f(x)$	32
b) $y' = f(y)$	33
c) $y' = f(x) g(y)$	34
d) $M(x) N(y) dx + P(x) Q(y) dy = 0$	35
<i>Példák</i>	
<i>Feladatok</i>	
a) Gyakorló feladatok	50
b) Geometriai feladatok	52
c) Fizikai feladatok	54
d) Vegyes feladatok	57

2. §. Szétválasztható változójúra visszavezethető differenciálegyenletek

a) $y' = f(ax + by + c)$, ahol $a \neq 0$, $b \neq 0$	59
b) Homogén (fokszámú) differenciálegyenletek: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, ahol $x \neq 0$...	59
c) $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{ax + \beta y + \gamma}\right)$	61
d) Homogén „dimenziójú” differenciálegyenletek	63
<i>Példák</i>	
<i>Feladatok</i>	
a) Gyakorló feladatok	74.
a) $y' = f(ax + by + c)$	74
b) Homogén (fokszámú) differenciálegyenletek: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$	74
c) $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{ax + \beta y + \gamma}\right)$	75
d) Homogén „dimenziójú” differenciálegyenletek	76.
b) Vegyes feladatok	76.

3. §. Elsőrendű lineáris és erre visszavezethető differenciálegyenletek

a) Homogén lineáris differenciálegyenlet: $y' + g(x)y = 0$	77
b) Állandó együtthatójú homogén lineáris differenciálegyenlet: $y' + ay = 0$	77
c) Inhomogén lineáris differenciálegyenlet: $y' + g(x)y = h(x)$, $h(x) \neq 0$	77
d) Állandó együtthatójú inhomogén lineáris differenciálegyenlet speciális külső taggal (megoldás kísérletező feltevéssel)	79
e) Bernoulli-féle differenciálegyenlet: $y' + g(x)y = h(x)y^n$, $n \neq 1$, $h(x) \neq 0$	80
f) Jacobi-féle differenciálegyenlet: $y' = \frac{(Ax + By)y + \alpha x + \beta y}{(Ax + By)x + \alpha x + \beta y}$	81

Példák

Feladatok

a) Gyakorló feladatok	94
a) Lineáris differenciálegyenletek	94
β) Bernoulli-féle differenciálegyenletek	96
γ) Jacobi-féle differenciálegyenletek	96
b) Vegyes feladatok	97

4. §. Riccati-féle differenciálegyenlet

a) Speciális Riccati-féle differenciálegyenletek: $y' + ay^2 = b x^x$	98
b) Az általános Riccati-féle differenciálegyenlet: $y' = f(x)y^2 + g(x)y + h(x)$	102

Példák

Feladatok

5. §. Egzakt differenciálegyenletek. Integráló tényező (Euler-féle multiplikátor)

a) Egzakt differenciálegyenlet	116
b) Integráló tényező (Euler-féle multiplikátor)	118

Példák

Feladatok

a) Gyakorló feladatok	138
a) Egzakt differenciálegyenletek	138
β) Integráló tényező (Euler-féle multiplikátor)	139
b) Fizikai feladatok	140

6. §. Általános megoldási módszerek az ismeretlen függvény deriváltjára nézve explicit alakban megadott differenciálegyenleteknél

a) Iránymező. Izoklinák	141
b) Sorozatos közelítés (szukcesszív approximáció, Picard—Lindelöf)	144
c) Közelítő megoldás hatványsor alakjában	145

Példák

Feladatok

a) Az iránymező és az izoklinák megrajzolása	152
b) Közelítő megoldás sorozatos közelítéssel, illetve hatványsor alakjában ...	152

7. §. Szinguláris pontok

Példák

Feladatok

II. ELSŐRENDŰ, AZ ISMERETLEN FÜGGVÉNY DERIVÁLTJÁBAN IMPLICIT DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

1. §. Speciális alakú elsőrendű implicit differenciálegyenletek

a) Elsőrendű n -ed fokú differenciálegyenletek	167
b) A differenciálegyenletből y hiányzik: $F(x, y') = 0$	168
c) A differenciálegyenletből x hiányzik: $F(y, y') = 0$	168
d) Paraméter bevezetésének módszere, megoldás differenciálás útján	169
e) Lagrange- (d'Alembert-) féle differenciálegyenlet: $y = \varphi(y')x + \psi(y')$	171
f) Clairaut-féle differenciálegyenlet: $y = xy' + \varphi(y')$	172

Példák

Feladatok

a) Gyakorló feladatok	179
b) Geometriai feladatok	180

2. §. Szinguláris megoldások. Burkoló görbék

a) Explicit differenciálegyenlet szinguláris megoldásai	180
b) Implicit differenciálegyenlet szinguláris megoldásai	181
c) Burkoló görbék	181

Példák

Feladatok

3. §. Trajektóriák

a) Görbesereg izogonális trajektóriái	184
a) Derékszögű koordináták esete	185
b) Polárkoordináták esete	185
b) Geometriai és fizikai alkalmazások	186
a) Evolvensek	186
b) Paralelgörbék	188
c) Felület esésvonalai	188
d) Erővonalak, áramvonalak	189
e) Hőtani alkalmazás	189

Példák

Feladatok

a) Gyakorló feladatok	197
b) Geometriai és fizikai feladatok	198

III. SPECIÁLIS TÍPUSÚ MÁSODRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

1. §. Hiányos másodrendű differenciálegyenletek

a) $y'' = f(x)$	201
b) A differenciálegyenletből y hiányzik: $F(x, y', y'') = 0$	201
c) A differenciálegyenletből x hiányzik: $F(y, y', y'') = 0$	202

Példák

Feladatok

a) Gyakorló feladatok	217
b) Geometriai és fizikai feladatok	218

2. §. Hiányosra visszavezethető másodrendű differenciálegyenletek

a) Másodrendű lineáris differenciálegyenletek	219
b) Másodrendű homogén „dimenziójú” differenciálegyenletek	220

*Példák**Feladatok*

a) Lineáris differenciálegyenletek	222
b) Homogén „dimenziójú” differenciálegyenletek	223

IV. ALLANDÓ EGYÜTTHATÓJÚ ÉS ILYENRE VISSZAVEZETHETŐ LINEÁRIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

a) Inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása	224
b) Állandó együtthatójú homogén lineáris differenciálegyenlet	225
c) Állandó együtthatójú inhomogén lineáris differenciálegyenlet megoldása kísérletező feltevessel	225
d) Euler-féle lineáris differenciálegyenlet	226

*Példák**Feladatok*

a) Gyakorló feladatok	241
b) Fizikai feladatok	242

MEGOLDÁSOK

BEVEZETÉS

c) Differenciálegyenletek jelentősége és származtatása	244
--	-----

I. ELSŐRENDŰ, AZ ISMERETLEN FÜGGVÉNY DERIVÁLTJÁBAN ELSŐFOKÚ KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

1. §. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

a) Gyakorló feladatok	248
b) Geometria feladatok	252
c) Fizikai feladatok	253
d) Vegyes feladatok	254

2. §. Szétválasztható változójúra visszavezethető differenciálegyenletek

a) Gyakorló feladatok	254
α) $y' = f(ax + by + c)$	254
β) Homogén (fokszámú) differenciálegyenletek: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$	255
γ) $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{ax + \beta y + \gamma}\right)$	256
δ) Homogén „dimenziójú” differenciálegyenletek	257
b) Vegyes feladatok	258

3. §. Elsőrendű lineáris és erre visszavezethető differenciálegyenletek

a) Gyakorló feladatok	259
α) Lineáris differenciálegyenletek	259
β) Bernoulli-féle differenciálegyenletek	261
γ) Jacobi-féle differenciálegyenletek	262
b) Vegyes feladatok	262

4. §. Riccati-féle differenciálegyenlet	
5. §. Egzakt differenciálegyenletek. Integráló tényező (Euler-féle multiplikátor)	
a) Gyakorló feladatok	265
a) Egzakt differenciálegyenletek	265
β) Integráló tényező (Euler-féle multiplikátor)	267
b) Fizikai feladatok	268
6. §. Általános megoldási módszerek az ismeretlen függvény deriváltjára nézve explicit alakban megadott differenciálegyenleteknél	
a) Az iránymező és az izoklínák megrajzolása	269
b) Közelítő megoldás sorozatos közelítéssel, illetve hatványsor alakjában ...	269
7. §. Szinguláris pontok	
II. ELSŐRENDŰ, AZ ISMERETLEN FÜGGVÉNY DERIVÁLTJÁBAN IMPLICIT DIFFERENCIÁLEGYENLETEK	
1. §. Speciális alakú elsőrendű implicit differenciálegyenletek	
a) Gyakorló feladatok	274
b) Geometriai feladatok	276
2. §. Szinguláris megoldások. Burkolo görbék	
3. §. Trajektoriák	
a) Gyakorló feladatok	276
b) Geometriai és fizikai feladatok	279
III. SPECIÁLIS TÍPUSÚ MÁSODRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK	
1. §. Hiányos másodrendű differenciálegyenletek	
a) Gyakorló feladatok	285
b) Geometriai és fizikai feladatok	286
2. §. Hiányosra visszavezethető másodrendű differenciálegyenletek	
a) Lineáris differenciálegyenletek	287
b) Homogén „dimenziójú” differenciálegyenletek	287
IV. ÁLLANDÓ EGYÜTTTHATÓJÚ ÉS ILYENRE VISSZAVEZETHETŐ LINEÁRIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK	
a) Gyakorló feladatok	288
b) Fizikai feladatok	290
Irodalomjegyzék	291

BEVEZETÉS

a) Definíció, osztályozás

Egy olyan egyenletet, melyben állandókon kívül egy (vagy több) független változó, ennek (vagy ezeknek) valamilyen ismeretlen függvénye (vagy függvényei) és ennek a függvénynek (vagy függvényeknek) a független változó (vagy változók) szerinti közönséges (vagy parciális) deriváltja vagy deriváltjai szerepelnek, *differenciálegyenletnek* nevezzük.

Ha a differenciálegyenletben szereplő ismeretlen függvény egyváltozós [$y = y(x)$], s így ennek a független változó szerinti, ún. közönséges deriváltjai $(y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n})$ lépnek fel, akkor a differenciálegyenletet *közönséges differenciálegyenletnek* nevezzük.

Például:

$$1. \quad y' - \frac{2}{x} y + x^2 \cdot a \sin x = 0;$$

$$2. \quad \alpha y'' + \beta y' + \gamma y = f(x);$$

$$3. \quad y'^2 - (1 + y'^2)^3 = 0;$$

$$4. \quad l \frac{d^2y}{dx^2} + g \sin y = 0;$$

$$5. \quad x^2 y'' + x y' + (x^2 - p^2) y = 0;$$

$$6. \quad \text{általános (implicit) alakban:}$$

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0;$$

$$7. \quad \text{általános, a legmagasabb rendű deriváltra kifejtett (explicit) alakban:}$$

$$y^{(n)} = G(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}).$$

Ha a differenciálegyenletben szereplő ismeretlen függvény két- vagy többváltozós (pl. $y = y(x_1, x_2, \dots, x_k)$), s így ennek a független változók szerinti parciális deriváltjai

$$\left(y_{x_1}' = \frac{\partial y}{\partial x_1}, y_{x_2}' = \frac{\partial y}{\partial x_2}, \dots, y_{x_k}' = \frac{\partial y}{\partial x_k}, y_{x_1 x_1}'' = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}, y_{x_1 x_2}'' = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1}, \dots \right)$$

lépnek fel, akkor a differenciálegyenletet *parciális differenciálegyenletnek* nevezzük

Például:

$$8. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x;$$

$$9. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0;$$

$$10. \quad A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = f(x, y);$$

$$11. \quad F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0;$$

12. Általános alakban:

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_k, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial^n y}{\partial x_k^n}\right) = 0.$$

Ha az ismeretlen függvények (akár egy-, akár többváltozósak) száma egynél több, akkor — az ismeretlen függvények meghatározhatósága feltételének megfelelően — az ismeretlen függvények számával egyenlő számú differenciálegyenletből álló, ún. (közönséges vagy parciális — aszerint, hogy az ismeretlen függvények egy- vagy többváltozósak —) *differenciálegyenlet-rendszerrel* van dolgunk.

Például:

$$13. \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} = y_1. \end{cases}$$

$$14. \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = 2y_1 - 2y_2 + y_3, \\ \frac{dy_2}{dx} = y_1 + 5y_2 - y_3, \\ \frac{dy_3}{dx} = 2y_1 + 4y_2 + y_3. \end{cases}$$

Megjegyzés. A következőkben csak közönséges differenciálegyenletekkel foglalkozunk, mégpedig kizárólag valós függvényekre szorítkozva.

Mind a közönséges, mind a parciális differenciálegyenleteknél és differenciálegyenlet-rendszereknél alapvető osztályozási szempont a differenciálegyenletben (illetve differenciálegyenlet-rendszerben) fellépő *deriváltak rendszáma*. A differenciálegyenlet rendszámát a benne szereplő legmagasabb rendű derivált határozza meg. Ennek megfelelően beszélünk elsőrendű, másodrendű, ..., n -ed rendű közönséges (vagy parciális) differenciálegyenletről (vagy differenciálegyenlet-rendszerről). Így az előbb felhozott példák közül az 1. és 3. elsőrendű közönséges differenciálegyenlet, a 13. és 14. elsőrendű közönséges differenciálegyenlet-rendszer, a 2., 4. és 5. másodrendű közönséges differenciálegyenlet, a 6. és 7. n -ed rendű közönséges differenciálegyenlet, a 11. elsőrendű parciális differenciálegyenlet, a 8., 9. és 10. másodrendű parciális differenciálegyenlet, a 12. n -ed rendű parciális differenciálegyenlet.

Egy másik — szintén lényeges — szempont szerint a differenciálegyenlet (vagy differenciálegyenlet-rendszer) *lineáris* (elsőfokú) vagy *nem lineáris*. Ha a differenciálegyenlet (vagy differenciálegyenlet-rendszer) olyan, hogy — esetleg megengedett átrendezés után — az ismeretlen függvény (vagy függvények) és ennek (vagy ezeknek) deriváltjai csak első hatványon szerepelnek benne, és ezek szorzatai nem lépnek fel, akkor a differenciálegyenlet (vagy differenciálegyenlet-rendszer) *lineáris* — ellenkező esetben *nem lineáris*. Így a fenti példák közül az 1., 2., 5., 8., 9., 10., 13. és 14. lineáris, a 3. és 4. nem lineáris, a 6., 7., 11. és 12. lehet lineáris is és nem lineáris is, F -től, illetve G -től függően.

b) Differenciálegyenletek megoldása, a megoldások geometriai értelmezése

Egy differenciálegyenletet megoldani annyit jelent, mint meghatározni mindazokat a függvényeket, melyek deriváltakkal együtt az adott differenciálegyenletet azonosan kielégítik. Ezek a függvények a *differenciálegyenlet megoldásai*. A differenciálegyenletek elméletének alapfeladata adott differenciálegyenlet összes megoldásainak keresése és ezen megoldások sajátosságainak vizsgálata. Mivel a differenciálegyenletek megoldását általában integrálokra vezetjük vissza, a megoldást szokás a *differenciálegyenlet integráljának* nevezni, magát a differenciálegyenlet megoldásainak megkeresését a *differenciálegyenlet integrálásának*.

A differenciálegyenletek megoldásai között megkülönböztetünk *általános* megoldást és *partikuláris* megoldásokat, más szempont szerint *reguláris* (vagy közönséges) és *szinguláris* megoldásokat.

Az n -ed rendű közönséges differenciálegyenlet *általános megoldása* az a differenciálegyenletet azonosan kielégítő függvény, mely pontosan n tetszőleges, egymástól független állandót (paramétert) tartalmaz. Pl. az

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

differenciálegyenlet általános megoldása

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$$

alakú.

Az n -ed rendű közönséges differenciálegyenlet *partikuláris megoldásai* olyan, a differenciálegyenletet azonosan kielégítő függvények, melyek legfeljebb $n - 1$ tetszőleges, egymástól független állandót (paramétert) tartalmaznak. Speciális esetben a partikuláris megoldások egyetlen paramétert sem tartalmaznak. Általában az általános megoldás tartalmazza a differenciálegyenlet összes partikuláris megoldásait. Ez esetben,

ha az általános megoldásban szereplő C_1, C_2, \dots, C_n állandóknak meghatározott értékeket adunk, kapjuk a differenciálegyenlet partikuláris megoldásait.

A differenciálegyenlet valamely partikuláris megoldásának kiválasztásához szükséges bizonyos *kezdeti feltételeket* (pl. közösleges differenciálegyenletnél: adott független változó értékhez tartozó függvényértéket és n -ed rendű differenciálegyenletnél még az $(n-1)$ -edik deriváltig bezárólag a deriváltakat) vagy — elsőnél magasabb rendű differenciálegyenletnél — *kerületi (határ-) feltételeket* (pl. másodrendű közösleges differenciálegyenletnél két független változó értékhez tartozó függvényértéket, kerületi pontot) megadni. Az ezek alapján meghatározott partikuláris megoldásnál azt mondjuk, hogy az az adott kezdeti, illetve kerületi feltételeket kielégítő partikuláris megoldás.

Az elsőrendű

$$F(x, y, y') = 0$$

közösleges differenciálegyenlet

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

általános megoldása az (x, y) síkban egy *egyparaméteres görbesereget* határoz meg. A másodrendű

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

közösleges differenciálegyenlet

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0$$

általános megoldása egy *kétparaméteres görbesereget* határoz meg. Általában, az

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

n -ed rendű közösleges differenciálegyenlet

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$$

általános megoldása egy *n -paraméteres görbesereget* határoz meg.

Egy elsőrendű közösleges differenciálegyenletnél egy kezdeti feltétel megadása geometriailag egy $P_0 [x_0, y(x_0)]$ pont megadását jelenti, és az ezt a kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldás meghatározása annak a görbének kiválasztását jelenti a differenciálegyenlet megoldásait ábrázoló görbeseregeből, amelyik az adott P_0 ponton keresztül megy.

Egy másodrendű közösleges differenciálegyenletnél az $y(x_0), y'(x_0)$ kezdeti feltételek megadása geometriailag egy $P_0 [x_0, y(x_0)]$ pont és egy irány (pontosabban iránytangens: $\operatorname{tg} \alpha_0 = y'(x_0)$) megadását jelenti, és az ezeket a kezdeti feltételeket kielégítő partikuláris megoldás meghatározása annak a görbének kiválasztását jelenti a differenciálegyenlet megoldásait ábrázoló görbeseregeből, amelyik az adott P_0 ponton keresztül megy, és e pontban az érintőjének az iránytangense az adott.

Ha az

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

n -ed rendű közösleges differenciálegyenlet jobb oldalán álló függvény összes argumentumainak egy D zárt tartományhoz tartozó bármely $x_0, y(x_0), y'(x_0), y''(x_0), \dots, y^{(n-1)}(x_0)$ értékrendszeréhez egy és csakis egy olyan $y = y(x)$ függvény tartozik, mely a differenciálegyenletet azonosan és a megadott kezdeti feltételeket is kielégíti (*unicitás feltétele*), akkor ez az $y = y(x)$ függvény a differenciálegyenlet *reguláris* (vagy közös-

ges) megoldása. A differenciálegyenlet reguláris megoldásának minden pontjában a jobboldali f függvénynek folytonosnak és korlátosnak kell lennie és ezenkívül összes argumentumaira vonatkozólag ki kell elégítenie az alábbi, ún. Lipschitz-feltételt:

$$\begin{aligned} & |f(x, \bar{y}, \bar{y}', \bar{y}'', \dots, \bar{y}^{(n-1)}) - f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})| \leq \\ & \leq M \{ |\bar{y} - y| + |\bar{y}' - y'| + |\bar{y}'' - y''| + \dots + |\bar{y}^{(n-1)} - y^{(n-1)}| \}, \end{aligned}$$

ahol M egy pozitív állandó.

Az

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$$

differenciálegyenlet jobb oldalára pl. biztosan teljesül a Lipschitz-feltétel, ha az argumentumainak D zárt tartományában léteznek és folytonosak f -nek az $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ szerinti elsőrendű parciális deriváltjai.

Egy differenciálegyenlet olyan megoldását, mely egyik pontjában sem tesz eleget az unicitás feltételének, szinguláris megoldásnak nevezzük. Ennek értelmében egy szinguláris megoldás bármely (x, y) pontjának tetszőleges környezetében legalább két olyan integrálgörbe létezik, mely e ponthoz tartozó, megadott kezdeti feltételeket kielégíti. Így, ha a differenciálegyenlet jobb oldalán álló f függvény folytonos, akkor szinguláris megoldások csak azon pontokon haladhatnak keresztül, amelyekben a Lipschitz-feltétel nem teljesül.

Megjegyzés. A differenciálegyenletekkel kapcsolatban általában nem a megoldásnak az elemi függvények segítségével felépített, „zárt” alakban való előállítása iránt érdeklődünk. Hiszen ez a feladat igen sokszor megoldhatatlan, s ha esetleg meg is oldható, de bonyolult eredményre vezet, teljesen érdektelen. Elméleti és gyakorlati szempontból egyaránt jóval fontosabb a megoldás egzisztenciájáról meggyőződést szerezni, a megoldásnak különböző sajátságaira, menetére felvilágosítást nyerni, s ha zárt alakban való előállítása reménytelennek látszana, a megoldásra jó és gyakorlati szempontból kielégítő közelítéseket adni.

c) Differenciál-
egyenletek
jelentősége és
származtatása

α) A legegyszerűbb fizikai, illetőleg műszaki folyamatoknál az ott szereplő mennyiségek egymással arányosan, helyesebben lineárisan változnak.

Pl. Egyenletes, egyenesvonalú mozgásnál:

$$s = vt, \quad v = \frac{s}{t}$$

(s = út, t = időtartam, v = sebesség).

Egyenletes forgómozgásnál:

$$\varphi = \omega t, \quad \omega = \frac{\varphi}{t}$$

(φ = elfordulás szöge, t = időtartam, ω = szögsebesség).

Prizmatikus rúd tiszta húzásánál:

$$\lambda = \varepsilon l, \quad \varepsilon = \frac{\lambda}{l}$$

(λ = megnyúlás, l = kezdeti hossz, ε = fajlagos nyúlás).

Állandó nyomásnál kiterjedő gáz maximális munkája:
(L = munka, p = nyomás, V = térfogatnövekedés).

$$L = p V$$

Egyenáram melegfejlesztése:

$$A = i^2 R t$$

(A = fejlődött hőenergia, i = áramerősség, R = ellenállás, t = időtartam).

Az ilyen jelenségekkel és folyamatokkal kapcsolatos számításoknál csupán egyszerű algebrai műveletek szerepelnek. Ha viszont a vizsgált folyamatban szereplő mennyiségek változásai nem arányosak, helyesebben, ha a köztük levő összefüggés nem lineáris, akkor a fenti egyenletekben szereplő arányossági tényező szerepét a lokális (vagy a momentán) változási arány veszi át, melynek a differenciálhányados a matematikai kifejezője. Abban az esetben tehát, ha a például felhozott fenti jelenségek, illetőleg folyamatok nem egyenletesen mennek végbe, akkor a bennük szereplő mennyiségek változásai közti kapcsolatnak a matematika nyelvén való leírása csupán differenciálok, illetőleg differenciálhányados felhasználásával lehetséges.

Pl.: Változó mozgásnál:

$$ds = v dt, \quad v = \frac{ds}{dt}.$$

Változó forgásnál:

$$d\varphi = \omega dt, \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Heterogén alakváltozásnál:

$$d\xi = \varepsilon dx, \quad \varepsilon = \frac{d\xi}{dx}.$$

Változó nyomásnál táguló gáz maximális munkája:

$$dL = p dV.$$

Változó áram melegfejlesztése:

$$dA = i^2 R dt.$$

Mint ahogy pedig a fizikai, illetőleg műszaki folyamatoknál szereplő mennyiségek közt — az esetek túlnyomó többségében — nem lineáris kapcsolat áll fenn, azért a folyamat kialakulásának matematikai törvényszerűségét az ott szereplő mennyiségek differenciáljai, illetőleg differenciálhányadosai közt fennálló összefüggések, differenciálegyenletek fogják kifejezni.

Számos, az alkalmazásokból vett példa mutatja, hogy egy jelenség vagy folyamat vizsgálatánál a kiindulásul szolgáló differenciálegyenlet jóval egyszerűbb szerkezetű, mint a megoldásul kapott egyenletek. Ennek oka az, hogy időben és térben „közvetlenül szomszédos” állapotok közti kapcsolatokra — más szóval infinitezimális kicsinységű változásokra — egyszerűbb törvények érvényesek, mint a jelenség teljes lefolyására. Épp ezért az általános természeti törvények igen nagy része differenciálegyenletekben jut kifejezésre.

β) Differenciálegyenletek igen gyakran szerepelnek a mechanikában, elméleti fizikában, műszaki tudományokban, de a legszemléletesebb példák, amelyek bevezetésként megemlíthetők, a geometriából vehetők.

Legyen

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

egy egyparaméteres görbesereg egyenlete. Ha ezt x szerint differenciáljuk, nyerjük:

$$\Phi'_x + \Phi'_y y' = 0.$$

E két egyenletből C -t kiküszöbölve — bizonyos feltételek teljesülése esetén —, nyerjük a következő elsőrendű differenciálegyenletet:

$$F(x, y, y') = 0.$$

Ez a differenciálegyenlet — melynek $\Phi(x, y, C) = 0$ az általános megoldása — az adott görbesereg különböző görbéire jellemző bizonyos közös sajátságokat tükröz vissza, ezért az adott görbesereg differenciálegyenletének nevezzük.

Általánosságban, ha az n -paraméteres görbesereg

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$$

egyenletét x szerint n -szer differenciáljuk és a görbesereg egyenletéből, valamint a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y' = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y'' = 0,$$

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y} y' + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y''' = 0,$$

.....

$$\frac{\partial^n \Phi}{\partial x^n} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial y} y^{(n)} = 0$$

összesen $n + 1$ egyenletből álló rendszerből a C_1, C_2, \dots, C_n paramétereket kiküszöböljük — bizonyos feltételek teljesülése esetén — nyerjük az adott görbesereg

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

differenciálegyenletét.

Példák

1. Egy tárcsa (kör) kerületén megfeszülő szíj (szalag) azzal az \widehat{AB} ív mentén érintkezik. Mekkora lesz a feszes és laza ág menti feszültségek viszonya, ha a szíj és a tárcsa közti súrlódásra a Coulomb-féle törvényt tekintjük érvényesnek?

Noha csupán a feszes és laza ág menti feszültségek viszonyát kérdezzük, feleletet csak akkor tudunk adni, ha a szíjfeszültségnek az \widehat{AB} ív mentén bekövetkező változását meghatározzuk (1. ábra). Az \widehat{AB} ív valamely pontjában a T feszültség egyelőre ismeretlen $T(\varphi)$ függvénye egy alkalmasan választott független változónak, pl. az \widehat{AB} ív egy pontját meghatározó φ középponti szögnek. Ezt akarjuk meghatározni. Evégből a szíjat most a φ szög által meghatározott A' helyen képzeljük elvágva és az egyensúly fenntartása végett az egyelőre ismeretlen T érintőirányú megfeszülést alkalmazunk. Azután még egyszer elvágjuk a szíjat a $d\varphi$ szöggel távolabbra fekvő B' helyen és ismét egy érintőleges irányú megfeszülést alkalmazunk, amelynek nagysága azonban már nem T , hanem $T + dT$, mert hiszen a szíj megfeszülése T_0 -tól T_1 -ig folytonosan növekszik.

Az $\widehat{A'B'}$ ívelemen fekvő elemi szíjrészre mármost a következő erők hatnak:

A két megfeszülés a szíjelemet a tárcsának szorítja neki, és ha a tárcsa nem forogna, az odaszorító erő éppen megegyeznék e két erő eredőjével, dR -rel, amelyet a vektorháromszög felrajzolása által azonnal meghatározhatunk:

$$dR = 2 T \sin \frac{d\varphi}{2} \approx T d\varphi.$$

A tárcsa forgása következtében a szíj tehetetlenségéből eredő centrifugális erő dR erővel ellentétes, és csökkenti azt a nyomást, amivel a megfeszülések a szíjat a tárcsához szorítják. A centrifugális erő, ha b a szíj szélessége, δ a vastagsága, γ a térfogategység súlya és v a kerületi sebesség:

$$dC = \frac{\gamma}{g} b \delta r d\varphi \frac{v^2}{r} = \frac{\gamma}{g} b \delta v^2 d\varphi,$$

vagyis ha

$$C = \frac{\gamma}{g} b \delta v^2,$$

egyszerűen

$$dC = C d\varphi.$$

A szíjelem és a tárcsa közötti sugárirányú nyomás eszerint

$$dR - dC = (T - C) d\varphi.$$

Az ezáltal ébresztett sűrlődés $\mu (T - C) d\varphi$, amely szükségképpen megegyezik a szíjelem két végét megtámadó megfeszítés különbségével, azaz dT -vel, amiből ezt a differenciálegyenletet kapjuk:

$$dT = \mu (T - C) d\varphi$$

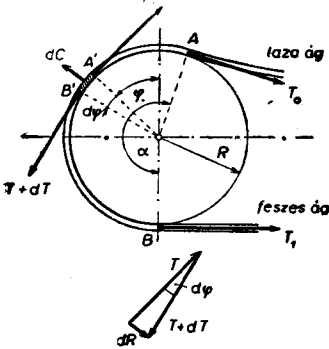
vagy

$$\frac{dT}{d\varphi} = \mu (T - C).$$

Az erők egyensúlyi feltételének megállapításánál a következő hibákat (elhanyagolásokat) követtük el: A dT feszültségdifferenciál normálisirányú komponensét figyelmen kívül hagytuk, továbbá a tárcsa $\widehat{A'B'}$ ívére ható normálisirányú nyomóerő $2 T \sin \frac{d\varphi}{2}$ értékét $T d\varphi$ -vel helyettesítettük. Ezek a differenciálokkal való számolásnál történt elhanyagolások azért jogosak, mert a differenciálok közti egyenletből mindenkor integrálással jutunk véges egyenletekhez, az integrálásnál történő határátmenetnél pedig az elhanyagolásokból eredő hibák elenyésznek (0-sá válnak).

A fenti megfontolásokból nyert differenciálegyenlet minden különleges előismeret nélkül integrálható. Ugyanis

$$\frac{dT(\varphi)}{T(\varphi) - C} = \mu d\varphi,$$



1. ábra

s mindkét oldalon $\varphi = 0$ -tól $\varphi = \alpha$ -ig integrálva:

$$[\ln |T(\varphi) - C|]_{\varphi=0}^{\alpha} = \mu [\varphi]_{\varphi=0}^{\alpha},$$

azaz

$$\ln |T(\alpha) - C| - \ln |T(0) - C| = \mu \alpha,$$

$$\ln \left| \frac{T(\alpha) - C}{T(0) - C} \right| = \ln \left| \frac{T_1 - C}{T_0 - C} \right| = \mu \alpha$$

vagy

$$\frac{T_1 - C}{T_0 - C} = e^{\mu \alpha}$$

adódik.

Az $e^{\mu \alpha} = \varepsilon$ hányadost feszültségi viszonyoknak nevezhetjük el, és nagy fontossága abban rejlik, hogy ismerve az értékét, segítségével, valamint a tárcsáról a tengelyre átvitt $M = P r$ nyomatékra fennálló

$$(T_1 - T_0) r = M = P r$$

összefüggéssel, meghatározhatjuk mind a T_1 , mind a T_0 megfeszítések nagyságát:

$$T_0 - C = \frac{P}{\varepsilon - 1},$$

$$T_1 - C = \frac{\varepsilon P}{\varepsilon - 1},$$

amivel azután az összes szilárdsági számítások elvégezhetők.

2. Ha két párhuzamos síkkal határolt üveglapra merőleges fénysugárnyaláb esik, akkor a beeső fény kezdeti I_0 intenzitása az abszorpció folytán fokozatosan csökkenni fog. Valamely dx vastagságú réteg által elnyelt fény arányos a rétegbe érkező fény I intenzitásával, a dx rétegvastagsággal és az üveg κ abszorpciós együtthatójával. Tehát az intenzitásnak a rétegben bekövetkező csökkenése

$$dI = -\kappa I dx,$$

ahol a csökkenést a negatív előjel fejezi ki. Az abszorpció differenciálegyenletét az előbbi példában követett módszer szerint megoldva nyerjük:

$$\frac{I_2}{I_1} = e^{-\kappa x},$$

ahol I_2 , illetőleg I_1 a kilépő, illetőleg belépő fény intenzitása és x a réteg vastagsága.

Megjegyzés. Radioaktív anyagok bomlási folyamata, légköri nyomás csökkenése, áramlókést követő áramlás lefolyása a fentivel egyező alakú differenciálegyenletre vezet.

3. A sebesség n -edik hatványával arányos légellenállást tételezve fel, a szabadon eső test v sebességét a

$$\frac{dv}{dt} = g - k \cdot v^n$$

differenciálegyenlet határozza meg (g a nehézségi gyorsulás, k a súrlódási tényező).

4. 1 mol tökéletes gáz p nyomása, V térfogata és T abszolút hőmérséklete közt a

$$pV = RT$$

állapotegyenlet áll fenn ($R = c_p - c_v$, ahol c_p illetve c_v az állandó nyomás, illetve térfogat melletti fajhő). A gáz hőtartalom-növekménye:

$$dQ = c_v dT + p \cdot dV.$$

Adiabatikus állapotváltozás esetén $dQ = 0$, tehát

$$c_v dT + p dV = 0.$$

Az állapotegyenletből nyert $p = \frac{RT}{V} = (c_p - c_v) \frac{T}{V}$ értéket helyettesítve

$$c_v dT + (c_p - c_v) \frac{T}{V} dV = 0,$$

vagy rendezve:

$$\left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right) \frac{dV}{dT} = -\frac{T}{V}.$$

5. Legyen egy körvezető ohmos ellenállása R , önindukció-tényezője L (2. ábra). Ha a körvezetőben egy, a t időtől tetszés szerint függő, $E(t)$ elektromotoros erejű áramforrás működik, akkor a körvezetőben folyó áram erőssége ugyancsak a t idő függvénye lesz: $i(t)$.

Kirchhoff II. törvénye értelmében az áramkörben fellépő eredő feszültségesésnek egyenlőnek kell lennie a bekapcsolt áramforrás elektromotoros erejével. Minthogy az

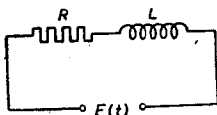
ohmos ellenállás Ri , az önindukció pedig $L \frac{di}{dt}$ feszültségesést idéz elő, fennáll:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E(t).$$

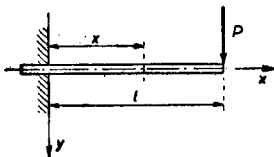
Ily módon az elektromos áramlás időbeli lefolyását leíró differenciálegyenlethez jutottunk.

6. Legyen egy állandó keresztmetszetű, l hosszúságú, homogén, vízszintes rúd egyik végén befogva, másik végén $P =$ állandó függőleges irányú koncentrált erő terheli (3. ábra).

Feltételezzük azt, hogy a rúd hosszirányára eredetileg merőleges síkmetszetek a hajlítás után is síkmetszetek maradnak, és hogy ezeknek a síkmetszeteknek a hajlítás-



2. ábra

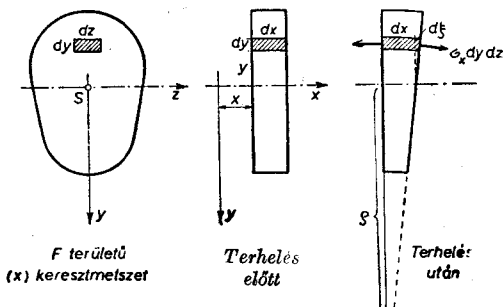


3. ábra

nál való elfordulása oly kicsiny, hogy az elfordulási szög tangensének négyzete elhanyagolható.

Vizsgáljuk a rúd azon részének egyensúlyi állapotát a hajlítás után, melyet hajlítás előtt az $x = l$ és $x = x$ keresztmetszetek határoltak. A lehajlás után nyugalom áll be, tehát az (x, l) darabra ható erők eredője, valamint eredő nyomatéka zérus. Miután a rúdra tisztán hajlító, azaz függőleges irányú terhelő erő hat, vízszintes komponenssel csak azok a normális feszültségek bírnak, melyek az (x, l) darabra az (x) keresztmetszetben hatnak. Az egyensúlyhoz tehát szükséges, hogy a keresztmetszetben ható σ_x normális feszültségek eredője zérus legyen:

$$\iint_{(F)} \sigma_x dy dz = 0.$$



4. ábra

Ezt az egyensúlyi egyenletet a 4. ábra alapján átalakíthatjuk.

Ugyanis a $dy \cdot dz$ alapú, dx magasságú hasáb fajlagos nyúlása:

$$\epsilon_x = \frac{d\xi}{dx} = \frac{y}{\rho};$$

a felületegységre ható normálfeszültség:

$$\sigma_x = E \epsilon_x = \frac{E y}{\rho}$$

(E = rugalmassági modulusz, ρ = súlyponti szál görbületi sugara). Így írható:

$$\iint_{(F)} \sigma_x dy dz = E \iint_{(F)} \epsilon_x dy dz = \frac{E}{\rho} \iint_{(F)} y dy dz = 0.$$

Mint hogy $\frac{\iint_{(F)} y dy dz}{F}$ a rúdkeresztmetszet súlypontjának y koordinátája, tehát

az első egyensúlyi egyenlet azt fejezi ki, hogy a nyúlásmentes, tehát feszültségmentes szál éppen a keresztmetszetek súlypontjait tartalmazó szál, az ún. *súlyponti (rugalmas) szál*.

Az egyensúly második feltétele az, hogy az (x, l) részre ható erőknek bármely tengelyre, tehát pl. az (x) keresztmetszet súlypontján átmenő vízszintes tengelyre vonatkozó forgató nyomatéka zérus legyen.

Mint hogy az y, z koordinátákkal bíró $dy dz$ területű felületelemre a $\sigma_x dy dz = \frac{E}{\rho} y dy dz$ normális irányú belső erő hat, és ennek az erőnek a karja (a súlyponton

átmenő vízszintes tengelytől való távolsága) y , tehát a felületelemre ható belső erők nyomatéka $\frac{E}{\varrho} y^2 dy dz$, és így az egész (x) keresztmetszetre ható belső erők nyomatéka:

$$\frac{E}{\varrho} \iint_{(F)} y^2 dy dz = \frac{EI}{\varrho}.$$

(Itt I a keresztmetszetnek, a súlypontján átmenő, vízszintes tengelyre vonatkozó másodrendű nyomatékát jelenti.)

Ennek a nyomatéknak egyenlőnek kell lennie a P erőnek az (x) keresztmetszetre vonatkozó $P(l-x)$ nyomatékával:

$$\frac{EI}{\varrho} = P(l-x).$$

Felhasználva a görbületet szolgáltató $\frac{1}{\varrho} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ képletet és figyelembe véve azt a feltevést, hogy y' -nek a négyzete elhanyagolható, nyerjük a *hajlított rúd rugalmas szálának differenciálegyenletét*:

$$y'' = \frac{P}{IE}(l-x) = \frac{M(x)}{IE}.$$

7. Ha az m tömegű testre, melynek az egyensúlyi helyzetétől mért kilengését az x koordináta méri, $-rx$ visszatérítő erő (r = rugóállandó), $-s \frac{dx}{dt}$ csillapító erő (s = csillapítási tényező) és a $P_0 \sin \omega t$ periodikus kényszerítő erő hat, akkor a dinamika alaptörvénye szerint (szabad tömeg szorozva gyorsulással = ható erők eredője), a *csillapított lengőmozgás differenciálegyenlete*:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + s \frac{dx}{dt} + rx = P_0 \sin \omega t.$$

M e g j e g y z é s. Torziólengések esetén hasonló módon a következő differenciálegyenlet adódik:

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} + s \frac{d\varphi}{dt} + r\varphi = M,$$

ahol I a lengőtestnek a forgási tengelyre vonatkozó inercianyomatéka, M a kényszerítő forgató nyomaték és φ a kilengési szög.

8. R sugarú kör-keresztmetszetű csőben (melynek L hossza nagy R -hez képest) $p_2 - p_1$ nyomáskülönbség hatása alatt *stacionárius* (időben állandósult) *folyadékáramlás* alakul ki. A fallal érintkező folyadékréteg nyugszik, tehát a belső súrlódás miatt fékezi a környezetében mozgó folyadékréteget. A sebességeloszlás nyilván szimmetrikus lesz a cső tengelye körül, vagyis valamely pontban mutatkozó v sebesség csupán a tengelytől mért r távolság függvénye lesz. A $v = v(r)$ összefüggés megállapításához szükségünk van a Newton-féle súrlódási törvényre. Eszerint a súrlódási erő

$$P = \eta F \frac{dv}{dr},$$

ahol F az érintkezési felület területe és η a súrlódási együttható. Az érintkezési felület, vagyis az egységnyi hosszúságú, r sugarú hengerpalást területe: $F = 2\pi r$, tehát $P = \eta 2\pi r \frac{dv}{dr}$. Az r és $r + dr$ sugarú hengerekkel határolt rétegre ható súrlódási erők eredője tehát a külső és belső hengerpalástra ható P erők differenciálja:

$$dP = 2\pi \eta d\left(r \frac{dv}{dr}\right).$$

Ezt a dr vastagságú folyadékrétegre ható súrlódó erőt stacionárius áramlás esetén a réteg alap- és fedőlapjára ható nyomó erők különbsége ellensúlyozza. A nyomó erők különbsége egyenlő a hosszegységre eső nyomásvesztéssel szorozva a nyomott területtel $= \frac{p_2 - p_1}{L} 2\pi r dr$. Stacionárius áramlás esetén gyorsulás nincs, a szóban forgó folyadékréteg sebessége állandó, tehát a rá ható súrlódó és nyomó erők eredője zérus, azaz

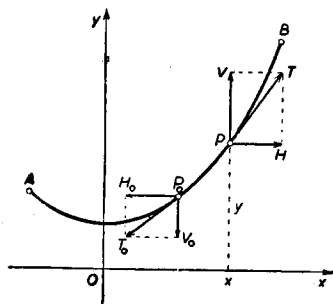
$$dP + \frac{p_2 - p_1}{L} 2\pi r dr = 0.$$

Eszerint az áramlás differenciálegyenlete:

$$-2\pi \eta d\left(r \frac{dv}{dr}\right) = \frac{p_2 - p_1}{L} 2\pi r dr,$$

vagy kifejtve

$$\frac{d^2v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} = -\frac{p_2 - p_1}{L\eta}.$$



5. ábra

9. Függesszünk fel egy kötelet az A és B pontokban (5. ábra). Tegyük fel, hogy a kötélen egyes pontjaira csak függőleges irányú terhelés hat, melynek fajlagos értéke $q(x)$ [kg/m].

Ragadjuk ki a kötélnél az x és x_0 abszcisszákhöz tartozó P és P_0 pontok közötti szakaszát. A P és P_0 pontokban érintőirányú T , illetve T_0 erő hat. Bontsuk fel ezeket vízszintes és függőleges irányú komponensekre. Az egyensúly feltétele:

a vízszintes irányú erőkre: $H_0 = H = \text{állandó}$;

a függőleges irányú erőkre: $V - V_0 = \int_{x_0}^x q(x) dx$.

Ez utóbbiból, ha $P_0 \rightarrow P$, akkor

$$\frac{dV}{dx} = q(x).$$

Mivel T érintőirányú, azért

$$V = H y'.$$

Ezt differenciálva:

$$\frac{dV}{dx} = H y'',$$

vagyis

$$H y'' = q(x).$$

Ha pl. a kótelet csak a saját súlya terheli és a hosszegység súlya γ kg/m, akkor az abszcissza egységére vonatkoztatott súly:

$$q(x) = \gamma \frac{ds}{dx} = \gamma \sqrt{1 + y'^2}.$$

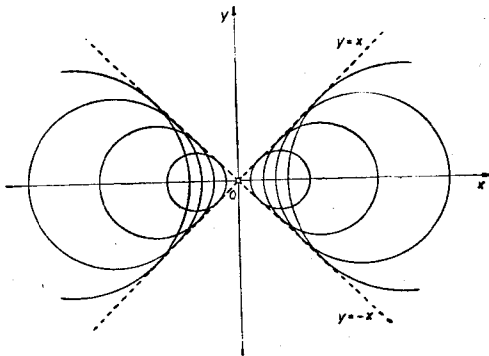
Ezzel a „kötélgörbe” differenciálegyenlete:

$$H y'' = \gamma \sqrt{1 + y'^2}.$$

10. Az

$$(x - C)^2 + y^2 = \frac{C^2}{2}$$

egyenlet egy olyan *körökből álló görbesereget* határoz meg, amelyeknek középpontjai az x tengelyen fekszenek és amelyek érintik az $y = \pm x$ egyeneseket (6. ábra).



6. ábra

Ehhez az egyparaméteres görbesereghez tartozó differenciálegyenletet megkapjuk, ha az adott egyenletet x szerint differenciáljuk és a két egyenletből C -t kiküszöböljük:

$$2(x - C) + 2y y' = 0.$$

Ebből

$$x - C = -y y',$$

illetve

$$C = x + y y'.$$

Ezeket behelyettesítve az eredeti egyenletbe, nyerjük:

$$(-y y')^2 + y^2 = \frac{1}{2} (x + y y')^2,$$

vagy rendezve:

$$y^2 y'^2 - 2x y y' + 2y^2 - x^2 = 0.$$

Ennek a differenciálegyenletnek az általános megoldása:

$$(x - C)^2 + y^2 = \frac{C^2}{2}.$$

Könnyű arról meggyőződni, hogy $y = \pm x$ is megoldása a differenciálegyenletnek:

$$(\pm x)^2 (\pm 1)^2 - 2x (\pm x) (\pm 1) + 2(\pm x)^2 - x^2 = 0.$$

$y = \pm x$ az általános megoldásból C speciális megválasztásával nem származtatható. $y = x$ és $y = -x$ a differenciálegyenlet szinguláris megoldásai (I. II. 2. § c)).

11. Az x tengelyt érintő összes körök seregének egyenlete:

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = C_2^2.$$

Ebből a körsereg differenciálegyenlete x szerinti kétszeres differenciálással és az állandók kiküszöbölésével adódik:

$$(x - C_1) + (y - C_2) y' = 0,$$

$$1 + y'^2 + (y - C_2) y'' = 0.$$

Ezekből

$$y - C_2 = -\frac{1 + y'^2}{y''}, \text{ illetve } x - C_1 = \frac{1 + y'^2}{y''} y'.$$

Tehát

$$\left(\frac{1 + y'^2}{y''} y'\right)^2 + \left(-\frac{1 + y'^2}{y''}\right)^2 = \left(y + \frac{1 + y'^2}{y''}\right)^2,$$

vagyis

$$(1 + y'^2)^3 = (y y'' + 1 + y'^2)^2.$$

12. Az összes, y tengellyel párhuzamos tengelyű másodfokú parabolák egyenlete:

$$y = C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

Ennek a háromparaméteres görbeseregnek a differenciálegyenlete, háromszori differenciálással közvetlenül adódik:

$$y' = 2 C_1 x + C_2,$$

$$y'' = 2 C_1,$$

$$y''' = 0.$$

Feladatok

Határozzuk meg az alábbi egyenletekkel megadott görbeseregek differenciálegyenletét:

1. $y = x^2 + C.$

6. $x^2 + y^2 = C x.$

2. $y = C x^2.$

7. $y = C x + C^2.$

3. $y = C_1 x + C_2.$

8. $(x^2 + y^2)^2 = C^2 (x^2 - y^2).$

4. $y = C x.$

9. $y = C e^{\frac{x}{C}}.$

5. $x^2 + y^2 = C^2.$

10. $y = C_1 \sin(x + C_2).$

11. $y = e^x (C_1 x + C_2).$

12. A sík összes köreinek egyenlete:

$$x^2 + y^2 + 2 C_1 x + 2 C_2 y + C_3 = 0.$$

$$(C_3 \leq C_1^2 + C_2^2).$$

Határozzuk meg ennek a görbeseregnek a differenciálegyenletét.

13. A konfokális ellipszisek és hiperbolák egyenlete:

$$\frac{x^2}{a^2 + C} + \frac{y^2}{b^2 + C} = 1,$$

ahol C a változó paraméter. Határozzuk meg ennek a görbeseregnek a differenciálegyenletét.

14. Mindazon x tengelyű másodfokú parabolák egyenlete, melyeknek csúcspontja az origóban van:

$$y^2 = 2 p x.$$

Határozzuk meg ennek a parabolaseregnek a differenciálegyenletét.

15. Mindazon R sugarú körök egyenlete, melyeknek középpontja az x tengelyen van, a következő:

$$(x - C)^2 + y^2 = R^2.$$

Határozzuk meg ennek a görbeseregnek a differenciálegyenletét.

16. A sík összes R -sugarú köreinek egyenlete:

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = R^2.$$

Határozzuk meg a görbesereg differenciálegyenletét.

17. A másodrendű görbék

$$A x^2 + 2 B x y + C y^2 + 2 D x + 2 E y + F = 0$$

általános egyenlete parabolákat határoz meg, ha $AC - B^2 = 0$ és ha A és C nem mindkettő 0-val egyenlők. Tegyük fel, hogy $C \neq 0$ (egyébként x és y felcserélendő), akkor C -vel osztva y^2 együtthatója 1 lesz és az összes parabolák egyenletétül a következő adódik:

$$C_1^2 x^2 + 2 C_1 x y + y^2 + 2 C_2 x + 2 C_3 y + C_4 = 0.$$

Határozzuk meg ennek a négyparaméteres görbeseregnek a differenciálegyenletét.

18. Határozzuk meg az összes másodrendű görbék differenciálegyenletét.
19. Határozzuk meg mindazon körök differenciálegyenletét, melyek mind keresztülmennének az adott $P_1(q, 0)$ és $P_2(0, q)$ pontokon.

20. Határozzuk meg mindazon körök differenciálegyenletét, melyeknek középpontjai az $y = x$ egyenesen vannak.

21. Határozzuk meg mindazon körök differenciálegyenletét, melyek az $y = \pm \operatorname{tg} \alpha (x - a)$ egyeneseket érintik és középpontjaik az x tengelyen vannak.

22. Határozzuk meg mindazon R sugarú körök differenciálegyenletét, melyeknek középpontjai az adott $f(x, y) = 0$ egyenletű görbén vannak.

23. Határozzuk meg mindazon, y tengellyel párhuzamos tengelyű, másodfokú parabolák differenciálegyenletét, amelyeknek csúcspontjai az $y = x$ egyenesen fekszenek.

24. Határozzuk meg mindazon y tengellyel párhuzamos tengelyű, másodfokú parabolák differenciálegyenletét, melyek keresztülmennének az origón és az adott $P(a, 0)$ ponton.

25. Határozzuk meg mindazon hiperbolák differenciálegyenletét, melyeknek aszimptotái párhuzamosak a koordináta-tengelyekkel.

26. Határozzuk meg mindazon ellipszisek differenciálegyenletét, melyeknek középpontja az origó és tengelyei egybeesnek a koordináta-tengelyekkel.

27. Az állandó körfrekvenciájú és $\kappa \left(= \frac{\ln p}{T} = \frac{\text{logaritmikus dekrementum}}{\text{rezgésidő}} \right)$ csillapítási állandójú csillapított rezgéseket az

$$y = C_1 e^{-\kappa t} \cdot \sin(\omega t + C_2)$$

kétparaméteres függvényrendszer írja le. Határozzuk meg az ehhez tartozó differenciálegyenletet.

28. Egy mozgó pont $\omega =$ állandó szögsebességgel fut végig az $r = e^{a\varphi}$ egyenletű logaritmikus spirális pályán. Határozzuk meg e pont adott, origón átmenő egyenesen való merőleges vetülete mozgásának differenciálegyenletét.

29. Határozzuk meg az

$$x = C(t - \sin t)$$

$$y = C(1 - \cos t)$$

cikloissereg differenciálegyenletét.

30. Határozzuk meg az

$$x + C = a(t - \sin t)$$

$$y = a(1 - \cos t), \quad (a = \text{állandó})$$

cikloissereg differenciálegyenletét.

I. ELSŐRENDŰ, AZ ISMERETLEN FÜGGVÉNY DERIVÁLTJÁBAN ELSŐFOKÚ KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

1. §. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

a) $y' = f(x)$ A differenciálegyenlet nem tartalmazza (explicite) az ismeretlen függvényt. Feltesszük, hogy az $f(x)$ függvény értelmezve van valamely $a < x < b$ intervallumban és folytonos ezen intervallum minden belső pontjában.

A differenciálegyenlet így is írható:

$$\frac{dy}{dx} = f(x),$$

vagy

$$dy = f(x) dx.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása határozatlan integrálással (kvadrátúrával) adódik:

$$y = \int f(x) dx + C.$$

C tetszőleges állandó, mely felvehet minden értéket, $-\infty < C < \infty$.

Ha x_0 az (a, b) intervallumnak tetszőleges belső pontja, és előírjuk azt, hogy az x_0 -hoz tartozó függvényérték $y(x_0) = y_0$ legyen, akkor az ehhez a kezdeti feltételhez tartozó partikuláris megoldás:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x) dx.$$

Az (x, y) sík $a < x < b$, $-\infty < y < \infty$ tartományának minden belső pontján a differenciálegyenletnek egyetlen integrálgörbéje halad át.

A differenciálegyenlet általános megoldása által meghatározott görbesereg összes görbéi kongruens görbék, melyek egymásból y irányú párhuzamos eltolással származtathatók.

b) $y' = f(y)$ | A differenciálegyenlet nem tartalmazza (expliciten) a független változót. Feltesszük, hogy az $f(y)$ függvény értelmezve van valamely $\alpha < y < \beta$ intervallumban és folytonos ezen intervallum minden belső pontjában.

A differenciálegyenlet így is írható:

$$\frac{dy}{dx} = f(y),$$

vagy

$$dy = f(y) dx.$$

Ha most még feltesszük, hogy $f(y) \neq 0$ az $\alpha \leq a < y < b \leq \beta$ intervallumban, akkor — kimutathatóan — az ismeretlen függvénynek van inverz függvénye: $x = x(y)$. Ha ily módon y -t független változónak vesszük, és x -et tekintjük ismeretlen függvénynek, akkor — az inverz függvény deriváltjának tulajdonságai alapján — differenciálegyenletünket így is írhatjuk:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)} \quad \text{vagy} \quad dx = \frac{dy}{f(y)}.$$

Ezzel a differenciálegyenletet visszavezettük az előbbi a) esetre.

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + C.$$

Az $y(x_0) = y_0$ ($-\infty < x_0 < \infty$, $a < y_0 < b$) kezdeti feltételhez tartozó partikuláris megoldás:

$$x = x_0 + \int_{y_0}^y \frac{dy}{f(y)}.$$

Az (x, y) sík $-\infty < x < \infty$, $a < y < b$ tartományának minden belső pontján a differenciálegyenletnek egyetlen integrálgörbéje halad át.

A differenciálegyenlet általános megoldása által meghatározott görbesereg összes görbéi kongruens görbék, melyek egymásból x irányú párhuzamos eltolással származtathatók.

Legyen mármost $f(y)$ folytonos, azonban az (α, β) intervallum egyetlen $y = \eta$ értékénél váljék zérussá, azaz $f(\eta) = 0$. A differenciálegyenletnek a fenti általános megoldástól különböző megoldása:

$$y = \eta, \quad \text{ha} \quad f(\eta) = 0.$$

Hogy ez a megoldás vajon reguláris vagy szinguláris-e, arra nézve a következő mondhatjuk:

1. Ha az $\int_{y_0}^y \frac{dy}{f(y)}$ integrál $y \rightarrow \eta$ esetén divergens, akkor az $y = \eta$ megoldás *reguláris (közönséges)*.

2. Ha az $\int_{y_0}^y \frac{dy}{f(y)}$ integrál $y \rightarrow \eta$ esetén konvergens, akkor az $y = \eta$ megoldás *szinguláris*.

c) $y' = f(x) g(y)$ | A differenciálegyenlet így is írható:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) g(y),$$

vagy a változók szétválasztásával:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) dx.$$

Tegyük fel, hogy az $a < x < b, c < y < d$ tartományban $f(x)$ és $g(y)$ folytonosak továbbá $g(y)$ sehol sem zérus.

A differenciálegyenlet *általános megoldása*:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx + C.$$

Az $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltételhez tartozó partikuláris megoldás:

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{g(y)} = \int_{x_0}^x f(x) dx.$$

Az $a < x < b, c < y < d$ tartomány minden egyes (x_0, y_0) pontján a differenciálegyenletnek egyetlen integrálgörbéje halad át.

Ha viszont valamely $y = \eta$ értéknél $g(y)$ zérus értékű, akkor a differenciálegyenletnek a fenti általános megoldásától különböző megoldása:

$$y = \eta, \quad \text{ha} \quad g(\eta) = 0.$$

Ez a megoldás

1. *reguláris (közönséges)*, ha az $\int_{y_0}^y \frac{dy}{g(y)}$ integrál $y \rightarrow \eta$ esetén divergens;

2. *szinguláris*, ha az $\int_{y_0}^y \frac{dy}{g(y)}$ integrál $y \rightarrow \eta$ esetén konvergens.

d) $\frac{M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy}{dx} = 0$ Ebben a differenciálegyenletben a változók szétválaszthatók:

$$\frac{M(x)dx}{P(x)} + \frac{Q(y)dy}{N(y)} = 0.$$

Tegyük fel, hogy az $a < x < b$, $c < y < d$ tartományban $M(x)$, $N(y)$, $P(x)$ és $Q(y)$ folytonosak, továbbá $P(x)$ és $N(y)$ sehol sem válnak zérussá.

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\int \frac{M(x)dx}{P(x)} + \int \frac{Q(y)dy}{N(y)} = C.$$

Az $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltételhez tartozó partikuláris megoldás:

$$\int_{x_0}^x \frac{M(x)dx}{P(x)} + \int_{y_0}^y \frac{Q(y)dy}{N(y)} = 0.$$

Az $a < x < b$, $c < y < d$ tartomány minden egyes (x_0, y_0) pontján a differenciálegyenletnek egyetlen integrálgörbéje halad át.

Ha viszont valamely $y = \eta$, illetve $x = \xi$ értéknél $N(y)$, illetve $P(x)$ zérus értékű, akkor az eredeti $M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$ differenciálegyenletnek a fenti általános megoldásától különböző megoldásai:

$$\begin{array}{ll} y = \eta, & \text{ha } N(\eta) = 0, \\ x = \xi, & \text{ha } P(\xi) = 0. \end{array}$$

Ezeknek a megoldásoknak reguláris, illetve szinguláris voltáról hasonló mondható, mint amit a b) vagy c) pont végén mondtunk.

Megjegyzés. Ha ragaszkodunk ahhoz a kikötéshez, hogy a differenciálegyenletben x a független változó és y az ismeretlen függvény, akkor az előbb említett $x = \xi$ függvény nem ad megoldást.

Példák

1. Oldjuk meg az

$$y' = \frac{1}{x}$$

differenciálegyenletet az $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltétellel. Írjuk fel az általános megoldást.

A jobb oldal folytonos a $(0, \infty)$ és $(-\infty, 0)$ nyílt intervallumokban.

Az első intervallum számára lesz $(x_0 > 0)$ esetén

$$y = \int_{x_0}^x \frac{dx}{x} + y_0 = \ln \frac{x}{x_0} + y_0;$$

ez a megoldás a $0 < x < \infty$ intervallumban minden x -re értelmezve van.

A második intervallumban $x_0 < 0$ kezdeti értékek mellett nyerjük:

$$y = \int_{x_0}^x \frac{dx}{x} + y_0 = \ln |x| - \ln |x_0| + y_0 = \ln \frac{x}{x_0} + y_0;$$

ez a megoldás a $-\infty < x < 0$ intervallumban minden x -re értelmezve van.

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = \ln |x| + C \quad (7. \text{ ábra}).$$

Megjegyzés. Ha a fenti differenciálegyenletben megcseréljük a független változó és ismeretlen függvény szerepét, tehát x -et tekintjük ismeretlen függvénynek és y -t független változónak, akkor a differenciálegyenlet így írható:

$$\frac{dx}{dy} = x.$$

Ennek a differenciálegyenletnek az általános megoldása az előbbivel azonos

($y = \ln |x| + C$), viszont $x = 0$ is megoldás, mégpedig reguláris (közönséges) meg-

oldás [az $\int \frac{dx}{x}$ integrál ugyanis divergens, ha $x \rightarrow 0$].

2. Oldjuk meg az

$$y'^2 - x = 0$$

differenciálegyenletet (II. 1. § a)).

A deriváltra megoldva:

$$y' = \pm \sqrt{x},$$

Ebből az általános megoldás:

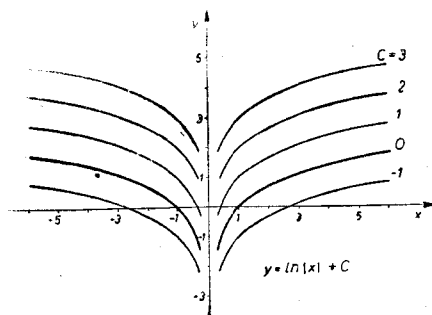
$$y = \pm \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C.$$

A $0 \leq x < \infty$ félsík minden pontján két integrálgörbe halad át (8. ábra). Ennek ellenére ezek az integrálgörbék reguláris megoldásokat ábrázolnak, ugyanis az adott differenciálegyenlet tulajdonképpen két differenciálegyenletet jelent:

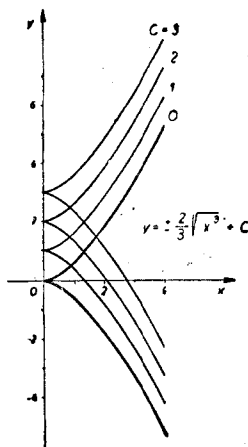
$$y' = +\sqrt{x} \quad \text{és} \quad y' = -\sqrt{x}.$$

Ezek általános megoldásai:

$$y = +\frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C \quad \text{és} \quad y = -\frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C.$$



7. ábra



8. ábra

3. Határozzuk meg az

$$y' = y^2$$

differentiálegyenlet összes megoldásait.

A változókat szétválasztva:

$$\frac{dy}{y^2} = dx, \quad (-\infty < y < 0, \quad 0 < y < \infty)$$

és integrálva:

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int dx + C,$$

azaz

$$-\frac{1}{y} = x + C.$$

Tehát az általános megoldás

$$y = -\frac{1}{x+C} \quad (9. \text{ ábra}).$$

A differenciálegyenletnek

$$y = 0$$

is megoldása, mégpedig reguláris (közön-séges).

4. Oldjuk meg az

$$x(y^2 - 1) dx + y(x^2 - 1) dy = 0$$

differentiálegyenletet.

Szétválasztjuk a változókat:

$$\frac{x dx}{x^2 - 1} + \frac{y dy}{y^2 - 1} = 0, \quad (|x| \neq 1, \quad |y| \neq 1).$$

Integrálunk:

$$\int \frac{x dx}{x^2 - 1} + \int \frac{y dy}{y^2 - 1} = \ln |C|,$$

tehát

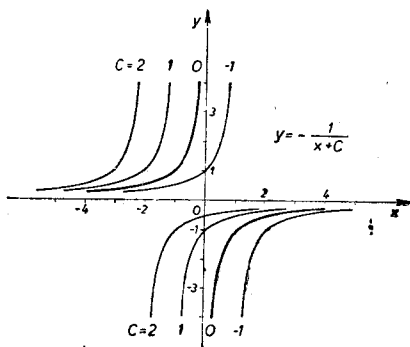
$$\ln |x^2 - 1| + \ln |y^2 - 1| = \ln |C|,$$

vagy

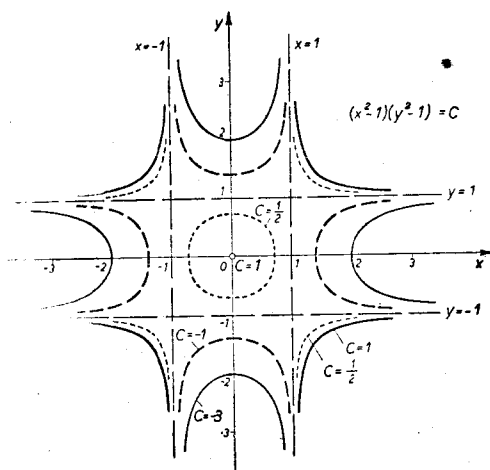
$$(x^2 - 1)(y^2 - 1) = C \quad (10. \text{ ábra}).$$

(A végeredmény egyszerűbb írásmódja kedvéért volt célszerű az integrálási állandót $\ln |C|$ alakban írni.) Ez a differenciálegyenlet általános megoldása. Ezen-kívül még négy megoldás van:

$$x = 1, \quad x = -1, \quad y = 1, \quad y = -1.$$



9. ábra



10. ábra

Ez a keresett görbesereg differenciálegyenlete.

A változókat szétválasztva:

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0, \quad (x \neq 0, y \neq 0)$$

Ebből integrálással adódik:

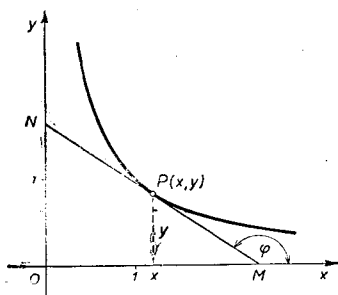
$$\ln |x| + \ln |y| = \ln |C|, \quad (C \neq 0),$$

vagyis a görbesereg egyenlete

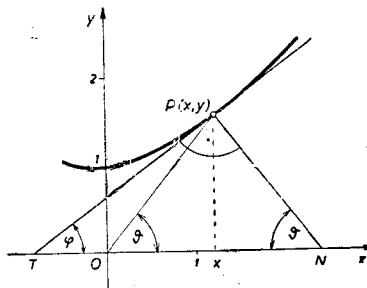
$$xy = C.$$

Ez pedig egyenlő szárú hiperbolákat jelent, melyeknek közös aszimptotái a koordináta-tengelyek.

6. Határozzuk meg annak a görbeseregnek az egyenletét, amelyeknek mindegyik görbéjére fennáll, hogy az (x, y) koordinátájú P pontjához tartozó normálisnak az x tengelyig terjedő darabja ugyanakkora, mint a P pontnak az origótól való távolsága (12. ábra).



11. ábra



12. ábra

Ezek az általános megoldásból nem származtathatók, mivel $\ln |C|$ -ben C nem lehet 0. Ez a négy utóbbi megoldás egyébként reguláris (közön-séges).

5. Határozzuk meg annak a görbeseregnek az egyenletét, amelyeknek mindegyik görbéjére fennáll, hogy az érintési pont felezi az érintő-nek a koordináta-tengelyek között levő darabját (11. ábra).

Az ábra alapján

$$\overline{OM} = 2x, \quad \overline{ON} = 2y,$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{2y}{2x} = -\frac{y}{x}.$$

Tehát

$$y' = -\frac{y}{x}.$$

A feltétel szerint $\overline{OP} = \overline{PN}$, továbbá $PN \perp \overline{PT}$.
Fennáll tehát, hogy

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = \operatorname{ctg} \vartheta.$$

Másrészt

$$\operatorname{ctg} \vartheta = \frac{x}{y},$$

tehát a keresett görbesereg differenciálegyenlete:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y};$$

vagy a változókat szétválasztva:

$$y \, dy - x \, dx = 0.$$

Ebből integrálással adódik:

$$y^2 - x^2 = C.$$

7. Határozzuk meg annak a $P_0(2, 1)$ ponton keresztülmennő görbének az egyenletét, amelyre fennáll, hogy egy tetszőleges $P(x, y)$ pontjához tartozó normálisának e ponttól az y tengellyel való metszéspontjáig terjedő darabját felezi a normálisnak az x tengellyel való metszéspontja (13. ábra).

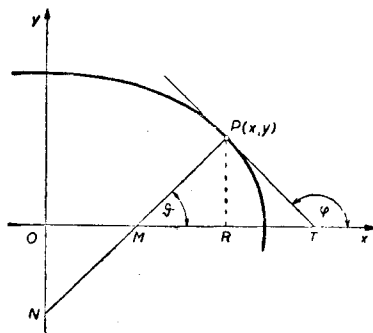
A feltétel szerint $\overline{PM} = \overline{MR}$, továbbá $\overline{PT} \perp \overline{PN}$.

Mivel $\triangle NOM \sim \triangle PRM$, ezért a feltétel alapján

$$\overline{OM} = \overline{MR} = \frac{x}{2}.$$

Az érintő iránytangense:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = -\operatorname{ctg} \vartheta = -\frac{x}{2y}.$$



13. ábra

A változókat szétválasztva:

$$2y \, dy + x \, dx = 0.$$

Ebből integrálással adódik:

$$2y^2 + x^2 = C.$$

Mínthogy a görbének át kell mennie a $P_0(2, 1)$ ponton, fennáll:

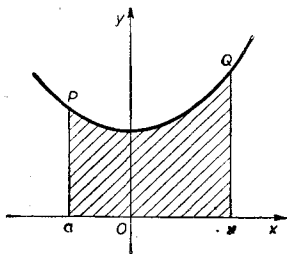
$$2 + 4 = C,$$

tehát a keresett görbe egyenlete:

$$2y^2 + x^2 = 6.$$

8. Mi az egyenlete annak a görbének, amelyiknél a görbe alatti terület az a és x abszcisszájú pontok között arányos a pontok közötti görbéi hosszával? (14. ábra.)

Legyen \widehat{PQ} a görbe íve az a és x abszcisszájú pontok között. A görbe alatti terület:



14. ábra

$$\int_a^x y \, dx,$$

és az ívhossz:

$$\int_a^x \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_a^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Ha a görbe alatti terület arányos az ívhosszal, akkor fennáll:

$$\int_a^x y \, dx = k \int_a^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (k = \text{állandó}).$$

Ebből az integrálegyenletből, differenciálással adódik a következő differenciálegyenlet:

$$y = k \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

vagy

$$k \, dy = \pm \sqrt{y^2 - k^2} \, dx.$$

A változókat szétválasztva:

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2 - k^2}} = \pm \frac{dx}{k} \quad y \neq k$$

Ezt integrálva:

$$\operatorname{ar ch} \frac{y}{k} = \pm \frac{x + C}{k};$$

vagy y -t kifejezve:

$$y = k \operatorname{ch} \frac{x + C}{k}.$$

A differenciálegyenletnek ez az általános megoldása. Ezenkívül azonban még a $\sqrt{y^2 - k^2} = 0$ egyenletből adódó

$$y = \pm k$$

is megoldás.

9. Az l cm hosszúságú, q cm² állandó keresztmetszetű és ϱ gramm/cm³ sűrűségű homogén \overline{AB} rúd egy, a tengelyének meghosszabbításában, végpontjától a cm távolságra, P pontban elhelyezett m (gramm) tömegű (pontoszerű) testet, a Newton-féle tömegvonzási törvénynek megfelelően vonzza. Határozzuk meg ezt a vonzóerőt (15. ábra).

Az x abszcisszájú, dx cm hosszúságú rúdelem tömege:

$$\varrho q dx \text{ gramm.}$$

Az m tömegpontot ez a rúdelem

$$dP = f \frac{m \varrho q dx}{(a+x)^2} \text{ din}$$



15. ábra

nagyságú erővel vonzza. Itt $f = 6,65 \cdot 10^{-8}$ az ún. gravitációs állandó.

A $P = P(x)$ ismeretlen függvényre áll tehát a

$$\frac{dP}{dx} = f \frac{m \varrho q}{(a+x)^2}$$

differenciálegyenlet. Ennek általános megoldása kvadratúrával adódik:

$$P = C - \frac{f m \varrho q}{a+x}.$$

Ez az általános megoldás adja azt a vonzóerőt, amit a rúdnak az A végpontjától az x abszcisszájú pontjáig terjedő darabja kifejt.

Hogy a feladatnak megfelelő partikuláris megoldást megkapjuk, vegyük figyelembe azt, hogy a vonzóerő 0, ha $x = 0$. Tehát fenn kell állnia a

$$0 = C - \frac{f m \varrho q}{a}$$

egyenletnek. Ebből

$$C = \frac{f m \varrho q}{a},$$

és a keresett megoldás:

$$P = f m \varrho q \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+x} \right).$$

Mivel pedig a rúd hossza l , a rúd által kifejtett vonzóerő:

$$P = f m \varrho q \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+l} \right).$$

Ha pl. a rúd végtelen hosszú volna, a vonzóerő $\frac{f m \varrho q}{a}$ nagyságú volna.

Egy 10 m hosszúságú és 1 mm² keresztmetszetű acéldrót ($\varrho = 7,8$) esetében egy, a végpontjától $a = 5$ cm távolságra elhelyezett 1 gramm tömegű golyóra gyakorolt

vonzóerő nagysága:

$$P = 6,65 \cdot 10^{-8} \cdot 1 \cdot 7,8 \cdot 0,01 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{1005} \right) \approx 1 \cdot 10^{-9} \text{ din.}$$

Ez az erő megfelel kb. a milligramm tízmilliomod részének. Ha a drót végtelen hosszú volna, akkor a vonzóerő csak mintegy 0,5%-kal volna nagyobb.

10. Ha egy test légüres térben szabadon esik, akkor egyedül a nehézségi erő hat rá, amely $g = 9,81 \text{ m/sec}^2$ gyorsulást idéz elő; ha tehát v -vel jelöljük a sebességet, fennáll, hogy $\frac{dv}{dt} = g$. A levegő ellenállása csökkenti a gyorsulást. Ezt a csökkenést a sebesség második hatványával vehetjük arányosnak: $\frac{v^2}{\lambda^2}$. Az $\frac{1}{\lambda^2}$ arányossági tényező függ a test G (kg) súlyától, a mozgásirányra merőleges legnagyobb F (m^2) keresztmetszetének területétől, a levegő fajsúlyától ($\gamma = 1,293 \text{ kg/m}^3$) és a test alakjától (ezt az alaktól való függést a ψ arányossági tényező jelenti; pl. gömbnél $\psi = 0,5$): $\lambda^2 = \frac{2 G}{\psi \gamma F}$. Pl. ha a test fajsúlya s (kg/dm^3), akkor gömb alakú test esetén (mindent az előbbi egységekben számolva):

$$\lambda^2 = \frac{2 \frac{4}{3} r^3 \pi \cdot 1000 s}{0,5 \cdot 1,293 \cdot r^2 \pi} = 4125 r s;$$

például öntöttvas ($s = 7,25$) esetén

$$\lambda^2 = 29\,910 r \approx 30\,000 r.$$

A test esését leíró differenciálegyenlet a következő lesz:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{v^2}{\lambda^2}.$$

A változókat szétválasztva:

$$dt = \frac{dv}{g - \frac{v^2}{\lambda^2}}.$$

Integrálva — és az integrálási állandót t_0 -val jelölve —:

$$t - t_0 = \int \frac{dv}{g - \frac{v^2}{\lambda^2}} = \frac{1}{g} \int \frac{dv}{1 - \frac{v^2}{k^2}},$$

ahol $k^2 = g \lambda^2$ (a mi számértékeinkkel: $k^2 = 293\,400 r$).

A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$t - t_0 = \frac{k}{g} \operatorname{ar th} \frac{v}{k},$$

vagy

$$v = k \operatorname{th} \frac{g(t - t_0)}{k}.$$

Ha a kezdősebesség zérus, akkor

$$t = \frac{k}{g} \operatorname{ar} \operatorname{th} \frac{v}{k} = \frac{k}{2g} \ln \frac{k + v}{k - v},$$

vagy

$$v = k \operatorname{th} \frac{gt}{k} = k \frac{e^{\frac{gt}{k}} - e^{-\frac{gt}{k}}}{e^{\frac{gt}{k}} + e^{-\frac{gt}{k}}}.$$

Ha k igen nagy, akkor a levegő ellenállásának hatása: $\frac{v^2}{\lambda^2} = \frac{g}{k^2} v^2$, igen kicsiny. S ekkor

$$t = \frac{k}{2g} \ln \frac{1 + \frac{v}{k}}{1 - \frac{v}{k}} \approx \frac{k}{2g} 2 \frac{v}{k} = \frac{v}{g},$$

azaz $v = gt$. (Visszajutunk a légüres térben eső test sebességére.)

Ha $v \rightarrow k$, akkor $t \rightarrow \infty$, vagyis hosszú idő múlva a sebesség egyre jobban megközelíti a k értéket, természetesen anélkül, hogy azt elérné. Igen hosszú idő múlva a mozgás közelítőleg egyenletes lesz.

Ha h jelenti a megtett utat, akkor

$$v = \frac{dh}{dt}$$

figyelembevételével:

$$h = k \int \operatorname{th} \frac{gt}{k} dt = \frac{k^2}{g} \ln \operatorname{ch} \frac{gt}{k} + C.$$

Ha $t = 0$ esetén $h = 0$, akkor $C = 0$ kell, hogy legyen.

11. Egy $y = h$ magasságú homogén oszlopot $Q \text{ cm}^2$ területű fedőlapján $P \text{ kg}$ függőleges erő terheli. Határozzuk meg az oszlop alakját úgy, hogy mindegyik y magasságú $q(y)$ keresztmetszetében állandó $\frac{P}{Q} \text{ kg/cm}^2$ feszültség ébredjen.

Legyen az oszlop fajsúlya $\gamma \text{ kg/cm}^3$. Az y magasságban levő $q(y)$ keresztmetszetre a P nyomóerőn kívül ránehezedik a felette levő oszloprész $G(y)$ súlya is:

$$G(y) = \gamma \int_y q(y) dy.$$

Az ebben a keresztmetszetben ébredő nyomó feszültség

$$\frac{P + G(y)}{q(y)}.$$

A mondott feltételt a

$$P + \gamma \int_y^h q(y) dy = \frac{P}{Q} q(y)$$

integrálegyenlet fejezi ki. Ezt — y szerinti differenciálással — a

$$-\gamma q(y) = \frac{P}{Q} q'(y)$$

differenciálegyenletre vezethetjük vissza. Itt y a független változó és $q(y)$ az ismeretlen függvény.

A változókat szétválasztva:

$$-\gamma dy = \frac{P}{Q} \cdot \frac{dq}{q}.$$

Ebből integrálással a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\frac{P}{Q} \ln q = -\gamma \int_{y_0}^y dy = \gamma (y_0 - y),$$

vagy

$$q(y) = e^{\frac{Q}{P} \gamma (y_0 - y)},$$

ahol y_0 az integrálási állandó.

Figyelembe véve azt, hogy $y = h$ magasságban a keresztmetszet: $q(h) = Q$, mivel

$$Q = e^{\frac{Q}{P} \gamma (y_0 - h)},$$

lesz

$$q(y) = Q e^{\frac{Q}{P} \gamma (h - y)}.$$

Ha feltesszük, hogy az oszlop forgástest alakú, akkor

$$q(y) = \pi x^2,$$

és a meridiángörbe egyenlete:

$$y = h - \frac{2P}{\pi r^2 \gamma} \ln \frac{x}{r} \quad (16. \text{ ábra}),$$

ahol x az y magasságban levő kör-keresztmetszet sugara és r a h magasságban levő kör-keresztmetszet sugara. Az oszlop lábánál levő kör-keresztmetszet sugara:

$$r e^{\frac{\pi r^2 h \gamma}{2P}}.$$

12. A rádium bomlási sebessége arányos a pillanatnyi rádiummennyiséggel. Ha a bomlás következtében a rádium mennyisége kerekén 1600 év alatt a felére csökken, a kiindulási anyag mennyiségének hány százaléka bomlik fel 100 év alatt?

Legyen R_0 a kiindulási anyag mennyisége és R a t időpontban. A bomlás sebessége $\frac{dR}{dt}$ és ez arányos R -rel, azaz

$$\frac{dR}{dt} = -kR,$$

ahol k az arányossági tényező. (A negatív előjel arra utal, hogy az anyag mennyisége a bomlás következtében fogy.)

A változókat szétválasztjuk:

$$\frac{dR}{R} = -k dt.$$

Mivel $t = 0$ időpontban $R = R_0$ és $t = 1600$ év múlva $R = \frac{1}{2} R_0$, ezek között határok között integrálunk:

$$\int_{R_0}^{\frac{1}{2} R_0} \frac{dR}{R} = -k \int_0^{1600} dt,$$

azaz

$$\ln \frac{1}{2} = -1600 k,$$

ahonnan

$$k = \frac{\ln 2}{1600}.$$

Ezt az értéket felhasználva és az $[R_0, R]$, $[0, 100]$ határok között integrálva:

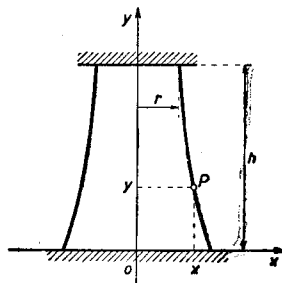
$$\int_{R_0}^R \frac{dR}{R} = -\frac{\ln 2}{1600} \int_0^{100} dt,$$

$$\ln \frac{R}{R_0} = -\frac{\ln 2}{1600} 100 = -0,0433,$$

ahonnan

$$\frac{R}{R_0} = 0,958.$$

Tehát a 100. év végére megmarad az eredeti rádiummennyiség 95,8%-a és felbomlik a 4,2%-a.



16. ábra

13. Egy víztartályban levő 100 liter oldat 6 kg sót tartalmaz. Tiszta víz folyik a tartályba 3 l/perc sebességgel, és a keverék ugyanekkora sebességgel folyik el a tartályból, közben pedig keveréssel biztosítjuk azt, hogy a keverék sókoncentrációja állandóan egyenletes maradjon. Mennyi lesz a *sótartalom* egy óra múlva?

Legyen x kg só a keverékben t perc múlva. A koncentráció ekkor

$$c = \frac{x}{100} \text{ kg/l.}$$

dt idő alatt $3 dt$ liter tiszta víz folyik a tartályba, és ugyanekkor $3 dt$ liter oldat folyik ki, ami $3c dt$ kg sót visz magával. Tehát a tartályban levő keverék sótartalmának változása:

$$dx = -3c dt = -\frac{3x}{100} dt.$$

A tartályban levő keverék sótartalmát 1 óra múlva tehát az alábbi egyenletből lehet meghatározni:

$$\int_6^x \frac{dx}{x} = -\frac{3}{100} \int_0^{60} dt,$$

ahonnan

$$\ln \frac{x}{6} = -1,8,$$

vagyis

$$x = 6 e^{-1,8} = 0,9918 \text{ kg} \approx 1 \text{ kg.}$$

14. Egy hengeres tartály, melynek belső sugara r , H magasságig vízzel van megtöltve. A tartály fenekén van egy ϱ sugarú, kör alakú nyílás. Határozzuk meg a *tartály kiürülésének az időtartamát*.

Ha a tartályban a víz h cm magasságig áll, akkor, ha a súrlódástól eltekintünk, a kifolyás sebessége $v = \sqrt{2gh}$ cm/sec volna. (Itt $g = 981$ cm/sec² a nehézségi gyorsulás.) A súrlódás miatt a sebesség ennél kisebb: $v = c\sqrt{2gh}$; ahol $c \approx 0,6$ (kör alakú nyílás esetén).

A víztükörnek a tartály fenekétől mért h távolsága a t idő függvénye és a víztükör süllyedésének a sebessége: $-\frac{dh}{dt}$. Ez a sebesség úgy aránylik a kifolyási sebességhez, mint a kifolyó nyílás keresztmetszete aránylik a tartály keresztmetszetéhez. Tehát

$$-\frac{dh}{dt} = \frac{\varrho^2}{r^2} v.$$

vagy ha bevezetjük a következő jelölést:

$$C = \frac{1}{r^2} \varrho^2 \sqrt{2g},$$

akkor

$$\frac{dh}{dt} = -C\sqrt{h}.$$

Ha az időt a kifolyás kezdetétől számítjuk ($t = 0$), akkor a differenciálegyenlet megoldása:

$$\int_0^t dt = -\frac{1}{C} \int_H^h \frac{dh}{\sqrt{h}},$$

azaz:

$$t = \frac{2}{C} (\sqrt{H} - \sqrt{h}),$$

amíg csak $h > 0$. Mi azonban épp a teljes kifolyáshoz szükséges T időt keressük, vagyis t értékét $h = 0$ esetében. Ez az előbbi eredményünkből $h \rightarrow 0$ határátmenettel adódik:

$$T = \frac{2\sqrt{H}}{C} \text{ sec.}$$

Megjegyzés. A fenti példában szereplő differenciálegyenletet — elvonatkoztatva a benne szereplő mennyiségeknek a példa szerinti fizikai jelentésétől — tisztán matematikailag vizsgálva, a következő megfontolásokat tehetjük:

A

$$\frac{dy}{dx} = -c\sqrt{y}$$

differenciálegyenletben ($c > 0$, meghatározott állandót jelent!) y az ismeretlen függvény és x a független változó. (Itt a \sqrt{y} -nak csak a pozitív értékét tekintjük, azaz $\sqrt{y} \geq 0$.) Az általános megoldás $y > 0$ kikötéssel, a változók szétválasztásával és kvadratúrával határozható meg. A változókat szétválasztva:

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = -c dx;$$

ezt integrálva adódik: $2\sqrt{y} = -c(x - k)$ (itt k az integrálási állandó). Vagy

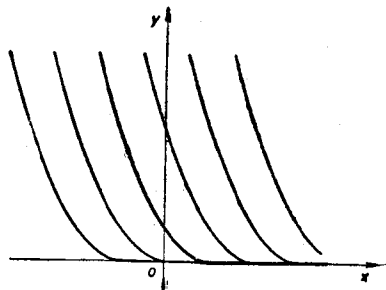
$$x = k - \frac{2}{c}\sqrt{y}.$$

Tehát az $y > 0$ félsíkon, az általános megoldást ábrázoló görbesereg olyan, hogy egy-egy ponton csak egy integrálgörbe halad át. Az egyes integrálgörbék egy-egy másodfokú parabolának egyik ágából állnak. Ezek a parabolaágak kongruensek és egymásból x tengely irányú eltolással származtathatók (17. ábra).

Ezen az általános megoldáson kívül azonban $y = 0$ is megoldása a differenciálegyenletnek, és mivel az

$$\int_{y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{y}}$$

integrál $y \rightarrow 0$ esetén konvergens, ez a megoldás szinguláris.



17. ábra

Könnyű belátni azt, hogy az $y = 0$ szinguláris megoldást is hozzászámítva a megoldásokhoz, az x tengely bármelyik $(x, 0)$ pontján keresztül számtalan integrálgörbe halad át: bármelyik parabolát csatlakoztathatjuk és folytathatjuk az $y = 0$ egyenessel, s ezek a görbék mind integrálgörbék. Tehát, ha elhagyjuk az $y > 0$ kikötést, a megoldások unicitása, az integrálgörbék egyértelmű meghatározottsága megszűnik.

Ennek a többértelműségnek egyébként a fenti példában megvan a triviális fizikai jelentése is. Azok az időpontok ugyanis, amelyekben a tartály üres, határozatlanok, mert hiszen, ha egyszer a víz a tartályból kifolyik, a tartály a későbbi időpontokban végig üres marad. Pusztán csak az az időpont meghatározott, amelyben a tartály kiürül, s épp ez az a T időpont, amelyet a fenti példában meghatároztunk.

15. Egy acélból (hővezetési tényezője: $k = 0,14$ cal/cm sec $^{\circ}\text{C}$) készült gömbhéj belső sugara 6 cm, külső sugara 10 cm. A gömb belsejében 200°C , a külső térben 20°C a hőmérséklet. Határozzuk meg a gömb középpontjától r (cm) távolságban a hőmérsékletet és a gömbhéjon másodpercenként átváramló hőmennyiséget.

A gömbi szimmetria miatt r , azaz a gömb középpontjától mért távolság lesz az egyetlen független változó. Az r távolságban

$$F = 4 \pi r^2 \text{ cm}^2$$

felszínű az a felület, melyen a hő átváramlik. Stacionárius állapotban a hőáramlás egyenletes, azaz mindegyik, azonos középpontú gömbfelületen ugyanannyi hő áramlik át az időegységben:

$$-4 \pi r^2 \cdot k \frac{dT}{dr} = Q = \text{állandó.}$$

Szétfelválasztva a változókat, és a $T = 20$, $r = 10$ és $T = 200$, $r = 6$ határok között integrálva, lesz

$$4 \pi k \int_{20}^{200} dT = -Q \int_{10}^6 \frac{dr}{r^2},$$

azaz

$$Q = 10\,800 \pi k.$$

Felhasználva Q -nak ezt az értékét és a $T = 20$, $r = 10$, $T = T$, $r = r$ határok között integrálva, lesz:

$$4 \pi k (T - 20) = 10\,800 \pi k \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{10} \right),$$

azaz

$$T = \frac{2700}{r} - 250.$$

A gömbhéjon időegységben átváramló hőmennyiség:

$$Q = 10\,800 \pi k = 4750 \text{ cal/sec.}$$

16. Egy 6 gramm ként (S) tartalmazó, szilárd halmazállapotú anyagból 100 gramm benzollal akarjuk a tiszta ként kioldani. 100 gramm benzol 11 gramm ként old fel

telített állapotban, tehát a telített oldat koncentrációja: $s = \frac{11}{100} = 0,11$. Ha 50 perc alatt 3 gramm kén oldódik fel, hány gramm marad oldatlan állapotban 6 óra múlva? Feltételezzük azt, hogy állandó keveréssel biztosítjuk az oldat homogeneitását.

Jelölje x a t időpontban fel nem oldott kén grammokban kifejezett mennyiséget. Akkor $6 - x$ gramm kén lesz t időpontban oldott állapotban és az oldat koncentrációja:

$$c = \frac{6 - x}{100}.$$

Az oldódás sebessége:

$$\frac{dx}{dt} = k x (s - c),$$

ahol k arányossági tényező (oldódási állandó). Írhatjuk tehát, hogy

$$\frac{dx}{dt} = k x \left(0,11 - \frac{6 - x}{100} \right),$$

vagy a műveleteket elvégezve:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{100} x (5 + x).$$

Ha 50 perc alatt 3 gramm kén oldódik fel, akkor fennáll, hogy

$$\int_6^3 \frac{dx}{x(5+x)} = \frac{k}{100} \int_0^{50} dt.$$

Ebből

$$k = \frac{2}{5} \ln \frac{11}{16} = -0,15.$$

Ezzel az oldódási állandóval

$$\int_6^x \frac{dx}{x(5+x)} = -\frac{0,15}{100} \int_0^{360} dt,$$

ahonnan

$$x = 0,19.$$

Tehát 6 óra múlva 0,19 gramm kén marad oldatlan állapotban.

17. A gázok adiabatikus (hőközlés és hőelvonás nélküli) állapotváltozása esetén fennáll, hogy

$$p = k \varrho^n,$$

ahol p a nyomás, ϱ a sűrűség, k arányossági tényező és $n = 1,4$. Felhasználva ezt az összefüggést, valamint azt, hogy a tenger szintjén a levegő nyomása $p_0 = 10\,333 \text{ kg/m}^2$ és sűrűsége $\varrho_0 = 1,293 \text{ kg/m}^3$, határozzuk meg a légkör magasságát.

A légnyomás valamely helyen az e hely fölött elhelyezkedő légoszlop súlyából ered. Képzeljünk el 1 m^2 alapterületű légoszlopot. E légoszlop h magasságában a légnyomás egyenlő a felette levő légoszlop súlyával. Ha a h magasságot megnöveljük dh -val, akkor a légnyomás megváltozása ennek a dh magasságú légoszlopnak a súlyával egyenlő, vagyis

$$dp = -\rho dh,$$

ahol a negatív előjel arra utal, hogy a magasság és a nyomás változása ellentétes értelmű: az egyik növekedése a másik csökkenésével arányos. Behelyettesítve ebbe a differenciálegyenletbe a $p = k \rho^n$ összefüggést, lesz

$$dp = n k \rho^{n-1} d\rho,$$

azaz

$$dh = -n k \rho^{n-2} d\rho.$$

Ha H -val jelöljük a légkör magasságát, akkor ebből adódik:

$$\int_0^H dh = - \int_{\rho_0}^0 n k \rho^{n-2} d\rho,$$

vagyis

$$H = \frac{n k \rho_0^{n-1}}{n-1} = \frac{n k \rho_0^n}{(n-1) \rho_0} = \frac{n p_0}{(n-1) \rho_0}.$$

Behelyettesítve az adatokat, nyerjük, hogy

$$H = \frac{1,4 \cdot 10.333}{0,4 \cdot 1,293} \approx 28\,000 \text{ m} = 28 \text{ km}.$$

Feladatok

a) Gyakorló feladatok | Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket:

1. $(y-2) dx - (x+1) dy = 0.$
2. $(2x+1) dy - 3y dx = 0.$
3. $(y^2-1) dx - (2y+xy) dy = 0.$
4. $(x^2y+6y) dy + (xy^2-x) dx = 0.$
5. $y dx + (x+xy) dy = 0.$
6. $x dx + y dy = xy(y dx - x dy).$
7. $x \frac{dy}{dx} + y = y^2.$
8. $3x \frac{dy}{dx} = 3y + 2y^2.$
9. $2(xy+x-y-1) dx = (x^2-2x) dy.$
10. $(1+x^2) dy + (1+y^2) dx = 0.$
11. $(1-x^2) dy + (1-y^2) dx = 0.$
12. $dx - \sqrt{a^2-x^2} dy = 0.$
13. $\cos \varphi dr - r \sin \varphi d\varphi = 0.$
14. $\cos \varphi dr + 2r \sin \varphi d\varphi = 0.$
15. $2r \cos \varphi dr - \operatorname{tg} \varphi d\varphi = 0.$
16. $r \frac{dr}{dx} = \sqrt{a^4-r^4}$. Itt a = állandó.
17. $a dr - r \sqrt{r^2-a^2} d\varphi = 0$. Itt a = állandó.

18. $\frac{dy}{dx} = e^{y-x}.$
19. $e^{y-x} dx + e^{y-x} dy = 0.$
20. $(x^2 - x) y' = y^2 + y.$
21. $x y' + y^2 = 1.$
22. $(1 + y) y' = x^2 (1 - y).$
23. $e^y \left(\frac{dy}{dx} + 1 \right) = 1.$
24. $x y' + (2 x^2 - 1) \operatorname{ctg} y = 0.$
25. $2 x y (x + 1) y' = y^2 + 1.$
26. $x \sqrt{y^2 - 1} dx + y \sqrt{x^2 - 1} dy = 0.$
27. $\sqrt{1 - x^2} dy = (1 + y^2) dx.$
28. $y' + (1 - y^2) \operatorname{tg} x = 0.$
29. $x (1 - y^2) dy = (x^2 - x + 1) y dx.$
30. $x y^3 y' = 1 - x^2 + y^2 - x^2 y^2.$
31. $(x^2 + a^2) y' = (y + b) (x + \sqrt{x^2 + a^2}).$ Itt a és b állandók.
32. $x^2 (y + a)^2 (y' - 1) = y^2 - 2 a x^2 y + a^2.$ Itt $a =$ állandó.
33. $(2 y^3 + y) y' - 2 x^3 - x = 0.$
34. $x y' \cos y + \sin y = 0.$
35. $y' = (\sin \ln x + \cos \ln x + a) y.$ Itt $a =$ állandó.
36. $y' + y^2 = 1.$
37. $y' - y^2 - 3 y + 4 = 0.$
38. $y' - a x^n (y^2 + 1) = 0.$ Itt a és n állandók.
39. $y' = \sqrt{|y|}.$ (L. még a 14. kidolgozott példát is!)
40. $y' = \pm \sqrt{\frac{y^2 - 1}{x^2 - 1}}.$
41. $y' = \pm \sqrt{\frac{x^2 - 1}{y^2 - 1}}.$
42. $y' - e^{x-y} + e^x = 0.$
43. $x y' - y^2 + 1 = 0.$ (L. a 21. feladatot.)
44. $x y' = y \ln y.$
45. $x^2 y' = (x - 1) y.$
46. $(x^2 - 1) y' = 2 x y \ln y.$
47. $\sqrt{1 - x^2} y' = \pm y \sqrt{y^2 - 1}.$
48. $y' \sin 2 x + \sin 2 y = 0.$
49. $x^2 (y - 1) y' + (x - 1) y = 0.$
50. $y' \sin y \cos x + \cos y \sin x = 0.$
51. $3 y' \sin x \sin y + 5 \cos x \cos^3 y = 0.$
52. $x y dx + \sqrt{1 - x^2} dy = 0.$
53. $(x + x y^2) dy - 3 dx = 0.$
54. $\sqrt{1 - y^2} dx = \sqrt{1 + x^2} dy.$
55. $\sqrt{1 + y^2} dx - (1 - x^2) dy = 0.$
56. $\sin y dx + e^x dy = 0.$
57. $(1 + x^2) dy - \sqrt{1 - y^2} dx = 0.$
58. $(x^2 - y x^2) dy + (y^2 + x y^2) dx = 0.$
59. $(1 + y^2) x dx + (1 + x^2) dy = 0.$
60. $x y dy - (1 - y^2) dx = 0.$
61. $y (4 + 9 x^2) dy - dx = 0.$
62. $y (4 x^2 - 9) dy - 6 dx = 0.$
63. $(x^2 + 1) dy + x (y - 1) dx = 0.$
64. $(2 x + 1) dy + y^2 dx = 0.$

65. $(1 + 2y)x dx + (1 + x^2) dy = 0.$ 66. $(1 + x) dy - (1 - x) dx = 0.$
 67. $(1 + y^2) dy - y dx = 0.$ 68. $y e^{2x} dx - (1 + e^{2x}) dy = 0.$
 69. $(1 + y^2) dx + x y dy = 0.$ 70. $x y (1 + x^2) y' = 1 + y^2.$
 71. $y' = \frac{b^2 x}{a^2 y}.$ Itt a és b állandók.
 72. $y' = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$ Itt a és b állandók.
 73. $y' = \frac{y}{m},$ $m =$ állandó. 74. $\sqrt{1 + y'^2} = \frac{y}{m},$ $m =$ állandó.

Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenleteknek azt a partikuláris megoldását, mely az adott kezdeti feltételt kielégíti:

75. $\frac{x dx}{1 + y} - \frac{y dy}{1 + x} = 0;$ $y(1) = 1;$ $y(0) = 1.$
 76. $y' \sin x = y \ln y;$ $y(0) = 1.$ 77. $(1 + e^x) y y' = e^x;$ $y(1) = 1.$
 78. $x \sqrt{1 - y^2} dx + y \sqrt{1 - x^2} dy = 0;$ $y(0) = 1.$
 79. $2 \sqrt{y} dx = dy;$ $y(0) = 1.$ 80. $y \ln y dx + x dy = 0;$ $y(1) = 1.$

b) Geometriai feladatok

- Határozzuk meg mindazon görbék egyenletét, amelyeknél bármely ponthoz húzott érintőnek az érintési pont és az y tengely közti darabját felezi az érintőnek az x tengelyen levő pontja.
- Határozzuk meg mindazon görbék egyenletét, amelyeknél bármely ponthoz húzott érintőnek az érintési pont és az x tengely közti darabját felezi az érintőnek az y tengelyen levő pontja.
- Egy görbének a $P(x, y)$ pontjához tartozó normálisa az M pontban metszi az x tengelyt és az N pontban az y tengelyt. Határozzuk meg mindazon görbék egyenletét, amelyeknél N a PM távolság felezőpontja.
- Egy görbének a $P(x, y)$ pontjához tartozó normálisa az M pontban metszi az x tengelyt és az N pontban az y tengelyt. Határozzuk meg mindazon görbék egyenletét, amelyeknél P az MN távolság felezőpontja.
- Határozzuk meg annak a görbének az egyenletét, amelyeknek bármelyik pontjához tartozó normálisa átmegy az origón.
- Határozzuk meg annak a $P_0(1, 2)$ ponton keresztülmenő görbének az egyenletét, amelyiknél bármelyik ponthoz tartozó érintő és az érintési pontot az origóval összekötő egyenes egy olyan egyenlő szárú háromszöget alkot, amelyiknek az alapoldala rajta van az x tengelyen.
- Határozzuk meg annak a $P_1(3, 1)$ és $P_2(-1, 3)$ pontokon keresztülmenő görbének az egyenletét, amelyiknek bármelyik pontjához tartozó szubnormálisa $k =$ állandó.

8. Határozzuk meg annak a $P_0(2,1)$ ponton átmenő görbének az egyenletét, amelyiknek bármelyik pontjához tartozó szubtangense $k = \text{állandó}$.
9. Határozzuk meg annak a $P_0(-2,3)$ ponton átmenő görbének az egyenletét, amelyiknek bármely $P(x, y)$ pontjához tartozó normálisa és a P pontot az origóval összekötő egyenes egy olyan egyenlő szárú háromszöget alkot, amelyiknek az alapoldala rajta van az x tengelyen.
10. Határozzuk meg annak a $P_1(0,4)$ és $P_2(1,2)$ pontokon átmenő görbének az egyenletét, amelyiknek bármely pontjához tartozó érintője, ordinátája és az x tengely által bezárt háromszög területe $k = \text{állandó}$.
11. Határozzuk meg annak a $P_1(0,0)$ és $P_2(2,8)$ pontokon átmenő görbének az egyenletét, amelyiknek $P(x, y)$ pontjához tartozó normálisa, az y tengely és a P -n keresztül, x tengellyel párhuzamos egyenes által bezárt háromszög területe állandó.
12. Határozzuk meg mindazon görbék egyenletét, amelyeknek bármelyik $P(x, y)$ pontjához tartozó ordináta, az x tengely és az OP egyenes által bezárt háromszög hasonló a P ponthoz tartozó érintő, ordináta és az x tengely által bezárt háromszöghöz.
13. Határozzuk meg azoknak a görbéknek az egyenletét, amelyeknél bármelyik görbeponthoz tartozó normálisnak a görbe pontja és az x tengely közti darabja $k = \text{állandó}$.
14. Határozzuk meg azoknak a görbéknek az egyenletét, amelyeknél az érintőnek a koordináta-tengelyek közti szakaszát az érintési pont $m : n$ arányban osztja.
15. Polárkoordinátákat alkalmazva, határozzuk meg azokat a görbéket, amelyek az összes rádiuszvektorokat α szög alatt metszik, ahol $\operatorname{tg} \alpha = a$.
16. Határozzuk meg azokat a görbéket, amelyeknél a polártengely és a rádiuszvektor közötti φ szög egyenlő a rádiuszvektor meghosszabbítása és az érintő közötti ω szöggel.
17. Az előbbi feladat, azonban $\omega = 2\varphi$.
18. Határozzuk meg annak a görbének az egyenletét, amelyiknél egy rögzített és egy változó ordináta között a görbe alatti terület arányos a két szélső ordináta különbségével.
19. Határozzuk meg annak a görbének az egyenletét polárkoordinátákban, amelyiknél két rádiuszvektor és e kettő közti görbeív által bezárt szektorszerű síkrész területe arányos a két rádiuszvektor különbségével.
20. Határozzuk meg azoknak a görbéknek az egyenletét, amelyeknél az ívhossz arányos azzal a szöggel, amely alatt ez látszik az origóból.
21. Határozzuk meg annak a görbének az egyenletét, amelynél az ívhossz arányos az ívhossz két végpontjához húzott rádiuszvektorok különbségével.
22. Határozzuk meg azoknak a görbéknek az egyenletét, amelyeknél két rádiuszvektor és e kettő közti görbeív által bezárt szektorszerű síkrész területe arányos a görbének a két szóban forgó rádiuszvektor közti ívhosszával.
23. Egy görbe tetszőleges pontján keresztül, a koordináta-tengelyekkel párhuzamos egyeneseket húzunk. E két egyenes és a tengelyek egy derékszögű négyszöget alkotnak. A görbe az origón megy keresztül és minden ilyen derékszögű négyszöget két olyan részre oszt, melyek területei úgy arányosak egymáshoz, mint $1 : 2$. Határozzuk meg a görbe egyenletét.

24. Egy forgásfelületből két, a forgástengelyre merőleges sík egy övet vág ki. Melyik az a felület, amelyiknél bármelyik ilyen öv felszíne arányos a két sík távolságával?

25. Az $y = f(x)$ egyenletű görbét megforgatjuk az x tengely körül: egy forgásfelület keletkezik. Két, az x tengelyre merőleges sík és a forgásfelületnek e két sík közötti darabja egy forgástestet határolnak. Határozzuk meg a görbe egyenletét úgy, hogy a forgástest térfogata arányos legyen a palástjának felszínével.

c) Fizikai feladatok

1. Legyen egy elektromossággal töltött felület, amely a pillanatnyi töltéssel arányos sebességgel veszíti el a töltését. Határozzuk meg a töltést mint az idő függvényét.

2. Egy folyadékcsepp a felszínével arányos sebességgel párolog el. Határozzuk meg a gömb alakú folyadékcsepp sugarát mint az idő függvényét.

3. A Newton-féle lehűlési törvény szerint egy test lehűlési sebessége arányos a test és a hűtő közeg közötti hőmérsékletkülönbséggel. Ha a hűtő közeg hőmérséklete 20°C és a test 10 perc alatt 100°C -ról 60°C -ra hűl le, hány perc múlva lesz a hőmérséklete 25°C ?

4. Legyen egy T_0 abszolút hőmérsékletű közegben elhelyezett, állandó fajhőjű test, amelyik csak sugárzással veszíti a hőmérsékletéből. A hőmérsékletcsökkenés sebessége

$$k(T - T_0),$$

ahol k arányossági tényező és T a test abszolút hőmérséklete. Határozzuk meg azt a t időt, amely szükséges ahhoz, hogy a test hőmérséklete a végtelenről T -re csökkenjen.

5. Egy vízzel telt, függőleges tengelyű, hengeres tartály alaplapján van egy szűk nyílás. Feltételezve azt, hogy a kifolyás sebessége arányos a víznyomással és azt, hogy az első napon az eredeti vízmennyiség 10%-a folyik ki, határozzuk meg, hogy mennyi idő szükséges ahhoz, hogy a tartály félig kiürüljön.

6. Egy 2 m magasságú, 1 m^2 alapterületű, négyzetes hasáb alakú tartályból a víz egy, az alaplapján levő, 4 cm átmérőjű, kör alakú nyíláson át folyik ki. Határozzuk meg azt az időt, ami a tartály kiürüléséhez szükséges.

7. Egy 1,5 m átmérőjű, 4 m magasságú, függőleges helyzetű, egyenes körhenger alakú, vízzel telt tartályból egy, az alaplapján levő 10 cm átmérőjű kör alakú nyíláson át folyik ki a víz. Mennyi idő alatt ürül ki?

8. Egy csonkakúp alakú tölcser, melynek felső nyílása 10 cm átmérőjű, alsó nyílása 1 cm átmérőjű, 10 cm magasságig van vízzel töltve. Határozzuk meg azt az időt, ami alatt a víz kifolyik.

9. Egy téglafal (hővezetési tényezője: $k = 0,0012\text{ cal/cm sec }^\circ\text{C}$) vastagsága 30 cm. Ha a fal egyik oldalán a hőmérséklet 20°C , a másik oldalán 0°C , határozzuk meg a fal belső hőmérsékletét mint a fal 0°C hőmérsékletű oldalától mért távolság függvényét. Határozzuk meg a naponkénti hővesztiséget a fal 1 m^2 -nyi felületére vonatkoztatva.

10. Egy 20 cm átmérőjű hengeres gőzvezeték hőszigetelését egy 10 cm vastagságú magnéziáretéggel (hővezetési tényezője: $k = 0,00018\text{ cal/cm sec }^\circ\text{C}$) oldjuk meg.

A környezet hőmérséklete $30\text{ }^{\circ}\text{C}$ és a szállított gőz hőmérséklete $160\text{ }^{\circ}\text{C}$. Határozzuk meg a szigetelőrétegben uralkodó hőmérsékletet mint a sugárirányú távolság függvényét. Határozzuk meg az 1 m hosszúságú csővezeték 1 nap alatti hőveszteségét.

11. Egy 20 cm átmérőjű hengeres gőzvezeték hőszigetelését egy 5 cm vastagságú magnéziaréteggel ($k = 0,00018\text{ cal/cm sec }^{\circ}\text{C}$) és egy erre ráhelyezett, ugyancsak 5 cm vastagságú betonréteggel ($k = 0,00020\text{ cal/cm sec }^{\circ}\text{C}$) oldjuk meg. A környezet hőmérséklete $30\text{ }^{\circ}\text{C}$ és a szállított gőz hőmérséklete $160\text{ }^{\circ}\text{C}$. Határozzuk meg az 1 m hosszúságú csővezeték 1 nap alatti hőveszteségét.

12. Egy hengeres áramvezető tekercs tengelyirányú, 1 cm hosszúságú darabjának az ellenállása $0,1\text{ ohm}$. A tekercs be van ágyazva egy $0,5\text{ cm}$ belső és 1 cm külső sugarú, hengeres cementcsőbe. 5 amper erősségű áram folyik a tekercsen át és ez a cementcső belső és külső fala között $125\text{ }^{\circ}\text{C}$ hőmérsékletkülönbséget idéz elő. Határozzuk meg a cement hővezetési együtthatóját ($k\text{ cal/cm sec }^{\circ}\text{C}$). Vegyük figyelembe, hogy 1 amper erősségű áram az $R\text{ ohm}$ ellenálláson átfolyva $Q = 0,239 R I^2\text{ cal/sec}$ hőmennyiséget fejleszt.

13. Egy a sugarú, gömb alakú sötömböt behelyezünk egy végtelen kiterjedésű folyadékfürdőbe, amely a söt oldja. Határozzuk meg — stacionárius állapotban — az oldat koncentrációját mint a gömb középpontjától mért távolság függvényét, feltételezve azt, hogy az oldat s telítettségi koncentrációjú a gömb felületén és a végtelenben 0 a koncentráció.

14. Az r_1 sugarú áramvezető kábelt egy r_2 sugarú ólomköpeny veszi körül úgy, hogy a kettő közötti teret κ vezetőképes szigetelőanyag tölti ki. Ha a vezető mag és a köpeny közt E a potenciálkülönbség, határozzuk meg a kábel hosszegységére eső áramveszteséget.

15. Ha a víz megfagy, akkor minden cm^3 képződött jéggel egyidejűleg körülbelül 73 cal hőmennyiség szabadul fel. Ha a fagyás gyors, akkor a fagyás sebességét főleg az határozza meg, hogy a már megfagyott jégréteg vízzel érintkező felületén a fagyás következtében felszabaduló hőmennyiséget milyen gyorsan vezeti a jégréteg és adja át a levegőnek. Feltételezve azt, hogy a jég hővezetési tényezője $k = 0,005\text{ cal/cm sec }^{\circ}\text{C}$, és azt, hogy a jégréteg felső felületén a hőmérséklet $T\text{ }^{\circ}\text{C}$, az alsó felületén pedig $0\text{ }^{\circ}\text{C}$, határozzuk meg a képződött jégréteg vastagságát mint a t (órákban mért) idő függvényét, az időt a fagyás kezdetétől számítva.

16. Egy r_1 belső és r_2 külső sugarú, k hővezetési együtthatójú csővezetékben T hőmérsékletű víz van. A hő átáramlik a cső falán és melegíti a környezetet. Newton törvénye szerint a cső felületegységére vonatkoztatott hőveszteség sebessége arányos a $T_1 - T_0$ hőmérsékletkülönbséggel (T_1 a cső külső falának, T_0 a környezetnek a hőmérséklete; az arányossági tényező legyen: a). Stacionárius állapotban határozzuk meg a csővezeték hosszegységére vonatkoztatott hőveszteséget mint T és T_0 függvényét.

17. Tegyük fel, hogy az előző feladatban szereplő víz v sebességgel áramlik a csővezetékben. Megengedve a hővezetést a cső falán át és a hőátadást a folyadék áramlása folytán, de elhanyagolva az amúgy is csekély hővezetést magában az áramló folyadékban és a csőben, a cső hossz tengelyének irányában, határozzuk meg a víz hőmérsékletét, mint a cső hosszirányában mért távolság függvényét.

18. P súlyt ráakasztunk egy rugalmas húrra, melynek eredeti hossza l és saját súlya q . Határozzuk meg a húr hosszának megnyúlását.

19. Miközben a fény áthalad egy közegen, az elnyelt fénymennyiség arányos a közeg határára érkező fényerősséggel és a közegben megtett úttal. Ha 3 m vastagságú vízrétegben elnyelődik a beeső fénymennyiség egyharmada, mennyi nyelődne el egy 18 m vastagságú rétegben?

20. Egy folyadék gőze nyomásának értékváltozási sebessége a folyadék hőmérsékletére vonatkoztatva egyenesen arányos a gőz nyomásával és fordítva arányos a folyadék hőmérsékletének négyzetével. Ha a vízgőz nyomása 4,58 Hg. mm 0 °C hőmérsékleten és 31,8 Hg. mm 30 °C hőmérsékleten, határozzuk meg a vízgőz nyomását a hőmérséklet függvényében.

21. Tegyük fel, hogy a ködrétegen keresztülhaladó esőcsepp megtartja gömb alakját, de megnövekszik azáltal, hogy a ködréteg páratartalma lecsapódik rá. Határozzuk meg a sugarát mint a ködrétegben megtett út függvényét.

22. Egy szivacsos anyag úgy szárad meg, hogy a száradás sebessége arányos a pillanatnyi nedvességtartalmával, továbbá a környező levegő pillanatnyi páratartalmának és a páratelt levegő páratartalmának a különbségével. Helyezzünk el egy 50 m³ térfogatú szobában egy 1 kg nedvességtartalmú szivacsos anyagot. Legyen e pillanatban a levegő relatív páratartalma 25%. Tegyük fel, hogy telített állapotban, az adott hőmérsékleten 1 m³ levegő tartalmaz 24 gramm vízgőzt. Ha szellőztetéssel a levegő páratartalmát állandóan 25%-on tartjuk, és egy óra alatt az anyag elveszti nedvességtartalmának a felét, hány óra szükséges ahhoz, hogy elveszítse nedvességtartalmának a 90%-át?

23. Ha az előző feladatban a szobát zártnak képzeljük, akkor a levegő nedvességtartalma annyiival növekszik, amennyi víz a szobában elhelyezett anyagból elpárolog. Ilyen körülmények között mennyi nedvességet veszít a kérdéses anyag egy óra alatt?

24. Tegyük fel, hogy radioaktív sugárzás hatására egy gáz molekulái szétbomlanak egyenlő számú pozitív és negatív töltésű ionokra úgy, hogy a részecskék képződésének sebessége arányos a sugárzás intenzitásával. Ezek a pozitív és negatív töltésű ionok újraegyesülnek, semleges töltésű atomokká úgy, hogy ennek az egyesülésnek a sebessége arányos a kétféle részecskék sűrűségeinek szorzatával. Feltételezve azt, hogy a sugárzás intenzitása állandó, határozzuk meg a pozitív ionok sűrűségét mint az idő függvényét.

25. Határozzuk meg azt, hogy milyen alakú az a tükörfelület, amelyik egy fix pontból kiinduló fénysugarakat egy adott egyenessel párhuzamosan veri vissza. Válasszuk a fix pontot a koordináta-rendszer kezdőpontjának, és legyen a visszavert fénysugarak iránya az x tengely. Legyen r a függő változó és x a független változó.

26. Egy bizonyos tükrös távcsőben az egy fix pontba tartó fénysugarakat egy tükör veri vissza egy másik pontba. Határozzuk meg a tükör alakját.

27. Határozzuk meg a tengerszint feletti h magasságban a levegő nyomását, feltételezve, hogy a p nyomású levegő sűrűsége

$$\rho = k p \text{ kg/cm}^3,$$

és hogy a tenger szintjén a levegő nyomása $p_0 = 1,033 \text{ kg/cm}^2$.

28. Egy forgásfelület alakú tükör az $r = f(\varphi)$ egyenletű görbének a polártengely körüli megforgatása által származik. Határozzuk meg az $r = f(\varphi)$ egyenletet úgy, hogy a kezdőpontból kiinduló fénysugarakat a tükör a fénysugárra merőlegesen verje vissza.

29. Newton törvénye szerint a Föld középpontjától r távolságra levő P kg súlyú testre ható gravitációs erő: $\frac{PR^2}{r^2}$; ahol R a Föld sugara. A Boyle—Mariotte-törvényt figyelembe véve, továbbá számításba véve a gravitációs erő változását a távolsággal, határozzuk meg a levegő nyomását a Föld középpontjától r távolságra.

30. Egy folyadékkal töltött hengeres edény a tengelye körül ω szögsebességgel forog. Ha a tengely függőleges, a henger sugara a és p_0 a tengely egy megadott pontjában a nyomás, határozzuk meg a nyomást a tengelyen levő adott ponttól sugárirányban, r távolságra. Vegyünk fel a tengelytől r távolságra egy dV térfogatelemet és vegyük figyelembe, hogy ez a térfogatelem egyensúlyban van a felületére ható nyomás és a centrifugális erő hatására.

31. Egy gázzal töltött hengeres edény a tengelye körül ω szögsebességgel forog. Figyelembe véve a Boyle—Mariotte-törvényt:

$$p = k \rho,$$

ahol p a nyomás, ρ a sűrűség, k arányossági tényező; keressük meg a nyomás és a tengelytől mért r távolság közötti összefüggést.

32. Ha a sebesség nagy, akkor a centrifugális erő csökkenti azt az erőt, mellyel a szíj rászorul a szíjtárcsára. Feltéve, hogy a szíj egységnyi hosszúságú darabjának a súlya q kg/m és v a sebessége, határozzuk meg azt, hogy milyen összefüggés van a szíj két azon pontjában ébredő feszültségek között, melyekben a szíj a tárcsát érinti.

33. Egy időmérésre használt régi vízióra egy vízzel telt edényből áll, melynek az alján nyílás van. A víz ezen folyik ki lassan. Az edényt olyan alakúra készítették, hogy a víz szintje egyenletesen süllyedjen. Határozzuk meg az edény vízszintes keresztmetszetének területét a nyílástól mért magasság függvényében.

34. Egy folyadékkal telt hengeres edény ω = állandó szögsebességgel forog a hengeres edény tengelye körül. Határozzuk meg a folyadék szabad felszínének alakját. Vegyük figyelembe, hogy a folyadékfelszínen levő vírzészecskékre ható súlyerő és centrifugális erő eredője merőleges a szabad felszínre.

35. Egy pontszerű fényforrástól r távolságra a megvilágítás erőssége

$$\frac{k \cos \vartheta}{r^2},$$

egy olyan felületen, melynek a normálisa ϑ szöget zár be r -rel. Határozzuk meg azt a forgásfelületet, melynek minden pontjában a megvilágítás erőssége ugyanakkora, ha a fényforrás a forgástengely egyik pontja.

d) Vegyes feladatok

1. Egy élesztőgomba-tenyészetben az aktív fermentum mennyisége a pillanatnyi mennyiséggel arányosan növekszik. Ha 1 óra alatt ez a mennyiség megkétszereződik, hányszorosa lesz a jelenleginek 3,5 óra múlva?

2. Egy vegyi folyamatban A anyag átalakul B anyaggá úgy, hogy az átalakulás sebessége arányos a pillanatnyi, még át nem alakult A anyag mennyiségével. Ha egy

óra múlva ez az átalakulatlan mennyiség 48 gramm és 3 óra múlva 12 gramm, akkor mennyi volt a kiindulási anyagmennyiség?

3. Egy 100 literes tartály tele van tiszta vízzel. Az egyik oldalon literenként 0,2 kg söt oldott állapotban tartalmazó oldat folyik be, 3 l/perc sebességgel, és a keverék ugyanakkora sebességgel folyik ki a másik oldalon. Határozzuk meg azt, hogy hány kg só lesz oldott állapotban 1 óra múlva a tartályban. Tegyük fel azt, hogy állandó keveréssel biztosítjuk a keverék homogeneitását.

4. Egy tartály 1000 liter sóval telített oldatot tartalmaz (0,3 kg/liter a koncentrációja). Ezt az oldatot úgy hígítjuk, hogy 20 l/perc sebességgel 0,1 kg/l koncentrációjú oldatot bocsátunk bele. Feltételezve azt, hogy a keverék ugyanakkora sebességgel folyik el, határozzuk meg azt, hogy mennyi idő múlva lesz a keverék koncentrációja 0,101 kg/liter. Tegyük fel azt, hogy állandó keveréssel biztosítjuk a keverék homogeneitását.

5. Egy tartályban 100 liter oldat van, melynek sötartalma 7,5 kg. Az egyik oldalon, 3 liter/perc sebességgel tiszta víz folyik be, és a másik oldalon 2 liter/perc sebességgel folyik ki a keverék. Mennyi só lesz a tartályban 1,5 óra múlva? Állandó keveréssel biztosítjuk a keverék homogeneitását.

6. Egy levegővel teli 1 liter űrtartalmú tartályba egy csövön át oxigén áramlik be és a levegő-oxigén keverék egy másik csövön át áramlik ki a tartályból. Ha az áramlás elég lassú ahhoz, hogy feltételezhetjük azt, hogy a tartályban levő levegő-oxigén keverék homogén, hány százalék oxigén lesz a tartályban, miután 5 liter áramlott át? (Vegyünk figyelembe azt, hogy a levegő 21% oxigént tartalmaz.)

7. Ha egy ember átlagosan 20-szor lélegzik percenként, minden egyes kilégzésnél 1,64 dm³, 4% CO₂-t tartalmazó használt levegőt lélegezve ki, határozzuk meg egy terem százalékos CO₂ tartalmát 1 órával azután, hogy 30 személy lépett be, feltételezve azt, hogy a belépéskor a levegő tiszta volt, és a terem szellőztetői percenként 28,32 m³ tiszta levegő beáramlását teszik lehetővé. Legyen a terem térfogata 283,2 m³. A tiszta levegő CO₂ tartalma 0,04%.

8. Egy nem oldódó anyag pórusaiban 2,72-kg só van lerakódva. Belehelyezzük ezt 45,43 l vízbe. 5 perc alatt feloldódik 0,91 kg só. Mennyi idő alatt oldódik fel a só-mennyiség 99%-a? Vegyük figyelembe, hogy a telített oldat koncentrációja 0,3 kg/l, és hogy állandó keveréssel biztosítjuk az oldat homogeneitását.

9. Egy nem oldódó anyag pórusaiban 13,6 kg só van lerakódva. 90,86 liter vízben 1 óra alatt feloldódik a sómennyiség fele. Mennyi só oldódna fel ugyanannyi idő alatt, ha kétszer annyi vizet használnánk fel? Vegyük figyelembe, hogy a telített oldat koncentrációja 0,3 kg/l, és hogy állandó keverés biztosítja az oldat homogeneitását.

10. Valamely kémiai reakció alkalmával az A és B anyag egy-egy molekulájának egyesüléséből létrejön a C anyag egy molekulája. A C anyag képződésének sebessége arányos a pillanatnyi A és B anyagmennyiséggel. Tegyük fel, hogy a reakció kezdetén A -ból volt a gramm-molekulasúlynyi és B -ből b . Határozzuk meg C mennyiségét a t időpontban.

2. §. Szétválasztható változójúra visszavezethető differenciálegyenletek

$$a) y' = f(ax + by + c),$$

$$\text{ahol } a \neq 0, b \neq 0$$

Új ismeretlen függvényt vezetünk be:

$$u(x) = ax + by(x) + c.$$

Ekkor

$$u' = \frac{du}{dx} = a + by',$$

vagyis

$$u' = a + bf(u).$$

Ez pedig az $u = u(x)$ ismeretlen függvényre egy szétválasztható változójú differenciálegyenlet. Feltételezve, hogy az $r < u < s$, vagyis az $r < ax + by + c < s$ intervallumban $a + bf(u)$ folytonos és sehol sem zérus, ennek a differenciálegyenletnek az általános megoldása:

$$x = \int \frac{du}{a + bf(u)} + C, \text{ ahol } u = ax + by + c.$$

Legyen már most $a + bf(u)$ folytonos, azonban a $\rho \leq u \leq \sigma$, vagyis a $\rho \leq ax + by + c \leq \sigma$ intervallum egyetlen $u = v$ (azaz $ax + by + c = v$) értékénél váljék zérussá, azaz legyen $a + bf(v) = 0$. A differenciálegyenletnek a fenti általános megoldásától különböző megoldása:

$$u = v, \text{ azaz } ax + by + c = v, \text{ ha } a + bf(v) = 0.$$

Hogy ez a megoldás vajon reguláris vagy szinguláris-e, arra nézve a következőt mondhatjuk:

1. Ha az $\int_{u_0}^u \frac{du}{a + bf(u)}$ integrál $u \rightarrow v$ esetén divergens, akkor az $u = v$ megoldás reguláris (közönséges).

2. Ha az $\int_{u_0}^u \frac{du}{a + bf(u)}$ integrál $u \rightarrow v$ esetén konvergens, akkor az $u = v$ megoldás szinguláris.

b) Homogén (fokszámú) differenciálegyenlet:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

ahol $x \neq 0$

Új ismeretlen függvényt vezetünk be:

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}$$

Ekkor

$$y(x) = x \cdot u(x),$$

azaz

$$y' = x \cdot u' + u.$$

Ezt behelyettesítve a differenciálegyenletbe:

$$x u' = f(u) - u.$$

Ez pedig az $u = u(x)$ ismeretlen függvényre egy szétválasztható változójú differenciálegyenlet. Feltételezve, hogy az $r < u < s$, vagyis az $r < \frac{y}{x} < s$ intervallumban és $x \neq 0$ mellett $f(u) - u$ folytonos és sehol sem zérus, ennek a differenciálegyenletnek az általános megoldása:

$$\ln |x| = \int \frac{du}{f(u) - u} + C, \text{ ahol } u = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0.$$

Legyen már most $f(u) - u$ folytonos, azonban a $\varrho \leq u \leq \sigma$, vagyis a $\varrho \leq \frac{y}{x} \leq \sigma$ intervallum egyetlen $u = v$ (azaz $\frac{y}{x} = v$) értékénél váljék zérussá, $x \neq 0$ mellett, azaz legyen $f(v) - v = 0$. A differenciálegyenletnek a fenti általános megoldásától különböző megoldása:

$$u = v, \text{ azaz } \frac{y}{x} = v, \text{ ha } f(v) - v = 0, \quad x \neq 0.$$

Hogy ez a megoldás vajon reguláris-e vagy szinguláris-e, arra nézve a következőt mondhatjuk:

1. Ha az $\int_{u_0}^v \frac{du}{f(u) - u}$ integrál $u \rightarrow v$ esetén divergens, akkor az $u = v$ megoldás reguláris (közönséges).

2. Ha az $\int_{u_0}^v \frac{du}{f(u) - u}$ integrál $u \rightarrow v$ esetén konvergens, akkor az $u = v$ megoldás szinguláris.

M e g j e g y z é s. 1. Ha $f(u) - u \equiv 0$, akkor a differenciálegyenlet

$$y' = \frac{y}{x}$$

alakú, és ebben a változók szétválaszthatók.

2. Legyen $P(x, y)$ és $Q(x, y)$ két azonos fokszámú, homogén függvény, azaz

$$P(tx, ty) = t^n P(x, y).$$

és

$$Q(tx, ty) = t^n Q(x, y),$$

akkor a

$$P(x, y) + Q(x, y) y' = 0$$

differeciállegyenlet homogén (fokszámú) és visszavezethető az

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

alakra. E célból végig kell osztani a differenciállegyenletet x^n -nel, s akkor

$$P\left(1, \frac{y}{x}\right) + Q\left(1, \frac{y}{x}\right) y' = 0,$$

ahonnan valóban

$$y' = - \frac{P\left(1, \frac{y}{x}\right)}{Q\left(1, \frac{y}{x}\right)} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Itt persze $x \neq 0$ mellett még azt is feltételezzük, hogy $Q\left(1, \frac{y}{x}\right) \neq 0$.

c) $y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right)$ Ennél a differenciállegyenletnél két esetet különböztetünk meg:

$$1. \quad \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = a\beta - \alpha b \neq 0.$$

Ha speciálisan $c = \gamma = 0$ volna, akkor differenciállegyenletünk homogén (fokszámú) volna. Geometriailag a $c = \gamma = 0$ feltétel azt jelenti, hogy az

$$ax + by + c = 0$$

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

egyeneseknek az origó a közös pontja.

Általánosságban az

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \neq 0$$

feltétel azt biztosítja, hogy az

$$ax + by + c = 0,$$

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

egyeneseknek van egy (és csakis egy) közös pontja. Mármint a koordináta-rendszernek önmagával párhuzamos, alkalmas mértékű eltolásával elérhető az, hogy a két egyenes közös pontja az eltolt koordináta-rendszer kezdőpontja legyen. Ezzel az analitikailag is egyszerűen kivitelezhető transzformációval a differenciállegyenlet visszavezethető homogén (fokszámú) differenciállegyenletre.

Ha tehát a p és q számokat meghatározzuk úgy, hogy ezekkel

$$ap + bq + c = 0,$$

$$\alpha p + \beta q + \gamma = 0$$

legyen, akkor minden $y = y(x)$ differenciálható függvényhez az

$$x = u + p, \quad y = v + q$$

transzformáció, egyértelműen hozzárendel egy differenciálható $v = v(u)$ függvényt, amelynek deriváltja:

$$\frac{dv}{du} = \frac{dy}{dx}.$$

Ha tehát $y = y(x)$ az adott differenciálegyenlet megoldása, akkor $v = v(u)$ a

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{au + bv}{\alpha u + \beta v}\right), \quad u \neq 0$$

homogén (fokszámú) differenciálegyenletnek megoldása, és megfordítva a $v = v(u)$ megoldásai ennek a homogén (fokszámú) differenciálegyenletnek, az $x = u + p$ $y = v + q$ transzformáció alapján meghatározzák az eredeti differenciálegyenletnek a megoldását.

$$2. \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = a\beta - b\alpha = 0, \text{ azaz } \frac{a}{\alpha} = \frac{b}{\beta} = \lambda.$$

Feltehetjük még azt is, hogy $b^2 + \beta^2 \neq 0$, tehát $b \neq 0, \beta \neq 0$, mert különben y' csak x -től függene, és így a differenciálegyenlet azonnal, kvadraturával megoldható volna vagy pedig a már tárgyalt $y' = f(ax + by + c)$ esettel volna dolgunk.

A mondott feltételekből következik továbbá az is, hogy

$$ax + by = \lambda(\alpha x + \beta y).$$

Ha tehát az $y = y(x)$ differenciálható függvény az adott differenciálegyenletnek megoldása, akkor a

$$v(x) = \alpha x + \beta y(x)$$

differenciálható függvény, — melynek deriváltja:

$$\frac{dv}{dx} = \alpha + \beta y' = \alpha + \beta f\left(\frac{\lambda v + c}{v + \gamma}\right), \quad -$$

megoldása a szétválasztható változójú

$$\frac{dv}{dx} = \alpha + \beta f\left(\frac{\lambda v + c}{v + \gamma}\right)$$

differenciálegyenletnek, és megfordítva, ennek a szétválasztható változójú differenciálegyenletnek minden $v = v(x)$ megoldása, a $v(x) = \alpha x + \beta y(x)$ transzformáció alapján meghatározza az eredeti differenciálegyenletnek a megoldásait.

d) Homogén „dimenziójú” differenciálegyenletek

Bizonyos esetekben a differenciálegyenletet visszavezethetjük szétválasztható változójúra, ha a

$$v(x) = \frac{y(x)}{x^n} \quad (n \text{ racionális szám})$$

új ismeretlen függvényt vezetjük be. Ez sikerül akkor, ha a

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

(ahol P és Q argumentumaik racionális egész függvényei) differenciálegyenletben szereplő összes tagok azonos „dimenziójúak”. Itt az egyes tagok „dimenzióját” a következőképpen értelmezzük: x -nek és dx -nek dimenziójául 1-et választjuk, y és dy dimenziójául pedig n -et. Ezzel a választással x^α dimenziója α , y^β dimenziója $n\beta$, $x^\alpha dx$ dimenziója $\alpha + 1$, $y^\beta dy$ dimenziója $(\beta + 1)n$ és általában $a_k x^\alpha y^\beta dx$ dimenziója $\alpha + 1 + \beta n$, valamint $a_k x^\alpha y^\beta dy$ dimenziója $\alpha + (\beta + 1)n$.

A fenti értelmezés szerint meghatározzuk mindegyik tag dimenzióját és két-két dimenziószám egyenlőségéből n értékét. Ellenőrzésül szolgál, hogy az így meghatározott n -nel mindegyik tag dimenziója ugyanaz adódik. Ellenkező esetben a transzformáció nem alkalmazható.

Ha $n = \frac{p}{q}$ (racionális szám), akkor a tört kitevőt elkerülhetjük azáltal, hogy új

ismeretlen függvénynek $v(x) = \frac{y(x)}{x^n}$ helyett a $v(x) = \frac{[y(x)]^q}{x^p}$ függvényt választjuk.

A transzformációban szereplő v dimenziója mindig 0.

A b) pont alatt tárgyalt homogén (fokszámú) differenciálegyenlet ennek az a speciális esete, amikor $n = 1$.

M e g j e g y z é s. A fentivel azonos eredményre jutunk, ha az

$$x = e^u, \quad y = x^n v = v e^{nu}$$

transzformációval új változókat vezetünk be. Ekkor

$$y' = \left(\frac{dv}{du} + n v \right) e^{(n-1)u}.$$

P é l d á k

1. Oldjuk meg az

$$y' = x + y$$

differenciálegyenletet.

Új ismeretlen függvényt vezetünk be:

Ezzel

$$u = x + y,$$

vagyis

$$u' = 1 + y',$$

vagy másképpen írva:

$$u' = u + 1,$$

$$\frac{du}{dx} = u + 1.$$

Feltételezve azt, hogy $u \neq -1$, a változókat szétválaszthatjuk:

$$\frac{du}{u+1} = dx;$$

s ebből az általános megoldás:

$$\ln |u+1| = x + \ln |C| \quad (C \neq 0),$$

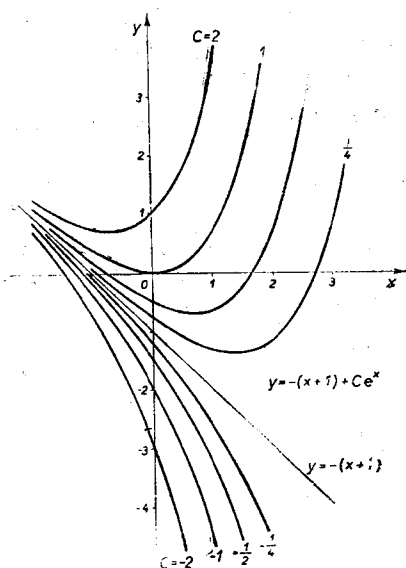
vagy

$$u+1 = C e^x.$$

Visszaírva az eredeti változókat:

$$y = -(x+1) + C e^x.$$

A differenciálegyenletnek közönséges (reguláris) megoldását szolgáltatja



18. ábra

azaz $u = -1$,
 $y = -(x+1)$
 is.

Tehát a differenciálegyenletnek összes megoldásai:

$$y = -(x+1) + C e^x$$

alakban írhatók le, ahol a C integrálási állandó bármilyen értéket felvehet.

(A differenciálegyenlet integrálgörbéit l. a 18. ábrán.)

2. Oldjuk meg az

$$y' = -\left(1 + \frac{y}{x}\right)$$

differenciálegyenletet.

Új ismeretlen függvényt vezetünk be:

$$u = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0.$$

Ebből

$$y = u x,$$

$$y' = u'x + u.$$

$$u'x + u = -1 - u,$$

vagyis

Ezzel

vagy rendezve

$$x \frac{du}{dx} = -1 - 2u.$$

A változókat szétválasztva $\left(u = \frac{y}{x} \neq -\frac{1}{2}\right)$:

$$\frac{2 du}{1 + 2u} = -2 \frac{dx}{x}.$$

Ebből, integrálással adódik:

$$\ln |1 + 2u| = \ln |C| - \ln x^2$$

$(C \neq 0),$

vagy

$$1 + 2u = \frac{C}{x^2}.$$

Visszaírva az eredeti változókat:

$$1 + 2\frac{y}{x} = \frac{C}{x^2},$$

vagy

$$x^2 + 2xy = C,$$

s ebből

$$y = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}$$

a differenciálegyenlet általános megoldása.

A differenciálegyenletnek reguláris (közönséges) megoldását szolgáltatja

$$u = -\frac{1}{2},$$

azaz

$$y = -\frac{x}{2}$$

is.

Tehát a C integrálási állandónak tetszőleges értéket megengedve ($C = 0$ értéket is), a differenciálegyenlet összes megoldásai:

$$y = \frac{C}{x} - \frac{x}{2}.$$

(A differenciálegyenlet integrálgörbéit l. a 19. ábrán.)

3. Oldjuk meg az

$$x^3 + y^3 - x y^2 y' = 0$$

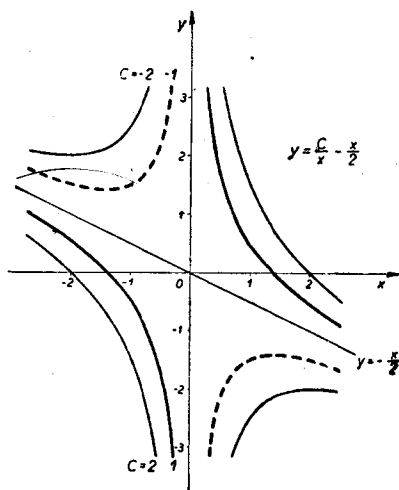
differenciálegyenletet.

Az itt szereplő

$$P(x, y) = x^3 + y^3$$

és

$$Q(x, y) = -x y^2$$



19. ábra

függvények homogén harmadfokú függvények, mert

$$P(t x, t y) = t^3 x^3 + t^3 y^3 = t^3 (x^3 + y^3) = t^3 P(x, y)$$

és

$$Q(t x, t y) = -t x \cdot t^2 y^2 = t^3 (-x y^2) = t^3 Q(x, y).$$

Feltételezve tehát azt, hogy $x \neq 0$, végigosztunk x^3 -al:

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 - \left(\frac{y}{x}\right)^2 y' = 0.$$

Új ismeretlen függvényt vezetünk be:

$$u = \frac{y}{x},$$

s ezzel

$$y' = u'x + u.$$

Behelyettesítve:

$$1 + u^3 - u^2 (u'x + u) = 0,$$

vagy

$$x u^2 u' = 1.$$

A változókat szétválasztjuk:

$$u^2 du = \frac{dx}{x},$$

s innen, integrálással:

$$\frac{u^3}{3} = \ln |x| + C_1,$$

vagy

$$u = \sqrt[3]{\ln |x^3| + C}.$$

Visszaírva az eredeti változókat, a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = x \sqrt[3]{\ln |x^3| + C}.$$

4. Oldjuk meg az

$$y' = \frac{4x - y + 7}{2x + y - 1}$$

differenciálegyenletet.

A $4x - y + 7 = 0$ és $2x + y - 1 = 0$ egyenesek metszéspontját a

$$4x - y + 7 = 0$$

$$2x + y - 1 = 0$$

egyenletrendszer gyökei adják:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -7 & -1 \\ 1 & 1 \\ 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{6} = -1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -7 \\ 2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{18}{6} = 3.$$

Az

$$x = u - 1$$

$$y = v + 3$$

transzformációval új változókat vezetünk be. Ezekkel a differenciálegyenlet a következő alakú lesz:

$$\frac{dv}{du} = \frac{4u - 4 - v - 3 + 7}{2u - 2 + v + 3 - 1},$$

vagyis

$$\frac{dv}{du} = \frac{4u - v}{2u + v} = \frac{4 - \frac{v}{u}}{2 + \frac{v}{u}}; \quad (u \neq 0, \text{ vagyis } x \neq -1).$$

Ez pedig egy homogén (fokszámú) differenciálegyenlet. Új ismeretlen függvényt vezetünk be:

$$z(u) = \frac{v(u)}{u},$$

ahonnan

$$v = uz$$

és

$$\frac{dv}{du} = z + u \frac{dz}{du}.$$

Ezekkel

$$z + u \frac{dz}{du} = \frac{4 - z}{2 + z},$$

vagy

$$u \frac{dz}{du} = -\frac{z^2 + 3z - 4}{z + 2}.$$

A változókat szétválasztjuk:

$$\frac{z + 2}{z^2 + 3z - 4} dz + \frac{du}{u} = 0,$$

vagy

$$\left(\frac{3}{z - 1} + \frac{2}{z + 4} \right) dz + 5 \frac{du}{u} = 0.$$

Ezt integrálva, adódik:

$$3 \ln |z - 1| + 2 \ln |z + 4| + 5 \ln |u| = C,$$

vagy

$$(z - 1)^3 (z + 4)^2 u^5 = c.$$

Ebből

$$(v - u)^3 (v + 4u)^2 = c.$$

Visszatérve az eredeti változókra

$$(y - x - 4)^3 (y + 4x + 1)^2 = c.$$

Ez a differenciálegyenlet általános megoldása.

5. Oldjuk meg az

$$y' = -\frac{x - 2y + 3}{2x - 4y + 5}$$

differenciálegyenletet.

Új ismeretlen függvényt vezetünk be:

$$v(x) = x - 2y(x).$$

Ezzel

$$\frac{dv}{dx} = 1 - 2 \frac{dy}{dx},$$

vagyis

$$\frac{dv}{dx} = 1 + 2 \frac{v + 3}{2v + 5};$$

vagy

$$\frac{dv}{dx} = \frac{4v + 11}{2v + 5}.$$

A változókat szétválasztva és mindkét oldalt 8-cal megszorozva, lesz:

$$\left(4 - \frac{4}{4v + 11}\right) dv = 8 dx.$$

Ezt integrálva, adódik:

$$4v - \ln |4v + 11| = 8x - C,$$

vagy

$$8x - 4v + \ln |4v + 11| = C.$$

Visszatérve az eredeti változókra:

$$4x + 8y + \ln |4x - 8y + 11| = C.$$

Ez a differenciálegyenlet általános megoldása.

6. Oldjuk meg az

$$(1 + x^2 y + x^4 y^2) y' + 2x^3 y^3 = 0$$

differenciálegyenletet.

Ezt így is írhatjuk:

$$dy + x^2 y dy + x^4 y^2 dy + 2 x^3 y^3 dx = 0.$$

Az egyes tagok dimenziója:

$$n, \quad 2 + 2n, \quad 4 + 3n, \quad 4 + 3n.$$

Ha a dimenziók azonosak, akkor pl.

$$n = 2 + 2n,$$

azaz

$$n = -2$$

kell, hogy legyen. Ezzel az egyes tagok dimenziója:

$$-2, \quad 2 - 4 = -2, \quad 4 - 6 = -2, \quad 4 - 6 = -2.$$

Tehát új ismeretlen függvényt vezethetünk be:

$$v(x) = \frac{y(x)}{x^{-2}} = x^2 y(x),$$

vagyis

$$y = \frac{v}{x^2} \quad (x \neq 0),$$

és így

$$dy = \frac{dv}{x^2} - \frac{2v}{x^3} dx.$$

Behelyettesítve a differenciálegyenletbe és az összevonásokat elvégezve:

$$x(v^2 + v + 1) dv - 2(v^2 + v) dx = 0.$$

A változókat szétválasztva:

$$\left(1 + \frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}\right) dv = 2 \frac{dx}{x}.$$

$$\left(v \neq 0, \quad v+1 \neq 0, \quad \text{azaz} \quad y \neq 0, \quad y \neq -\frac{1}{x^2}\right)$$

Mindkét oldalt integráljuk:

$$v + \ln |v| - \ln |v+1| = \ln x^2 + \ln |C| \quad (C \neq 0),$$

vagy

$$v e^v = C x^2 (v+1).$$

Visszatérve az eredeti változókra:

$$x^2 y e^{x^2 y} = C x^2 (x^2 y + 1),$$

vagy

$$y e^{x^2 y} = C (x^2 y + 1) \quad (C \neq 0).$$

A differenciálegyenletnek még két közösleges megoldása is van: $y = 0$ és $y = -\frac{1}{x^2}$. Az első benne foglaltatik a kapott általános megoldásban, ha a $C \neq 0$ megszorítástól eltekintünk.

7. Egy görbét a következő érintőszerkesztés jellemez: A görbe $P(x, y)$ pontját összekötjük az origóval; erre az \overline{OP} egyenesre merőlegest rajzolunk P -ben. Ez a merőleges R pontban metszi az x tengelyt. Ha most a \overline{PR} távolságnak az x tengelyen levő \overline{QR} vetületét az origóból rámérjük az x tengelynek ugyanarra az oldalára, amelyik oldalon Q és R van, nyerjük az S pontot ($\overline{OS} = \overline{QR}$). Az \overline{SP} egyenes a görbe P ponthoz tartozó érintője. Határozzuk meg a görbe egyenletét.

Az OPR derékszögű háromszögből láthatóan \overline{PQ} mértani középarányosa az \overline{OQ} , \overline{QR} távolságoknak, vagyis

$$\overline{QR} = \frac{y^2}{x} \quad (20. \text{ ábra}).$$

De akkor

$$\overline{SQ} = x - \frac{y^2}{x}.$$

Másrészt

$$y' = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{SQ}} = \frac{y}{x - \frac{y^2}{x}},$$

vagyis a keresett görbe differenciálegyenlete:

$$y' = \frac{\frac{y}{x}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Ez pedig homogén differenciálegyenlet.

Új ismeretlen függvényt vezetünk be:

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}.$$

Ezzel

$$u'x + u = \frac{u}{1 - u^2},$$

vagy

$$u'x = \frac{u^3}{1 - u^2}.$$

A változókat szétválasztva:

$$\frac{1 - u^2}{u^3} du = \frac{dx}{x}.$$

Ebből, integrálással adódik:

$$-\frac{1}{2u^2} - \ln|u| = \ln|x| - \ln|C|, \quad (C \neq 0),$$

vagy visszairva az eredeti változókat:

$$-\frac{1}{2} \frac{x^2}{y^2} - \ln|y| + \ln|x| = \ln|x| - \ln|C|.$$

Ebből

$$\frac{x^2}{y^2} = 2 \ln \left| \frac{C}{y} \right|;$$

vagy végeredményben:

$$x = \pm y \sqrt{\ln \left(\frac{C}{y} \right)^2}.$$

8. Határozzuk meg azt, hogy milyen meridiángörbével rendelkezik az a *forgásfelület alakú tükör*, amelyik a forgástengellyel párhuzamosan érkező fénysugarakat visszaverve, egy pontba gyűjti.

Válasszuk a koordináta-rendszert úgy, hogy az x tengely legyen a forgástengely és az origó a visszavert sugarak találkozási pontja. A keresett görbét az $y = y(x)$ függvény határozza meg (21. ábra).

Legyen a meridiángörbe egy pontja P és a görbe e pontbeli érintője \overline{PR} .

A fénysugarak visszaverődési törvénye alapján, a beeső fénysugár és az érintő által bezárt szög egyenlő a visszavert sugár és az érintő által bezárt szöggel (α). Ugyanekkora az érintő irányszöge. Így az OPR \triangle egyenlő szárú, azaz

$$\overline{OP} = \overline{OR} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Másrészt

$$y' = \tan \alpha = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OR} + \overline{OQ}} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

A keresett görbét tehát az

$$y' = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$$

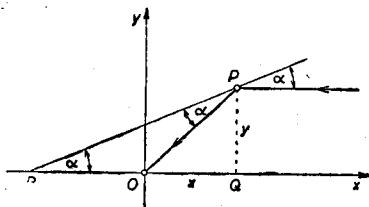
differenciálegyenlet határozza meg.

Szorozzuk meg a jobb oldal számlálóját és nevezőjét $(-x + \sqrt{x^2 + y^2})$ -tel;

$$y' = \frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y},$$

vagy

$$y' = \frac{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}}{\frac{y}{x}}.$$



21. ábra

Új ismeretlen függvényt vezetünk be: $u = \frac{y}{x}$. Ekkor

$$u'x + u = \frac{-1 + \sqrt{1+u^2}}{u},$$

vagy

$$u'x = -\frac{1+u^2 - \sqrt{1+u^2}}{u}.$$

A változókat szétválasztva:

$$\frac{u \, du}{1+u^2 - \sqrt{1+u^2}} = -\frac{dx}{x}.$$

Mindkét oldalt integráljuk:

$$\int \frac{u \, du}{1+u^2 - \sqrt{1+u^2}} = -\ln \left| \frac{x}{p} \right|,$$

ahol p az integrálási állandó. A baloldali integrált $u = \operatorname{tg} \varphi$ helyettesítéssel számíthatjuk ki. Ekkor

$$1+u^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{1}{\cos^2 \varphi}; \quad \sqrt{1+u^2} = \frac{1}{\cos \varphi} \quad \text{és} \quad du = \frac{1}{\cos^2 \varphi} d\varphi \quad \text{lesz.}$$

így

$$\begin{aligned} \int \frac{u \, du}{1+u^2 - \sqrt{1+u^2}} &= \int \frac{\operatorname{tg} \varphi \, d\varphi}{1 - \cos \varphi} = \int \frac{\sin \varphi \, d\varphi}{(1 - \cos \varphi) \cos \varphi} = \\ &= \int \left(\frac{1}{1 - \cos \varphi} + \frac{1}{\cos \varphi} \right) \sin \varphi \, d\varphi = -\ln \left| \frac{\cos \varphi}{1 - \cos \varphi} \right|. \end{aligned}$$

A differenciálegyenlet megoldása:

$$\ln \left| \frac{\cos \varphi}{1 - \cos \varphi} \right| = \ln \left| \frac{x}{p} \right|,$$

vagy

$$\frac{\cos \varphi}{1 - \cos \varphi} = \frac{x}{p}.$$

Polárkoordinátákban:

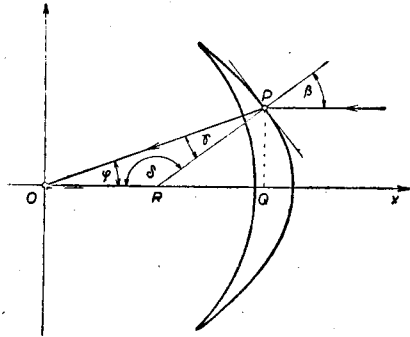
$$\frac{p \cos \varphi}{1 - \cos \varphi} = r \cos \varphi,$$

vagy

$$r = \frac{p}{1 - \cos \varphi}.$$

Ez pedig egy olyan parabola egyenlete, amelynek a fókusza az origóban van. A keresett tulajdonságú tükrör tehát forgási paraboloid alakú.

9. A 22. ábra egy optikai lencse keresztmetszetét mutatja. Ez a homorú oldalán egy gömbfelület, domború oldalán pedig egy forgásfelület egy darabjából áll. A forgásfelület forgástengelye illeszkedik a gömbfelület középpontjára. Az a kérdés, hogy milyennek kell megválasztani a forgásfelületet ahhoz, hogy a tengellyel párhuzamosan jövő (egyszínű) fénysugarak, melyek a forgásfelület oldaláról esnek a lencsére, úgy törjenek meg, hogy a gömbfelületre merőlegesen érkezzenek, és így azon törés nélkül áthaladva, a gömbfelület középpontjában találkozzanak.



22. ábra

Helyezzük el a koordináta-rendszert úgy, hogy az origó legyen a gömbfelület középpontja és az x tengely a forgástengely (a lencse optikai tengelye). Egy, a tengellyel párhuzamosan jövő fénysugár P -ben érkezik a lencse domború oldalára. P koordinátái x és y . A \overline{PR} egyenes a forgásfelület $y = f(x)$ egyenletű meridiángörbéjének a normálisa. A megtört fénysugár útja \overline{PO} . A β szög a beesési szög, γ pedig a törési szög. Snellius és Descartes törvénye szerint $\sin \beta : \sin \gamma$ az ún. törésmutató: n (pl. ha a fénysugár levegőből jut üvegbe, $n = 1,5$).

Legyen n -nek a reciproka c és így:

$$\sin \gamma = c \sin \beta,$$

ahol $c < 1$. Az RQ távolság a szubnormális hossza (figyelemmel arra, hogy $y' < 0$):

$$\overline{RQ} = -y y'.$$

Így

$$OR = x + y y'.$$

Mivel továbbá $\sin \delta = \sin \beta$, azért a szinusztétel alapján:

$$OR : OP = (x + y y') : + \sqrt{x^2 + y^2} = \sin \delta : \sin \beta = c,$$

vagyis a meridiángörbét meghatározó differenciálegyenlet:

$$y' = \frac{-x + c \sqrt{x^2 + y^2}}{y}.$$

Ez pedig egy homogén (fokszámú) differenciálegyenlet.

Ha az előző példához hasonlóan járunk el és ugyanúgy polárkoordinátákat vezetünk be, a meridiángörbe egyenletére ezt kapjuk:

$$r = \frac{p}{1 - c \cos \varphi}.$$

Ez pedig egy olyan ellipszis egyenlete, amelynek O az egyik fókusz és c a numerikus excentricitása (p az integrálási állandó).

Feladatoka) Gyakorló feladatok

$$\alpha) y' = f(ax + by + c)$$

1. $y' = (y - x)^2.$

2. $y' = (3x + 4y)^2.$

3. $(x - y)^2 y' = a^2.$ Itt a = állandó.

4. $y' = \cos(x + y).$

5. $x \cos y \, dy + (2 \sin y - 3x) \, dx = 0.$ Alkalmazzuk előbb a $\sin y = t$ helyettesítést.

6. $y' = (x - y)^2 + 1.$

7. $y' = \sin(x - y).$

8. $y' = (x + y)^2.$

9. $y' = \frac{1}{2x + y}.$

10. $y' = \sqrt{y - 2x}.$

$\beta)$ Homogén (fokszámú) differenciálegyenletek: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$

1. $(x + y) \, dx + (y - x) \, dy = 0.$

2. $x \, dy - y \, dx = \sqrt{x^2 + y^2} \, dx.$

3. $(8y + 10x) \, dx + (5y + 7x) \, dy = 0.$

4. $(x^2 - 2y^2) \, dx + 2xy \, dy = 0.$

5. $(x^2 + y^2) \, dx = 2xy \, dy.$

6. $(2\sqrt{xy - y}) \, dx + x \, dy = 0.$

7. $(x - y) \, dx + x \, dy = 0.$

8. $x \cdot \cos \frac{y}{x} y' = y \cdot \cos \frac{y}{x} - x.$

9. $x \cdot \cos \frac{y}{x} (y \, dx + x \, dy) = y \cdot \sin \frac{y}{x} (x \, dy - y \, dx).$

10. $2x^2 \, dy + (y^2 - 2xy - x^2) \, dx = 0.$

11. $(x - y) \, dx - 2x \, dy = 0.$

12. $(x + 4y) \, dy + 3y \, dx = 0.$

13. $y^2 \, dx - (x^2 + 2xy) \, dy = 0.$

14. $(x^2 - y^2) \, dx + 2xy \, dy = 0.$

15. $(y^2 - xy - x^2) \, dx + x^2 \, dy = 0.$

16. $(3xy - 2x^2) y' + xy - 2y^2 = 0.$

17. $2x^3 y' + x^3 - x^2 y = 0.$

18. $(x^2 y + 2y^3) \, dx - (2x^3 + 3xy^2) \, dy = 0.$

19. $(x^2 y - xy^2 + y^3) \, dx + (x^3 + x^2 y + xy^2) \, dy = 0.$

20. $(x^2 - 4xy - y^2) \, dx - (y^2 + 2xy + 2x^2) \, dy = 0.$

21. $y^2 \, dx + (x\sqrt{y^2 - x^2} - xy) \, dy = 0.$

22. $\left(y \cdot \sin \frac{x}{y} - x \cdot \cos \frac{x}{y}\right) dy + y \cdot \cos \frac{x}{y} dx = 0.$

23. $\left(x e^{\frac{y}{x}} + y\right) dx = x \, dy.$

24. $(2x^3 - 135y^3) \, dx + 81xy^2 \, dy = 0.$

25. $\left(2y e^{\frac{y}{x}} - x\right) y' + 2x + y = 0.$

26. $(x^2 + y^2) y' = xy.$

27. $(x^2 - 2xy - y^2)y' = x^2 + 2xy - y^2$. 28. $(x^2 + 2xy)y' = y^2 - 2xy$.
 29. $x(x^2 - 6y^2)dy = 4y(x^2 + 3y^2)dx$. 30. $y - xy' = \sqrt{x^2 + y^2}$.
 31. $x^2y dx - (x^3 + ay^3)dy = 0$. Itt $a = \text{állandó}$.
 32. $x(x - ay)y' = y(y - ax)$. Itt $a = \text{állandó}$.
 33. $(x^2 + xy + ay^2)y' = ax^2 + xy + y^2$. Itt $a = \text{állandó}$.
 34. $x(x + y)dy = (x^2 + y^2)dx$.
 35. $x(x^2 + axy + y^2)y' = y(x^2 + bxy + y^2)$. Itt a és b állandók.
 36. $(x + y)^2y' = x^2 - 2xy + 5y^2$. 37. $xy' = y - x \cos^2 \left(\frac{y}{x} \right)$.
 38. $x dy - y dx = x \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{y}{x} \right) dx$. 39. $\left(xy e^{\frac{x}{y}} + y^2 \right) dx - x^2 e^{\frac{x}{y}} dy = 0$.
 40. $\sqrt{y^2 - x^2} dx = x dy - y dx$.

$$\gamma) y' = f \left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma} \right).$$

1. $(3y - 7x + 7)dx + (7y - 3x + 3)dy = 0$.
 2. $(2x + y + 1)dx + (4x + 2y - 1)dy = 0$.
 3. $(2y + x + 1)dx = (2x + 4y + 3)dy$.
 4. $(7y + x + 2)dx = (3x + 5y + 6)dy$.
 5. $(2x + 3y - 8)dx - (x + y - 3)dy = 0$.
 6. $y' = \frac{x^2}{(y + x - 1)^2}$. 7. $(3y - x)y' = 3x - y + 4$.
 8. $(x - 5y + 5)dx + (5x - y + 1)dy = 0$.
 9. $(9x + 2y + 19)y' = 2x + 6y - 18$.
 10. $(9x + 21y + 3)y' = 7x - 5y + 45$.
 11. $(8x + y + 25)dx + (7x - 16y + 140)dy = 0$.
 12. $(2x - 4y + 5)y' = x - 2y + 3$.
 13. $(y + ax + b)y' = y + ax - b$. Itt a és b állandó.
 14. $x^2y' = (2x - y + 1)^2$.
 15. $(x + y + a + b)^2y' = 2(y + a)^2$. Itt a és b állandó.
 16. $(x - y)^2y' = (x - y + 1)^2$. 17. $(x + y)^2y' = (x + y + 2)^2$.
 18. $(3x - y - 1)dx + (x - 3y + 5)dy = 0$.
 19. $(x + y - 1)dx + (2x + 2y - 3)dy = 0$.
 20. $(x - 2y - 1)dx + (2x - y + 1)dy = 0$.

δ) Homogén „dimenziójú” differenciálegyenletek

1. $(1 - x y^2) dx - 2 x^2 y dy = 0.$
2. $(2 y^2 - 3 x) dx + 2 x y dy = 0.$
3. $(y^2 - 3 x^2 y) dx + x^3 dy = 0.$
4. $(1 - x^2 y) y' + 2 x y^2 = 0.$
5. $(x + 2 x^2 y) dy + (2 y + 3 x y^2) dx = 0.$
6. $(x^2 - 2 y^3) dx + 3 x y^2 dy = 0.$
7. $y y' = a - \frac{y^2}{x}.$ Itt $a = \text{állandó}.$
8. $y' + \frac{y}{x} = \frac{1 + x^2 y^2}{x^2}.$
9. $y' = \frac{1}{2} \frac{y^3}{x^2} + \frac{y}{x}.$
10. $y' = \frac{1}{2 x^2 y} \cdot \frac{y^6 - x^3}{y^2 - x}.$
11. $xy dy = (y^2 + x^3) dx.$
12. $(x - y^2) dx - 4 x y dy = 0.$
13. $(2 x y^2 - y) dx + x dy = 0.$
14. $(2 - x^2 y) dy - 2 x y^2 dx = 0.$
15. $x y' + y = x^2.$

b) Vegyes feladatok

1. Keressük azon görbékét, melyeknél valamely $P(x, y)$ pontnak az origótól való távolsága ugyanakkora, mint amekkora darabot a P ponthoz tartozó érintő az y tengelyből lemetesz.

2. Keressük azon görbékét, melyeknél valamely $P(x, y)$ ponthoz tartozó szubnormális ugyanakkora, mint amekkora darabot a $P(x, y)$ ponthoz tartozó érintő az y tengelyből kimetsz.

3. Határozzuk meg azokat a görbékét, amelyeknél az y tengely, az érintő és a kezdőpontból az érintési pontba húzott rádiuszvektor közötti háromszög egyenlőszárú háromszög.

4. Határozzuk meg mindazon görbékét, amelyeknek bármelyik pontjához tartozó érintője merőleges arra az origóból kiinduló félsugárra, amelyik az x tengellyel kétszer akkora szöget zár be, mint a görbeponthoz tartozó rádiuszvektor.

5. Határozzuk meg mindazon görbékét, amelyeknek bármelyik pontjához tartozó érintőnek az y tengelyen levő pontját a görbepont x tengelyen levő vetületi pontjával összekötve, egy, a görbeponthoz tartozó rádiuszvektorra merőleges egyenest kapunk.

6. Határozzuk meg mindazon görbékét, amelyeknek az y tengellyel való metszés-pontjához és egy tetszés szerinti $P(x, y)$ pontjához tartozó érintői a $\xi = \frac{x}{n}$ abszcisszájú pontban metszik egymást. A kezdeti feltételek (y_0 és y'_0) legyenek adottak.

7. Határozzuk meg, hogy egy sík-domború optikai lencse domború oldala milyen meridiángörbéjű forgásfelület alakú, ha az optikai tengellyel párhuzamosan a síkra eső fénysugarak a lencse domború oldalán túljutva egy ponton mennek keresztül.

3. §. Elsőrendű lineáris és erre visszavezethető differenciálegyenletek

a) Homogén lineáris differenciálegyenlet:

$$y' + g(x)y = 0$$

Az általános alak

$$a(x)y' + b(x)y = 0$$

volna, ha azonban $a(x) \neq 0$ (az $a(x) \equiv 0$ esetet mint a differenciálegyenlet szempontjából érdektelent, kirekeszthetjük), $a(x)$ -szel végigosztva, a differenciálegyenlet mindig így írható:

$$y' + g(x)y = 0.$$

Itt $g(x)$ adott, és az $\alpha < x < \beta$ intervallumban folytonos függvény.

Ez a differenciálegyenlet a változók szétválasztásával, kvadraturával megoldható.

A változókat szétválasztva ($y \neq 0$):

$$\frac{dy}{y} = -g(x) dx,$$

és integrálva:

$$\ln |y| = -\int g(x) dx + \ln |C| \quad (C \neq 0).$$

Vagy innen

$$y = C e^{-\int g(x) dx}.$$

A differenciálegyenletnek $y = 0$ is megoldása, mégpedig reguláris (közönséges) megoldása. Így, hogy ha a $C = 0$ esetet is megengedjük, a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = C e^{-\int g(x) dx}.$$

b) Állandó együtthatójú homogén lineáris differenciálegyenlet:

$$y' + a y = 0$$

A differenciálegyenlet általános megoldása mindig $y = C e^{\lambda x}$ alakú, ahol λ a differenciálegyenlethez tartozó, ún. *karakterisztikus egyenlet* gyöke:

$$\lambda + a = 0,$$

azaz

$$\lambda = -a.$$

Tehát az általános megoldás:

$$y = C e^{-ax}.$$

c) Inhomogén lineáris differenciálegyenlet:

$$y' + g(x)y = h(x);$$

$$h(x) \neq 0$$

Az általános alak

$$a(x)y' + b(x)y = f(x) \quad [f(x) \neq 0]$$

volna, ha azonban $a(x) \neq 0$ (az $a(x) \equiv 0$ esetet mint a differenciálegyenlet szempontjából érdektelent kirekeszthetjük), $a(x)$ -szel végigosztva, a differenciálegyenlet mindig így írható:

$$y' + g(x)y = h(x), \quad [h(x) \neq 0].$$

Itt $g(x)$ és $h(x)$ adott, és az $\alpha < x < \beta$ intervallumban folytonos függvények.
 a) A differenciálegyenlet általános megoldása két függvény összegeként adódik:

$$y = Y + y_0,$$

ahol Y az adott differenciálegyenlethez tartozó,

$$Y' + g(x) Y = 0$$

homogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása, y_0 pedig az inhomogén lineáris differenciálegyenletnek egy partikuláris megoldása.

Az adott differenciálegyenlethez tartozó homogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása (az előző a) pont szerint):

$$Y = C Y_1 = C e^{-\int g(x) dx}.$$

(Itt Y_1 a homogén lineáris differenciálegyenletnek egy partikuláris, a $C = 1$ értékhez tartozó megoldása.)

Az inhomogén lineáris differenciálegyenlet y_0 partikuláris megoldása az ún. *állandó variálásának módszerével* számítható. E módszer lényege abban áll, hogy fel tesszük azt, hogy y_0 ugyanolyan szerkezetű, mint Y , csak a benne szereplő C állandót „variáljuk”, változónak tekintjük, azaz

$$y_0 = C(x) Y_1 = C(x) e^{-\int g(x) dx}.$$

Ez valóban megoldása az inhomogén lineáris differenciálegyenletnek, ha azt x -ben azonosan kielégíti, azaz ha fennáll:

$$C'(x) e^{-\int g(x) dx} - C(x) g(x) e^{-\int g(x) dx} + C(x) g(x) e^{-\int g(x) dx} = h(x),$$

vagyis, ha

$$C'(x) e^{-\int g(x) dx} = h(x).$$

Ebből

$$\frac{d C(x)}{dx} = h(x) e^{\int g(x) dx},$$

vagy integrálva:

$$C(x) = \int h(x) e^{\int g(x) dx} dx.$$

(Itt integrálási állandót nem kell kiírni, mert úgyis csak egy partikuláris megoldásra van szükségünk, vagyis feltehetjük, hogy az integrálási állandó értéke éppen 0.)

Ezzel

$$y_0 = \int h(x) e^{\int g(x) dx} dx \cdot e^{-\int g(x) dx}.$$

Végeredményben az inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = \left\{ C + \int h(x) e^{\int g(x) dx} dx \right\} e^{-\int g(x) dx}.$$

$\beta)$ Ugyanerre az eredményre jutunk, ha abból indulunk ki, hogy az

$$y' + g(x) y = h(x)$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása két, egyelőre ismeretlen függvény szorzata (mindkettő x -nek a függvénye):

$$y = u \cdot v.$$

Ekkor

$$y' = u v' + u' v,$$

és a differenciálegyenletbe behelyettesítve, lesz:

$$u v' + u' v + g(x) u v = h(x),$$

vagy átrendezve:

$$u [v' + g(x) v] + [v u' - h(x)] = 0.$$

Ez az egyenlet nyilvánvalóan x -ben azonosan fennáll, ha mindkét tagja külön-külön zérus, azaz ha

$$v' + g(x) v = 0$$

és

$$v u' - h(x) = 0.$$

Az elsőből — az integrálási állandót elhagyva —:

$$v = e^{-\int g(x) dx},$$

s ha ezt a másodikba behelyettesítjük, akkor abból most már az integrálási állandót is külön kiírva:

$$u = C + \int h(x) e^{\int g(x) dx} dx.$$

Így a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = u v = \left\{ C + \int h(x) e^{\int g(x) dx} dx \right\} e^{-\int g(x) dx}.$$

d) Állandó együtthatójú inhomogén lineáris differenciálegyenlet speciális külső taggal (megoldás kísérletező feltevéssel)

Bizonyos speciális esetekben, ha az $y' + a y = h(x)$, állandó együtthatójú inhomogén lineáris differenciálegyenlet inhomogeneitását okozó $h(x)$ függvény az alábbiak közül valamelyik:

1. $h(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, azaz n -ed fokú polinom,
2. $h(x) = a_k e^{kx}$, azaz exponenciális függvény,
3. $h(x) = a_k \cos kx$, vagy $h(x) = a_k \sin kx$,

vagy ezek lineáris kombinációja, tehát általában

$$(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) e^{\alpha_k x} \cos \beta_k x,$$

$$(b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0) e^{\gamma_k x} \sin \delta_k x$$

alakú tagok összege, akkor az állandó variálásának módszerét elkerülhetjük úgy, hogy az inhomogén differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását kísérletképpen ugyanolyan alakú függvény alakjában keressük (*Ansatz*), mint amilyen alakú ez az inhomogeneitást okozó $h(x)$ függvény, csak határozatlan együtthatókat választunk. Ezeket a határozatlan együtthatókat — a differenciálegyenletbe való behelyettesítés és a megfelelő tagok együtthatóinak összehasonlítása alapján — éppen úgy határozzuk meg, hogy a kísérletképpen felvett függvény az inhomogén egyenletet x -ben azonosan kielégítse.

Megjegyezendő, hogy abban az esetben, ha az inhomogeneitást okozó $h(x)$ függvény a $h_1(x)$, $h_2(x)$, ... függvények összege, akkor megtehetjük azt, hogy külön-külön meghatározzuk azon inhomogén lineáris differenciálegyenletek egy-egy partikuláris megoldását, melyekben az inhomogeneitást okozó függvény rendre $h_1(x)$, $h_2(x)$, ... Az így nyert megoldások összege adja az eredeti differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását.

Ha az előbb említett $h_1(x)$, $h_2(x)$, ... függvények egyike, pl. $h_k(x) = e^{\lambda x}$, az adott differenciálegyenlethez tartozó homogén lineáris differenciálegyenletnek megoldása, akkor az $y_0 = a_k e^{\lambda x}$ kísérletező feltevés nem vezet célra. Ebben az esetben, a mechanikából vett analógia alapján azt mondjuk, hogy „*rezonancia*” áll fenn (l. a IV-ben a példák közül a 10-et). Ekkor kísérletképpen az $y_0 = a_k x e^{\lambda x}$ függvénnyel próbálkozhatunk, vagy a minden esetben célravezető állandó variálásának módszerét alkalmazzuk.

Megjegyezzük még, hogy ha $h(x) = a_k \cos kx$, vagy $a_k \sin kx$, akkor mindkét esetben az $y_0 = A \cos kx + B \sin kx$ függvénnyel kell próbálkoznunk.

e) **Bernoulli-féle differenciálegyenlet:**

$$\begin{aligned} y' + g(x)y &= \\ &= h(x)y^n, \\ n &\neq 1, h(x) \neq 0 \end{aligned}$$

$n = 1$ vagy $h(x) \equiv 0$ esetén a differenciálegyenlet lineáris volna, ezért ezt a két esetet kizárjuk. Egyébként $g(x)$ és $h(x)$ adott, és az $\alpha < x < \beta$ intervallumban folytonos függvények.

α) Ha feltesszük, hogy $y \neq 0$, akkor y^{-n} -nel végigszorozva, lesz:

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{g(x)}{y^{n-1}} = h(x),$$

vagy

$$y^{-n} y' + y^{1-n} g(x) = h(x).$$

Új ismeretlen függvényt vezetünk be:

$$u(x) = [y(x)]^{1-n},$$

akkor

$$u' = (1-n) y^{-n} y'.$$

Ezeket behelyettesítve lesz:

$$\frac{1}{1-n} u' + g(x) u = h(x).$$

Ez pedig az $u(x)$ ismeretlen függvényre egy inhomogén lineáris differenciálegyenlet.

Mivel ennek az általános megoldása:

$$u = \left\{ C + (1-n) \int h(x) e^{(1-n) \int g(x) dx} dx \right\} e^{(n-1) \int g(x) dx},$$

ezért az eredeti differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = \left\{ C + (1-n) \int h(x) e^{(1-n) \int g(x) dx} dx \right\}^{\frac{1}{1-n}} e^{-\int g(x) dx}.$$

β) Az $y = u \cdot v$ helyettesítéssel is ugyanerre az eredményre jutunk. (Itt u és v x -nek egyelőre ismeretlen függvényei.) Ekkor ugyanis

$$u v' + v [u' + g(x)u] = u^n v^n h(x).$$

Ha most

$$u' + u g(x) = 0,$$

vagyis

$$u = e^{-\int g(x) dx},$$

akkor marad

$$\frac{dv}{v^n} = h(x) e^{(1-n) \int g(x) dx} dx.$$

Ebből integrálással

$$v^{1-n} = (1-n) \int h(x) e^{(1-n) \int g(x) dx} dx + C,$$

és végül

$$y = \left\{ C + (1-n) \int h(x) e^{(1-n) \int g(x) dx} dx \right\}^{\frac{1}{1-n}} e^{-\int g(x) dx}.$$

f) Jacobi-féle differenciálegyenlet:

$$y' = \frac{(Ax + By)y + \alpha x + \beta y}{(Ax + By)x + \alpha x + \beta y}$$

Az itt szereplő A, B, α, β, a és b együtt-hatók megadott állandók. Ez a differenciálegyenlet alkalmas transzformációkkal Bernoulli-féle differenciálegyenletre vezethető vissza. Feltesszük azt, hogy $x \neq 0$, és elosztjuk a

számlálót és nevezőt x -szel:

$$y' = \frac{\left(A + B \frac{y}{x}\right)y + \alpha + \beta \frac{y}{x}}{\left(A + B \frac{y}{x}\right)x + a + b \frac{y}{x}}.$$

Új ismeretlen függvényt vezetünk be (mint a homogén fokszámú differenciálegyenletnél):

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}.$$

Ekkor, mivel

$$y = u x \quad \text{és} \quad y' = u' x + u,$$

lesz

$$u'x + u = \frac{(A + Bu)xu + \alpha + \beta u}{(A + Bu)x + a + bu},$$

és innen

$$u'x = \frac{\alpha + (\beta - a)u - bu^2}{(A + Bu)x + a + bu}.$$

Ha most a két változó szerepét félcsereéljük és x -et tekintjük ismeretlen függvénynek, u -t pedig független változónak, akkor lesz

$$x' = \frac{(A + Bu)x^2 + (a + bu)x}{\alpha + (\beta - a)u - bu^2}.$$

Ez pedig egy Bernoulli-féle differenciálegyenlet.

Megjegyzendő még az, hogy ha a számlálóban vagy a nevezőben, vagy esetleg mindkettőben szerepel még külön állandó tag is, akkor alkalmas

$$\begin{aligned} x &= \xi + p \\ y &= \eta + q \end{aligned} \quad (p \text{ és } q \text{ állandók})$$

lineáris transzformációval az (vagy azok) eltüntethető (eltüntethető).

Példák

1. Oldjuk meg az

$$y' - \frac{y}{x} = x^2$$

differenciálegyenletet.

Ez egy inhomogén lineáris differenciálegyenlet.

Az ehhez tartozó homogén lineáris differenciálegyenlet:

$$Y' - \frac{Y}{x} = 0.$$

A változókat szétválasztva és integrálva, ebből adódik:

$$Y = Cx.$$

Az inhomogén lineáris differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását az állandó variálásának módszerével az

$$y_0 = C(x)x$$

alakban keressük. Ekkor

$$y_0' = C'(x)x + C(x).$$

Behelyettesítve az adott differenciálegyenletbe:

$$C'(x)x + C(x) - C(x)\frac{x}{x} = x^2,$$

azaz

$$C'(x) = x,$$

ahonnan

$$C(x) = \frac{x^2}{2}.$$

így

$$y_0 = \frac{x^3}{2},$$

és az inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = Cx + \frac{x^3}{2} \quad (23. \text{ ábra}).$$

Ugyanerre az eredményre jutunk, ha feltesszük, hogy

$$y = u(x) v(x).$$

Ekkor ugyanis

$$y' = u'v + v'u,$$

s így a differenciálegyenletbe behelyettesítve, lesz:

$$u \left(v' - \frac{v}{x} \right) + (v u' - x^2) = 0.$$

Ez az egyenlet nyilvánvalóan x -ben azonosan fennáll, ha

$$v' - \frac{v}{x} = 0$$

és

$$v u' - x^2 = 0.$$

Az elsőből — az integrálási állandót elhagyva —:

$$v = x,$$

s ezt a másodikba behelyettesítve:

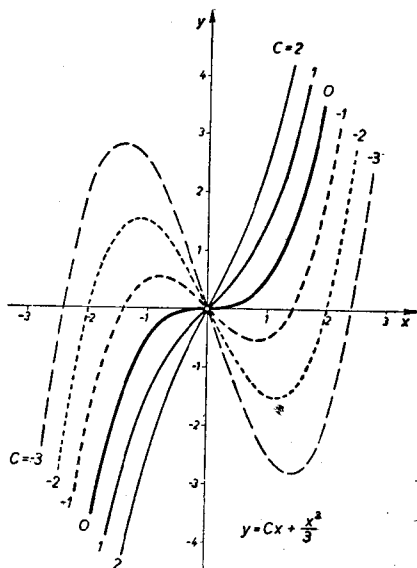
$$x u' - x^2 = 0,$$

vagy

$$u' = x;$$

innen pedig

$$u = C + \frac{x^2}{2}.$$



23. ábra

Végeredményben az adott differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = u v = \left(C + \frac{x^2}{2} \right) x = C x + \frac{x^3}{2}.$$

2. Oldjuk meg az

$$y' - 2y = x^2 + 2e^x \sin x$$

differenciálegyenletet.

Ez egy állandó együtthatójú, inhomogén lineáris differenciálegyenlet, speciális külső taggal.

Az ehhez tartozó

$$Y' - 2Y = 0$$

homogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása:

$$Y = C e^{2x}.$$

Az inhomogén lineáris differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását kísérletező feltevéssel keressük. Feltesszük, hogy

$$y_0 = a x^2 + b x + c + A e^x \sin x + B e^x \cos x.$$

Ekkor

$$y'_0 = 2 a x + b + (A - B) e^x \sin x + (A + B) e^x \cos x.$$

Ezeket behelyettesítjük az adott differenciálegyenletbe:

$$\begin{aligned} -2 a x^2 + (2 a - 2 b) x + (b - 2 c) + (-A - B) e^x \sin x + (A - B) e^x \cos x \equiv \\ \equiv x^2 + 2 e^x \sin x. \end{aligned}$$

Ha a kísérletképpen felvett függvény megoldása a differenciálegyenletnek, akkor ennek az azonosságnak minden x -re fenn kell állania. De ez csak úgy lehetséges, ha a két oldalon a megfelelő együtthatók egyenlők, azaz ha

$$\begin{aligned} -2 a &= 1, \\ 2 a - 2 b &= 0, \\ b - 2 c &= 0, \\ -A - B &= 2, \\ A - B &= 0. \end{aligned}$$

Ebből viszont:

$$a = -\frac{1}{2},$$

$$b = -\frac{1}{2},$$

$$c = -\frac{1}{4},$$

$$A = -1,$$

$$B = -1.$$

Tehát a keresett partikuláris megoldás:

$$y_0 = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} - e^x \sin x - e^x \cos x.$$

Végeredményben az adott differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = C e^{2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} - e^x \sin x - e^x \cos x.$$

3. Oldjuk meg az

$$y' + 3y = 2e^{-3x}$$

differenciálegyenletet.

Ez ismét egy állandó együtthatójú, inhomogén lineáris differenciálegyenlet speciális külső taggal.

Az ehhez tartozó

$$Y' + 3Y = 0$$

homogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása:

$$Y = C e^{-3x}.$$

Mivel az inhomogeneitást okozó $2e^{-3x}$ függvény láthatóan megoldása a homogén lineáris differenciálegyenletnek, ezért rezonancia esete áll fenn, és kísérletképpen azt tesszük fel, hogy az inhomogén lineáris differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása

$$y_0 = a x e^{-3x}$$

alakú. Ekkor lesz

$$y'_0 = a e^{-3x} - 3a x e^{-3x},$$

és a differenciálegyenletbe való behelyettesítéssel:

$$a e^{-3x} - 3a x e^{-3x} + 3a x e^{-3x} \equiv 2e^{-3x},$$

azaz

$$a e^{-3x} \equiv 2e^{-3x},$$

ahonnan következik, hogy

$$a = 2$$

kell legyen. Tehát

$$y_0 = 2x e^{-3x},$$

és az adott differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = (C + 2x) e^{-3x}.$$

4. Oldjuk meg az

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^3}y^3$$

differenciálegyenletet.

Ez egy Bernoulli-féle differenciálegyenlet.

Feltesszük, hogy $y \neq 0$ és y^3 -nal végigosztunk:

$$\frac{y'}{y^3} + \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{1}{x^3}.$$

Új ismeretlen függvényt vezetünk be:

$$u(x) = \frac{1}{[y(x)]^3}.$$

Ekkor

$$u' = -2 \frac{y'}{y^3},$$

vagyis

$$\frac{y'}{y^3} = -\frac{1}{2} u'.$$

A differenciálegyenletbe behelyettesítve, nyerjük:

$$-\frac{1}{2} u' + \frac{2}{x} u = \frac{1}{x^3},$$

vagy

$$u' - \frac{4}{x} u = -\frac{2}{x^3}.$$

Ez már egy lineáris differenciálegyenlet. Ennek az általános megoldása:

$$u = \frac{1}{3x^2} + Cx^4,$$

és mivel $u = \frac{1}{y^2}$, nyilván az eredeti differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\frac{1}{y^2} = \frac{1}{3x^2} + Cx^4.$$

5. Oldjuk meg az

$$y' = \frac{(x-y)y - x - y}{(x-y)x + x + y}$$

differenciálegyenletet.

Új ismeretlen függvényt vezetünk be:

$$u(x) = \frac{y(x)}{x}.$$

Ezzel a differenciálegyenlet így alakul:

$$xu' + u = \frac{(1-u)xu - 1 - u}{(1-u)x + 1 + u},$$

vagy

$$xu' = -\frac{1 + 2u + u^2}{(1-u)x + 1 + u}.$$

A két változó szerepét felcseréljük: $x(u)$ lesz az ismeretlen függvény és u a független változó:

$$\frac{dx}{du} = x' = - \frac{(1-u)x^2 + (1+u)x}{(1+u)^2},$$

vagy

$$(1+u)^2 x' + (1+u)x + (1-u)x^2 = 0.$$

Ez egy Bernoulli-féle differenciálegyenlet. Feltételezzük azt, hogy $x \neq 0$ és végigosztunk x^2 -nel:

$$(1+u)^2 \frac{x'}{x^2} + (1+u) \frac{1}{x} + (1-u) = 0.$$

Új ismeretlen függvényt vezetünk be:

$$\frac{1}{x(u)} = z(u), \text{ s ezzel } \frac{x'}{x^2} = -z'.$$

Behelyettesítve:

$$(1+u)^2 z' - (1+u)z = 1-u.$$

Ez egy inhomogén lineáris differenciálegyenlet. A megfelelő homogén lineáris differenciálegyenlet:

$$(1+u)^2 Z' - (1+u)Z = 0.$$

Ennek az általános megoldása:

$$Z = C(1+u).$$

Az inhomogén lineáris differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását az állandó variálásának módszerével keressük:

$$\begin{array}{l} z_0 = C(u) \cdot (1+u) \\ z'_0 = C'(u) (1+u) + C(u) \\ \hline C'(u) (1+u)^3 + C(u) (1+u)^2 - C(u) (1+u)^2 = 1-u, \end{array}$$

azaz

$$C'(u) = \frac{1-u}{(1+u)^3}.$$

Ebből

$$C(u) = \frac{1}{1+u} - \frac{1}{(1+u)^2},$$

vagyis

$$z_0 = 1 - \frac{1}{1+u}.$$

Az inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása tehát

$$z = C(1+u) + 1 - \frac{1}{1+u} = \frac{C(1+u)^2 + u}{1+u}.$$

Így

$$x = \frac{1}{z} = \frac{1+u}{C(1+u)^2 + u},$$

vagy visszaírva az eredeti változókat:

$$C x^2 + 2 C x y + C y^2 + x y = x + y.$$

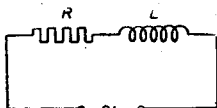
Ebből y -t kifejezve:

$$y = -x - \frac{1}{2C}(x-1) \pm \sqrt{\frac{1}{4C^2}(x-1)^2 + \frac{1}{C}x^2},$$

vagy ha $\frac{1}{2C}$ helyett k -t írunk, az eredeti differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = -x - k(x-1) \pm \sqrt{k^2(x-1)^2 + 2kx^2}.$$

6. Kapcsoljunk egy $R(\Omega)$ ohmos ellenállást és L (H) önindukció tényezőjű tekercset sorbakötve tartalmazó áramkörbe $U_0 \cos \omega t$ (volt) váltakozó feszültséget. (Itt U_0 a feszültség csúcértéke, ω (sec^{-1}) a körfrekvencia, mely a ν (sec^{-1}) frekvenciával így függ össze: $\omega = 2\pi\nu$; és t (sec) jelenti az időt.) Határozzuk meg az áramerősséget (amper) az idő függvényében (24. ábra).



$U_0 \cos \omega t$

24. ábra

Kirchhoff törvénye alapján:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = U_0 \cos \omega t.$$

Ez egy inhomogén lineáris differenciálegyenlet, állandó együtthatókkal. A megfelelő homogén lineáris differenciálegyenlet:

$$L \frac{dI}{dt} + RI = 0.$$

Ennek az általános megoldása:

$$I = A e^{-\frac{R}{L}t}.$$

(Itt A az integrálási állandó.)

Az inhomogén lineáris differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását

$$i_0 = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

alakban keressük. Ekkor

$$\frac{di_0}{dt} = -a\omega \sin \omega t + b\omega \cos \omega t.$$

A differenciálegyenletbe behelyettesítve:

$$(Rb - aL\omega) \sin \omega t + (Ra + bL\omega) \cos \omega t \equiv U_0 \cos \omega t.$$

Mivel ennek minden t -re fenn kell állania, ezért

$$-L\omega a + Rb = 0,$$

$$Ra + L\omega b = U_0.$$

Ebből viszont

$$a = U_0 \frac{R}{R^2 + L^2 \omega^2},$$

$$b = U_0 \frac{L\omega}{R^2 + L^2 \omega^2}.$$

Tehát az inhomogén lineáris differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása:

$$i_0 = U_0 \frac{R}{R^2 + L^2 \omega^2} \cos \omega t + U_0 \frac{L\omega}{R^2 + L^2 \omega^2} \sin \omega t.$$

Ezt még így is írhatjuk:

$$i_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \cos \omega t + \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \sin \omega t \right).$$

Vagy ha bevezetjük a

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L\omega}{R}$$

összefüggéssel a φ szöget (25. ábra), akkor

$$i_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \varphi).$$

Az inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása tehát

$$i = A e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \varphi).$$

Az A integrálási állandó értékét a kezdeti feltételekből lehet meghatározni. A bekapcsolás pillanatában, azaz a $t = 0$ időpillanatban legyen $i = 0$. Tehát

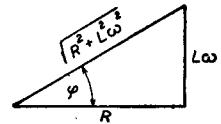
$$0 = A + \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \cos \varphi,$$

vagyis

$$A = -\frac{U_0 R}{R^2 + L^2 \omega^2}.$$

Így a kezdeti feltételeket is kielégítő megoldás:

$$i = -\frac{U_0 R}{R^2 + L^2 \omega^2} e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \varphi).$$



25. ábra

Láthatóan az áramerősség-idő függvény két részből áll: egy az időben abszolút értékben monoton csökkenő részből:

$$- \frac{U_0 R}{R^2 + L^2 \omega^2} e^{-\frac{R}{L}t};$$

és egy tiszta periodikus részből:

$$\frac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \varphi).$$

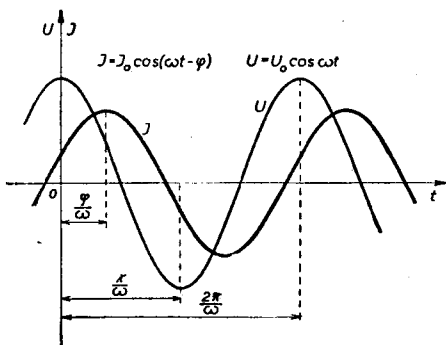
Az első rész abszolút értéke az időben úgy csökken, mint az

$$e^{-\frac{R}{L}t} = e^{-bt}$$

exponenciális függvény. Ez pedig, az $\frac{R}{L}$ hányadostól függően, gyorsabban vagy lassabban, néhány másodperc alatt gyakorlatilag nullára csökken. Tehát a bekapcsolástól számított néhány másodperc múlva az áramerősség szempontjából ez a tag gyakorlatilag elhanyagolható.

Éppen ezért a bekapcsolás után néhány másodperctől számítva már csak a második tag lényeges. Ez írja le az áramerősséget az idő függvényében, stacionárius állapotban:

$$i_{\text{stac}} = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \varphi) = I_0 \cos(\omega t - \varphi).$$



26. ábra

Ha U_0 jelentette a feszültség csúcsértékét, I_0 jelenti az áramerősség csúcsértékét. Összehasonlítva a feszültség és a stacionárius áramerősség függvényét, látjuk, hogy mindkettő ugyanakkora periódusú koszinuszfüggvény. Az áramerősség azonban φ -vel késik a feszültséghez képest. φ jelenti a fáziseltolás szögét. Időre átszámítva, az áramerősség

$$t = \frac{\varphi}{\omega}$$

másodperccel késik fázisban a feszültséghez képest (26. ábra).

Ha például

- a feszültség csúcsértéke:
- az önindukció tényezője:
- az ohmos ellenállás:
- a frekvencia:

$$\begin{aligned} U_0 &= 500 \text{ V;} \\ L &= 0,0858 \text{ H;} \\ R &= 3,43 \text{ } \Omega; \\ \nu &= 50/\text{sec;} \end{aligned}$$

akkor

- a körfrekvencia: $\omega = 2\pi\nu = 314/\text{sec};$
- az áramkör induktív ellenállása (reaktanciája): $L\omega = 26,9\ \Omega;$
- az áramkör látszólagos ellenállása (impedanciája): $Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} = 27,11\ \Omega;$
- a stacionárius áramerősség csúcserőértéke: $I_0 = \frac{U_0}{Z} = 18,44\ \text{A};$
- a fáziseltolás szöge: $\varphi = \text{Arctg} \frac{\omega L}{R} \approx 1,45 = 82^\circ 43';$
- a stacionárius áramerősség fázisának a feszültséghez viszonyított késése, időben: $t = \frac{\varphi}{\omega} \approx 0,0046\ \text{sec}.$

Mivel az $\frac{R}{L}$ arány igen nagy:

$$\frac{R}{L} = 40,$$

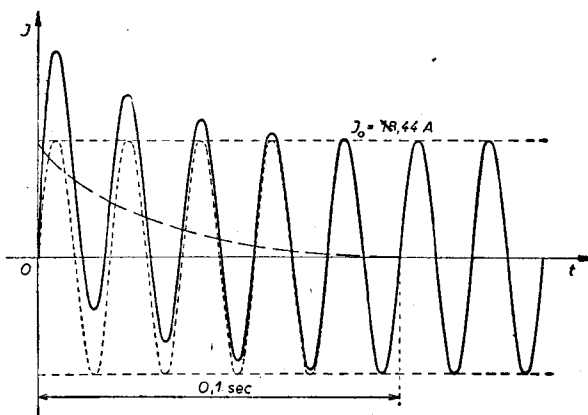
ezért az áramerősség elenyésző része:

$$= \frac{U_0 R}{R^2 + L^2 \omega^2} e^{-\frac{R}{L}t}$$

igen gyorsan tart a 0-hoz. $t = 0$ -nál az értéke 18,16 A; $t = 0,1$ sec-nál ez a kezdeti érték kb. 0,33 A-re, 0,15 sec-nál pedig már kb. 0,045 A-re csökken, úgyhogy ettől kezdve gyakorlatilag már csak az áramerősség stacionárius része játszik szerepet. Néhány váltakozás után tehát beáll a stacionárius állapot (27. ábra).

7. Vizsgáljuk valamely radioaktív elem bomlását (l. még az I. 1. § 12. példát).

Ha feltesszük, hogy minden radioaktív atomra nézve van egy bizonyos valószínűsége annak, hogy az atommag egy másodperc alatt felbomlik, s hogy ez a valószínűség állandó, ugyanakkora az adott elem összes atomjaira nézve, akkor a radioaktív bomlás törvényét könnyen meg tud-



27. ábra

juk határozni. Jelöljük ezt a bomlási valószínűséget λ -val. Tehát a rendelkezésre álló N számú radioaktív atom közül egy másodperc alatt felbomlik λN számú atom. Másrészt az adott elem atomjai számának csökkenése az időegységben: $-\frac{dN}{dt}$. Tehát fennáll

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N.$$

Innen a változók szétválasztása és integrálás után adódik:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Az N_0 integrálási állandó jelenti a $t = 0$ időpontban levő radioaktív atomok számát.

A bomlási sebességet λ helyett inkább a T felezési idővel szokás jellemezni. Ez azt az időt jelenti, ami alatt az aktív atomok száma felére csökken. λ és T között — a bomlási törvény alapján — könnyű összefüggést találni. A felezési idő elteltével ugyanis, azaz amikor $t = T$,

$$N = \frac{N_0}{2},$$

azaz

$$\frac{N}{N_0} = \frac{1}{2} = e^{-\lambda T}.$$

Ebből viszont

$$-\ln 2 = -\lambda T,$$

azaz

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0,693}{\lambda},$$

vagy

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} \approx \frac{0,693}{T}.$$

Az imént levezetett bomlási törvény szerint bomlik fel valamely, a $t = 0$ időpontban N_0 számú atomot tartalmazó, radioaktív elemből álló test. t másodperc múlva $N = N_0 e^{-\lambda t}$ atom marad az eredeti elemből. Feltehető, hogy a bomlás eredményeként keletkező elem maga is radioaktív, tehát valamely λ_1 bomlási állandóval jellemezhető bomlásnak van alávetve. Ha $m(t)$ jelenti a második elem t időpontban levő atomjainak számát, akkor ebből a második elemből minden másodpercben $\lambda_1 m$ számú elem bomlik fel. Így fennáll:

$$\frac{dm}{dt} = \lambda N - \lambda_1 m = \lambda N_0 e^{-\lambda t} - \lambda_1 m,$$

vagyis

$$\frac{dm}{dt} + \lambda_1 m = \lambda N_0 e^{-\lambda t}.$$

Ez az $m(t)$ ismeretlen függvényre vonatkozóan egy inhomogén lineáris differenciálegyenlet, állandó együtthatókkal. A hozzátartozó homogén lineáris differenciálegyenlet:

$$\frac{dM}{dt} + \lambda_1 M = 0.$$

Ennek az általános megoldása:

$$M = C e^{-\lambda_1 t}.$$

Az inhomogén lineáris differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását ($\lambda_1 \neq \lambda$)

$$m_0 = A e^{-\lambda t}$$

alakban keressük. Ekkor

$$\frac{dm_0}{dt} = -\lambda A e^{-\lambda t},$$

és a differenciálegyenletbe behelyettesítve:

$$(-\lambda A + \lambda_1 A) e^{-\lambda t} = \lambda N_0 e^{-\lambda t}.$$

Ebből viszont következik, hogy

$$(\lambda_1 - \lambda) A = \lambda N_0,$$

azaz

$$A = \frac{\lambda N_0}{\lambda_1 - \lambda}.$$

Így az inhomogén lineáris differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása:

$$m_0 = \frac{\lambda N_0}{\lambda_1 - \lambda} e^{-\lambda t},$$

és az általános megoldás:

$$m = \frac{\lambda N_0}{\lambda_1 - \lambda} e^{-\lambda t} + C e^{-\lambda_1 t}.$$

Ha a $t = 0$ időpontban $m = 0$, akkor

$$C = -\frac{\lambda N_0}{\lambda_1 - \lambda},$$

és így az ehhez a kezdeti feltételhez tartozó partikuláris megoldás:

$$m = \frac{\lambda N_0}{\lambda_1 - \lambda} (e^{-\lambda t} - e^{-\lambda_1 t}).$$

Ha például a kiinduló anyag $N_0 = 10^6$ atomot tartalmazó rádium, amelynek felezési ideje $T = 1580$ év, mellyel

$$\lambda \approx \frac{0,693}{1580 \cdot 365 \cdot 86400} \approx 1,4 \cdot 10^{-11};$$

a rádium bomlásával rádiumemanáció keletkezik, melynek felezési ideje $T_1 = 3,82$ nap, mellyel

$$\lambda_1 \approx \frac{0,693 \cdot}{3,82 \cdot 86\,400} \approx 2,1 \cdot 10^{-6};$$

akkor $t = 1$ nap = 86 400 másodperc múlva lesz

$$m = \frac{1,4 \cdot 10^{-11} \cdot 10^6}{2,1 \cdot 10^{-6} - 1,4 \cdot 10^{-11}} (e^{-1,4 \cdot 86\,400 \cdot 10^{-11}} - e^{-2,1 \cdot 86\,400 \cdot 10^{-6}}) \approx \\ \approx 6,043 \cdot 0,1649 \approx 1 \text{ atom rádiumemanáció.}$$

Feladatok

a) Gyakorló feladatok

α) Lineáris differenciálegyenletek

1. $y' - xy = x^3.$

2. $y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3.$

3. $y' - \frac{ay}{x} = \frac{x+1}{x}.$

Itt $a =$ állandó.

4. $x(1-x^2)dy + (2x^2-1)ydx = ax^3dx.$ Itt $a =$ állandó.

5. $dy - \frac{xydx}{1+x^2} = \frac{adx}{1+x^2}.$

Itt $a =$ állandó.

6. $y' \cos x + y \sin x = 1.$

7. $6y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$

8. $y' - \frac{n}{x}y = e^x x^n.$ Itt $n =$ állandó.

9. $y' + \frac{n}{x}y = \frac{a}{x^n}.$ Itt a és n megadott állandók.

10. $y' + y = e^{-x}.$

11. $y' + \frac{1-2x}{x^2}y = 1.$

12. $xy' - (1+x)y = x^2 - x^3.$

13. $xy' - y = x^3 + 1.$

14. $xy' + y = x \ln |x|.$

15. $(x+1)y' - y = 3x^4 + 4x^3.$

16. $(x^2+a)y' - xy = a.$ Itt $a =$ állandó.

17. $(1-x^2)y' - xy = 1.$

18. $(1-x^2)y' - y = 1 - x^2.$

19. $(1+x^2)y' + xy = 3x^3.$

20. $(2xy' + y)\sqrt{1+x} = 1 + 2x.$

21. $\sqrt{1+x^2} \cdot y' + y = 2x.$

22. $2x(x-1)y' + (2x-1)y = x.$

23. $x^2y' + xy = x^2 + x + 1.$

24. $2(x^2+x+1)y' + (2x+1)y = 8x^2 + 1.$

25. $(x^2-1)y' - xy = x^2.$

26. $x(1 - x^2)y' + (2x^2 - 1)y = x^3 - x^5$.
 27. $(1 + x^2)y' + 2xy = \operatorname{tg} x$.
 28. $2(1 - x^2)y' - (1 + x)y = \sqrt{1 - x^2}$.
 29. $2(1 - x)y' - y = 4x\sqrt{1 - x}$.
 30. $(1 + x^2)^2 y' + (1 + x)(1 + x^2)y = 2x$.
 31. $xy' + 2y = \sin x$.
 32. $y' \cos x + y \sin x - \cos^2 x = 0$
 33. $y' + y \operatorname{tg} x = \sin 2x$.
 34. $y' \sin x \cdot \cos^3 x + y \cos 2x \cdot \cos^2 x = 1$.
 35. $y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$.
 36. $y' \sin x - y \cos x = e^x \sin^2 x$.
 37. $y' - y = x + \sin x$.
 38. $\frac{1}{2} y' = y \operatorname{tg} 2x + 1 + \frac{1}{\cos 2x}$.
 39. $y' + 2y = x^2 + 3 \operatorname{ch} x$.
 40. $y' \cos x + y \sin x = 1 + \operatorname{tg} x$.
 41. $y' + y \operatorname{th} x = 6e^{2x}$.
 42. $y' \sin^2 x - y \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x$.
 43. $y' \cos x - 3y \sin x = \operatorname{ctg} x$.
 44. $y' + \frac{2y}{\sin 2x} = 2 \operatorname{ctg}^2 x \cdot \cos 2x$.
 45. $y' \operatorname{tg} x + y = \sin 3x + \frac{1}{\sin 2x}$.
 46. $y' \operatorname{ctg} x - y = \frac{1}{\sin 2x} + \cos 2x$.
 47. $(1 - x^2)y' + xy = x \arcsin x + (1 - x)\sqrt{1 - x^2}$.
 48. $x(1 + x)y' + (1 - x - x^2)y = (1 + x)(x^2 - 1)$.
 49. $xy' + 2y = x^4$.
 50. $(1 + y^2)dx - (xy + y + y^3)dy = 0$
 51. $y' - y = e^x$.
 52. $xy' + 2y = 3x$.
 53. $y dx + (2x - 3y) dy = 0$.
 54. $y dx = (2x + 2y^4) dy$.
 55. $x dy = (x^3 - y) dx$.
 56. $(x + 1)^2 y' + 3(x + 1)y = 2$.
 57. $y' \operatorname{tg} x - 2y = 2a$. Itt $a = \text{állandó}$.
 58. $x^2 y' + (2x + x^2)y = 1$.
 59. $x^2 dy = (4 - 3x - 3xy) dx$.
 60. $xy' + y(x \operatorname{ctg} x + 1) = \operatorname{ctg} x$.
 61. $y(y - 1) dx + (x - y^2) dy = 0$.
 62. $y^2 dx = (3 - 2xy) dy$.
 63. $\cos y \cdot dx + (x + \sin y - 1) dy = 0$.
 64. $(1 - 2xy) dy = (y^2 - 1) dx$.
 65. $(y^2 - 6x)y' + 2y = 0$.
 66. $(x - 2xy - y^2)y' + y^2 = 0$.
 67. $xy' + 2y = 3x$. Kezdeti feltétel: $y(0) = 0$.
 68. $y' + y \cos x = \sin x \cdot \cos x$. Kezdeti feltétel: $y(0) = 1$.
 69. $(1 - x^2)y' + xy = 1$. Kezdeti feltétel: $y(0) = 1$.
 70. $y' + x^2 y = x^2$. Kezdeti feltétel: $y(2) = 1$.
 71. $y' + \frac{y}{x} + e^x = 0$. Kezdeti feltétel: $y(1) = 0$.

72. $y' + y = e^{-x}$. 73. $y' - 4y = x \sin x$.
 74. $y' + 2y = x^2 e^x$. 75. $y' + 3y = e^{-3x} \sin x$.
 76. $y' - 2y = e^{2x} \cos x - e^{2x} \sin x$. 77. $y' - 4y = x^3 - x$.
 78. $y' - 5y = 2x e^{5x}$.
 79. $y' + 3y = x^n e^{-3x}$. Itt n pozitív egész szám.
 80. $y' - y = x^2 e^x \cos x$.

β) Bernoulli-féle differenciálegyenletek

1. $y' - \frac{y}{x} = -x^3 y^4$.
 2. $y' + \frac{y}{x} = a y^2 \ln x$. Itt $a = \text{állandó}$. 3. $y' + xy = x^3 y^3$.
 4. $(1 - x^2) y' - xy = ax y^2$. Itt $a = \text{állandó}$.
 5. $3y^2 y' - ay^3 = x + 1$. Itt $a = \text{állandó}$.
 6. $(y \ln x - 1) y dx = x dy$.
 7. $y - y' \cos x = y^2 (1 - \sin x) \cos x$.
 8. $y' - \frac{y}{2x} = 5x^2 y^5$. 9. $xy' = 4y - 4\sqrt{y}$.
 10. $2xy' - y = \frac{2x^3 - 1}{y}$. 11. $xy' = y + 2xy^2$.
 12. $(1 + x^2) y' + xy = x y^2$. 13. $x^3 y' = 2x^2 y + y^3$.
 14. $xy' + y = y^2 \ln |x|$. 15. $xy' + y = x y^3$.
 16. $x^2 y' + xy + \sqrt{y} = 0$. 17. $3xy' - 2y = x y^4$.
 18. $y' \cos x + y \sin x + y^3 = 0$. 19. $y' + 2y = 2x y^{\frac{3}{2}}$.
 20. $2(1 + x)yy' + 2x - 3x^2 + y^2 = 0$. 21. $x dy + (xy - y - y^2) dx = 0$.
 22. $x^2 y' - y^2 = 2xy$. 23. $y dx + (x^2 y^4 - 3x) dy = 0$.
 24. $y dx = x(xy - 1) dy$. 25. $(y^2 - xy) dx + x^2 dy = 0$.
 26. $(2xy^3 - y) dx + 2x dy = 0$. 27. $(x^2 - 1) dy - y(2x - 3y) dx = 0$.
 28. $2 \cos y \cdot dx - (x \sin y - x^3) dy = 0$.
 29. $y' = \frac{y}{x} - xy^2$. 30. $xy' + y = y^2 \ln x$.

γ) Jacobi-féle differenciálegyenletek

1. $y' = \frac{a(x+y)y - x - 3y}{a(x+y)x + 2y}$. Itt $a = \text{állandó}$.

2. $y' = \frac{(x+y-1)y-x+y-1}{(x+y-1)x+x-y-1}.$
3. $y' = \frac{(x+y+1)y+x-y+1}{(x+y+1)x-x+y-1}.$
4. $y' = \frac{(x+y+2)y-x-3y-2}{(x+y+2)x-x+y+2}.$
5. $y' = \frac{(7x+5y)y+14x+13y+6}{(7x+5y)x-4x-5y-3}.$
6. $y' = \frac{5(x+y)y-7x+8y-5}{5(x+y)x+7x-8y}.$
7. $y' = \frac{(x-y)y+x-1}{(x-y)x-y+1}.$

b) Vegyes feladatok | 1. Határozzuk meg azt a görbét, amelynél az $x=0$, $y=0$, $x=\xi$ egyenesek és a görbe közé zárt idom súlypontjának abszcisszája egyenlő $\frac{3}{4}\xi$ -vel.

2. A $2xy' - y = 1,5x^2$ differenciálegyenlet integrálgörbéi közül határozzuk meg azt, amelyiknek az $x=1$ abszcisszájú pontjában az érintőmeredeksége 1.

3. Határozzuk meg mindazon görbéket, melyeknél a $(0,0)$ és (x,y) pontokhoz tartozó érintők metszéspontja a $\left(\frac{2}{3}x, \frac{2}{3}y\right)$ pont.

4. Egy görbét a következő érintőszerkesztés jellemez: a $P(x,y)$ pontbeli érintőt megkapjuk, ha a $(2x,0)$ pontot P -vel összekötjük. Határozzuk meg a görbe egyenletét.

5. Egy görbe $P(x,y)$ pontjának abszcisszáját osszuk fel n egyenlő részre és kössük össze a görbepontot a legközelebbi osztásponttal. Mi a görbe egyenlete, ha az előbbi szerkesztéssel kapott egyenes a görbe érintője?

6. Az (x,y) síkban adva van az $x=a$, $y=0$ rögzített pont. Ha ezen a ponton keresztül egy párhuzamos egyenest húzunk egy görbe tetszőleges érintőjével, akkor a koordináta-tengelyek és ezen egyenes által bezárt háromszög területe egyenlő annak a derékszögű négyzögnek a területével, amelynek két merőleges oldala a görbe kiválasztott pontjának két koordinátája. Mi a görbe egyenlete?

7. A görbe $P(x,y)$ pontjához tartozó normális N pontban metszi az x tengelyt. Mely görbénél lesz a \overline{PN} távolság felezőpontja az $y^2 = ax$ parabolán?

8. A görbe $P(x,y)$ pontjához tartozó érintő T pontban metszi az y tengelyt. A P vetülete az x tengelyen Q , O a koordináta-rendszer kezdőpontja. Mely görbénél lesz az $OQPT$ trapéz területe a^2 ?

9. Mely görbénél metsz le az érintő az y tengelyből $kx^m y^n$ darabot?

10. Határozzuk meg azt a görbét, amelynél az érintőnek az érintési pont és az x tengely közötti szakasza a $(0,1)$ pontból 45° -os szög alatt látható.

11. Egy C (farad) kapacitású kondenzátort egy $R(\Omega)$ tiszta ohmos ellenállással sorbakötve, rákapcsolunk egy U (volt) feszültségű áramforrásra. A Q (coulomb) töltést a t (sec) időpontban a

$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = U$$

differentiálegyenlet határozza meg. Ha a $t = 0$ időpontban $Q = 0$, határozzuk meg a töltést az idő függvényében, feltételezve azt, hogy $U = \text{állandó}$.

12. Az előző feladat, feltételezve, hogy $U = U_0 \sin \omega t$. Mekkora az áramerősség a t időpontban?

13. A 7. kidolgozott példa alapján határozzuk meg azt, hogy hány rádiumemanáció atom lesz 1 nap múlva, ha kiinduláskor volt 500 000 atom rádium és 500 000 atom emanáció?

14. Hány atom rádiumemanáció lesz 1 nap múlva, ha kiinduláskor volt 10^6 atom emanáció és nem volt egyetlen egy atom rádium sem?

15. Az előző két példa adatait alapul véve, határozzuk meg azt, hogy „végtelen hosszú” idő elteltével hány atom emanáció lesz?

4. §. Riccati-féle differenciálegyenlet

a) Speciális
Riccati-féle
differenciál-
egyenletek:

$$y' + a y^2 = b x^a$$

Itt a tetszőleges valós szám lehet, ezért az $x > 0$ félsíkra fogunk szorítkozni. Feltehetjük továbbá, hogy $a \neq 0$ és $b \neq 0$. α speciális értékei mellett ez a differenciálegyenlet elemi úton integrálható, a megoldás zárt alakban előállítható. Kimutatható, hogy az alább felsorolt esetektől eltérő α értékek esetén a differenciálegyenlet megoldása nem

állítható elő zárt alakban, elemi függvények segítségével (Liouville). Ez esetben a megoldás Bessel-függvényekkel kifejezhető.

α) $\alpha = 0$. A differenciálegyenlet ez esetben

$$y' = b - a y^2$$

alakú. Ez pedig a *változók szétválasztásával* integrálható.

β) $\alpha = -2$. A differenciálegyenlet ez esetben

$$y' + a y^2 = \frac{b}{x^2}$$

alakú. Szorítkozunk az (x, y) sík valamelyik negyedére, például az $x > 0, y > 0$ síknegyedre. Ekkor a

$$z(x) = \frac{1}{y(x)}$$

új ismeretlen függvény bevezetésével a

$$z' = a - b \left(\frac{z}{x} \right)^2$$

homogén (fokszámú) differenciálegyenletre jutunk, amelynek a $z > 0$, $x > 0$ tartományhoz tartozó minden megoldása egy, az (x, y) sík előbb említett tartományához tartozó olyan $y = y(x)$ függvényt határoz meg, mely az eredeti differenciálegyenletnek a megoldása.

M e g j e g y z é s. 1. Az

$$y' + a y^2 = \frac{b}{x^2}$$

alakú, speciális Riccati-féle differenciálegyenlet úgy is tárgyalható, mint homogén „dimenziójú” differenciálegyenlet. Ha ugyanis x és dx dimenziójául 1-et, y és dy dimenziójául pedig (-1) -et választjuk, akkor a differenciálegyenlet valamennyi tagja azonosan (-2) dimenziójú. Így új ismeretlen függvényként bevezetjük a

$$v(x) = x \cdot y(x)$$

függvényt. Ezzel a differenciálegyenlet az

$$x v' + a v^2 - v - b = 0$$

szétválasztható változójú differenciálegyenletre redukálódik.

2. Az

$$y' + a y^2 = \frac{b}{x^2}$$

alakú, speciális Riccati-féle differenciálegyenletnek mindig van legalább egy

$$y_1 = \frac{k}{x}$$

alakú *partikuláris megoldása* ($k = \text{állandó}$). Ha ugyanis ezt behelyettesítjük a differenciálegyenletbe, a következőt kapjuk:

$$\frac{1}{x^2} (a k^2 - k - b) = 0.$$

Mínthogy ennek az egyenlőségnek x -ben identikusan teljesülnie kell, az csak úgy lehetséges, ha

$$a k^2 - k - b = 0,$$

ahonnan

$$k = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4ab}}{2a}.$$

Egy partikuláris megoldás ismeretében azután az *általános megoldás*

$$y = y_1 + z$$

alakban kereshető (l. a b) ε pontot).

$\gamma)$ $\alpha = -\frac{4n}{2n-1}$, ahol n pozitív egész, tehát α a $-4, -\frac{8}{3}, -\frac{12}{5}, -\frac{16}{7}, -\frac{20}{9}, \dots$ sorozat valamelyik eleme. Szorítkozzunk ismét az $x > 0$ fél-síkra. A differenciálegyenlet ez esetben n számú lépés után az $\alpha = 0$ esetre redukálható. Ha ugyanis az

$$y = \frac{1}{v} u^{-\frac{2}{\alpha+3}} + \frac{1}{a} u^{-\frac{1}{\alpha+3}}, \quad x = u^{\frac{1}{\alpha+3}}$$

transzformációval bevezetjük az u és v változókat, akkor mivel

$$\begin{aligned} y' &= \frac{dy}{dx} = \left(\frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{dv}{du} + \frac{\partial y}{\partial u} \right) \frac{du}{dx} = \\ &= -\frac{dv}{du} \cdot \frac{1}{v^2} (\alpha + 3) u^{\frac{\alpha}{\alpha+3}} - \frac{2}{v} u^{-\frac{3}{\alpha+3}} - \frac{1}{a} u^{-\frac{2}{\alpha+3}} \end{aligned}$$

és

$$y^2 = \frac{1}{v^2} u^{-\frac{4}{\alpha+3}} + \frac{1}{a^2} u^{-\frac{2}{\alpha+3}} + \frac{2}{av} u^{-\frac{3}{\alpha+3}},$$

a differenciálegyenletbe való behelyettesítéssel lesz:

$$\begin{aligned} -\frac{dv}{du} \cdot \frac{1}{v^2} (\alpha + 3) u^{\frac{\alpha}{\alpha+3}} - \frac{2}{v} u^{-\frac{3}{\alpha+3}} - \frac{1}{a} u^{-\frac{2}{\alpha+3}} + \frac{a}{v^2} u^{-\frac{4}{\alpha+3}} + \\ + \frac{1}{a} u^{-\frac{2}{\alpha+3}} + \frac{2}{v} u^{-\frac{3}{\alpha+3}} = b u^{\frac{\alpha}{\alpha+3}}, \end{aligned}$$

vagy az összevonásokat és egyszerűsítéseket végrehajtva:

$$\frac{dv}{du} + \frac{b}{\alpha + 3} v^2 = \frac{a}{\alpha + 3} u^{-\frac{\alpha+4}{\alpha+3}}$$

Ez a differenciálegyenlet az eredetivel azonos típusoz tartozik, és mivel

$$-\frac{\alpha + 4}{\alpha + 3} = -\frac{-\frac{4n}{2n-1} + 4}{-\frac{4n}{2n-1} + 3} = -\frac{4(n-1)}{2(n-1)-1},$$

látható, hogy a független változó kitevője a sorozatban eggyel előbb áll, mint az eredeti differenciálegyenletben szereplő α . Ha most ugyanezt a transzformációt n -szer megismételjük, n lépésben $\alpha = 0$ -ra jutunk.

Mivel a transzformáció szerint

$$v = \frac{1}{x \left(xy - \frac{1}{a} \right)},$$

ezért az $x > 0$ félsíknak vagy az $xy = \frac{1}{a}$ hiperbola feletti, vagy alatti részére kell szorítkoznunk.

Minden egyes újabb transzformációnál külön meg kell vizsgálnunk, hogy az (x, y) sík melyik résztartományára szabad szorítkoznunk.

$\delta)$ $\alpha = -\frac{4(-n)}{2(-n)-1} = -\frac{4n}{2n+1}$, ahol n pozitív egész, tehát α a $-\frac{4}{3}$, $-\frac{8}{5}$, $-\frac{12}{7}$, $-\frac{16}{9}$, $-\frac{20}{11}$, ... sorozat valamelyik eleme. Szorítkozzunk ismét

az $x > 0$, $y > 0$ síknegyedre. A differenciálegyenlet ismét n számú lépés után az $\alpha = 0$ esetre redukálható.

Ha ugyanis az

$$y = \frac{1}{u^2 v + \frac{\alpha+1}{b} u}, \quad x = u^{-\frac{1}{\alpha+1}}$$

transzformációval bevezetjük az u és v változókat, akkor mivel

$$y' = \frac{dy}{dx} = \left| \frac{\partial y}{\partial v} \cdot \frac{dv}{du} + \frac{\partial y}{\partial u} \right| \frac{du}{dx} =$$

$$= \frac{1}{\left(u^2 v + \frac{\alpha+1}{b} u \right)^2} \left\{ u^2 \frac{dv}{du} + 2 u v + \frac{\alpha+1}{b} \right\} (\alpha+1) u^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}}$$

és

$$y^2 = \frac{1}{\left(u^2 v + \frac{\alpha+1}{b} u \right)^2},$$

a differenciálegyenletbe való behelyettesítéssel lesz:

$$\frac{1}{\left(u^2 v + \frac{\alpha+1}{b} u \right)^2} \left\{ (\alpha+1) \frac{dv}{du} u^{\frac{3\alpha+4}{\alpha+1}} + 2(\alpha+1) v u^{\frac{2\alpha+3}{\alpha+1}} + \frac{(\alpha+1)^2}{b} u^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}} + a \right\} =$$

$$= b u^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}$$

vagy

$$(\alpha+1) \frac{dv}{du} u^{\frac{3\alpha+4}{\alpha+1}} + 2(\alpha+1) v u^{\frac{2\alpha+3}{\alpha+1}} + \frac{(\alpha+1)^2}{b} u^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}} + a =$$

$$= b v^2 u^{\frac{3\alpha+4}{\alpha+1}} + \frac{(\alpha+1)^2}{b} u^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}} + 2(\alpha+1) v u^{\frac{2\alpha+3}{\alpha+1}}$$

vagy az összevonásokat és egyszerűsítéseket is végrehajtva:

$$\frac{dv}{du} - \frac{b}{\alpha + 1} v^2 = -\frac{a}{\alpha + 1} u^{-\frac{3\alpha + 4}{\alpha + 1}}.$$

Ez a differenciálegyenlet az eredetivel azonos típushoz tartozik, és mivel

$$-\frac{3\alpha + 4}{\alpha + 1} = -\frac{-\frac{12n}{2n+1} + 4}{-\frac{4n}{2n+1} - 1} = -\frac{-4n + 4}{-2n + 1} = -\frac{4[-(n-1)]}{2[-(n-1)] - 1},$$

látható, hogy a független változó kitevője a sorozatban eggyel előbb áll, mint az eredeti differenciálegyenletben szereplő α . Ha most ugyanezt a transzformációt n -szer megismétljük, n lépésben $\alpha = 0$ -ra jutunk.

Minden egyes transzformációnál külön meg kell vizsgálnunk, hogy az (x, y) sík melyik résztartományára kell szorítkoznunk.

b) Az általános Riccati-féle differenciálegyenlet:

$$y' = f(x)y^2 + g(x)y + h(x)$$

Az itt szereplő $f(x)$, $g(x)$ és $h(x)$ függvények az $a < x < b$ intervallumban adott és folytonos függvények. Ha speciálisan $f(x) \equiv 0$, akkor a differenciálegyenlet lineáris, s ha $h(x) \equiv 0$, akkor a differenciálegyenlet Bernoulli-féle differenciálegyenlet.

Az általános Riccati-féle differenciálegyenlet megoldása általában nem fejezhető ki kvadratúrákkal. Ha azonban ismeretes a differenciálegyenletnek legalább egy partikuláris megoldása, akkor az általános megoldás könnyen meghatározható. Mielőtt azonban az erre vonatkozó részleteket ismertetnénk, előbb felsoroljuk a Riccati-féle differenciálegyenlet néhány nevezetes tulajdonságát.

a) A Riccati-féle differenciálegyenlet megtartja alakját:

1. A független változó tetszőleges

$$x = \varphi(u)$$

transzformációja esetén. Itt φ differenciálható függvényt jelent.

2. A függő változó tetszőleges

$$y = \frac{\alpha(x)v + \beta(x)}{\gamma(x)v + \delta(x)}$$

lineáris tört transzformációja esetén. Itt α , β , γ és δ az x -nek tetszőleges differenciálható függvényei, melyek az $a < x < b$ intervallumban az $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ feltételt kielégítik.

β) Az

$$y = \frac{1}{f(x)} v(x)$$

transzformációval, ahol csak $f(x) \neq 0$, és differenciálható, a függő változó négyzetének együtthatója 1-gyel egyenlővé tehető:

$$\frac{dv}{dx} = v^2 + \left(\frac{f'(x)}{f(x)} + g(x) \right) v + f(x) h(x).$$

γ) Anélkül, hogy a független változó négyzetének együtthatóját megváltoztatnók, a függő változó első hatványának együtthatóját zérussá lehet tenni. Ha ugyanis az

$$y = v(x) - \frac{g(x)}{2f(x)}$$

transzformációt alkalmazzuk, feltételezve azt, hogy $f(x) \neq 0$ és $f(x)$, $g(x)$ differenciálható függvények, eredeti differenciálegyenletünk a következő alakba megy át:

$$\frac{dv}{dx} = f(x) v^2 + \left[\frac{f(x) g'(x) - f'(x) g(x)}{2 [f(x)]^2} - \frac{[g(x)]^2}{4 f(x)} + h(x) \right].$$

A β) és γ) alatt említett transzformációk kombinációjával, a Riccati-féle differenciálegyenlet mindig visszavezethető a következő alakra:

$$y' = y^2 + R(x).$$

δ) Ha az (a, b) intervallumban $g(x)$ és $h(x)$ folytonos és $f(x)$ differenciálható, akkor a Riccati-féle differenciálegyenlet valamennyi, az adott intervallumhoz tartozó partikuláris megoldása az

$$u(x) = e^{-\int f(x) y dx}$$

transzformációval az

$$f(x) u'' - (f'(x) + f(x) g(x)) u' + (f(x))^2 h(x) u = 0$$

másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet egy megoldását határozza meg, — és megfordítva.

Ha speciálisan $f(x) = -a \neq 0$, $g(x) = 0$, $h(x) = b x^a$ (l. az a) pontban tárgyalt speciális Riccati-féle differenciálegyenletet), akkor a hozzárendelhető másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet:

$$u'' = a b x^a u.$$

ϵ) Ha a Riccati-féle differenciálegyenletnek $y = y_1(x)$ partikuláris megoldása ismeretes, akkor az általános megoldást

$$y(x) = y_1(x) + z(x)$$

alakban keresve, a $z(x)$ ismeretlen függvényre egy Bernoulli-féle differenciálegyenlet adódik, amely lineárisra való visszavezetéssel kvadraturákkal megoldható.

Ha ugyanis $y = y_1(x)$ -re fennáll az

$$y_1' = f(x) y_1^2 + g(x) y_1 + h(x)$$

azonosság, akkor az $y = y_1 + z$ transzformációval adódik, hogy

$$z' = f(x) z^2 + (2 f(x) y_1(x) + g(x)) z.$$

Ebből a

$$z = \frac{1}{u}, \quad \text{azaz} \quad u = \frac{1}{z} = \frac{1}{y - y_1}$$

transzformációval az

$$u' + (2f(x)y_1(x) + g(x))u = -f(x)$$

elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet adódik. Ennek az általános megoldása:

$$u(x) = C e^{-\int (2f(x)y_1(x) + g(x)) dx} - e^{-\int (2f(x)y_1(x) + g(x)) dx} \cdot \int f(x) e^{\int (2f(x)y_1(x) + g(x)) dx} dx,$$

vagy röviden:

$$u(x) = C \varphi(x) + \psi(x).$$

Így tehát az eredeti differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = y_1(x) + \frac{1}{C \varphi(x) + \psi(x)} = \frac{C y_1(x) \varphi(x) + y_1(x) \psi(x) + 1}{C \varphi(x) + \psi(x)}.$$

Eszerint a Riccati-féle differenciálegyenlet általános megoldása a C integrálási állandónak lineáris tört függvénye.

Megfordítva is igaz: Ha egy differenciálegyenlet általános megoldása a C integrálási állandónak lineáris tört függvénye, akkor az Riccati-féle differenciálegyenlet.

M e g j e g y z é s. Ha $y_1(x)$ a Riccati-féle differenciálegyenlet egy partikuláris megoldása, akkor az

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{u(x)}$$

transzformációval a differenciálegyenlet átmegy egy inhomogén lineáris differenciálegyenletbe, melyben $u(x)$ az ismeretlen függvény.

ζ) Ha ismeretes a Riccati-féle differenciálegyenletnek két partikuláris megoldása: $y_1(x)$ és $y_2(x)$, akkor az előző pontban említett transzformációval kapott

$$u' + (2f(x)y_1 + g(x))u = -f(x)$$

inhomogén lineáris differenciálegyenletnek egy partikuláris megoldása:

$$u_0 = \frac{1}{y_2 - y_1}.$$

Tehát

$$u(x) = C e^{-\int (2f(x)y_1(x) + g(x)) dx} + \frac{1}{y_2(x) - y_1(x)}.$$

η) Ha ismeretes a Riccati-féle differenciálegyenletnek három partikuláris megoldása: $y_1(x)$, $y_2(x)$ és $y_3(x)$, akkor az általános megoldás — kvadratúra nélkül — azonnal felírható:

$$\frac{y - y_2}{y - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} = C.$$

Ebből következik, hogy ha y_4 is megoldás, akkor

$$\frac{y_4 - y_2}{y_4 - y_1} : \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1} = C,$$

azaz, a Riccati-féle differenciálegyenlet négy tetszőleges partikuláris megoldásának kettős viszonya állandó.

Példák

1. Oldjuk meg az

$$y' + 2y^2 = \frac{1}{x^2}$$

differenciálegyenletet.

A feladatot három különböző úton fogjuk megoldani.

a) Új ismeretlen függvényt vezetünk be:

$$z(x) = \frac{1}{y(x)}.$$

Ezzel a differenciálegyenlet a következő alakot ölti:

$$z' + \left(\frac{z}{x}\right)^2 - 2 = 0.$$

Ez pedig egy homogén (fokszámú) differenciálegyenlet. Ismét új ismeretlen függvényt vezetünk be:

$$u(x) = \frac{z(x)}{x}.$$

Ezzel a differenciálegyenlet a következőképpen alakul:

$$u'x + u^2 + u - 2 = 0,$$

vagy

$$u'x + \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = 0.$$

A változókat szétválasztjuk:

$$\frac{du}{\left(u + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}} + \frac{dx}{x} = 0,$$

vagy

$$\frac{du}{\left(\frac{2}{3}u + \frac{1}{3}\right)^2 - 1} + \frac{9}{4} \frac{dx}{x} = 0.$$

Ez így is írható:

$$\frac{du}{\frac{2}{3}u - \frac{2}{3}} - \frac{du}{\frac{2}{3}u + \frac{4}{3}} + \frac{9}{2} \frac{dx}{x} = 0,$$

vagy

$$\frac{du}{u-1} - \frac{du}{u+2} + 3 \frac{dx}{x} = 0.$$

Ezt integrálva, adódik:

$$\ln \left| \frac{u-1}{u+2} x^3 \right| = \ln |C_1|,$$

vagy

$$\frac{u-1}{u+2} x^3 = C_1.$$

Ebből

$$u = \frac{x^3 + 2C_1}{x^3 - C_1},$$

vagy, mivel $u = \frac{z}{x}$, ezért

$$z = \frac{x^4 + 2C_1 x}{x^3 - C_1},$$

és mivel $z = \frac{1}{y}$, azért

$$y = \frac{x^3 - C_1}{x^4 + 2C_1 x},$$

vagy ha még az integrálási állandó $C_1 = \frac{1}{C}$, akkor végeredményben

$$y = \frac{Cx^3 - 1}{Cx^4 + 2x}.$$

b) A differenciálegyenlet homogén „dimenziójú”: Ha x és dx dimenziója 1, y és dy dimenziója pedig -1 , akkor mindegyik tag dimenziója -2 . Új ismeretlen függvényt vezetünk be:

$$v(x) = x \cdot y(x).$$

Ezzel a differenciálegyenlet így alakul:

$$x v' + 2 v^2 - v - 1 = 0,$$

vagy

$$x v' + \left| \sqrt{2} v - \frac{\sqrt{2}}{4} \right|^2 - \frac{9}{8} = 0.$$

A változókat szétválasztjuk:

$$\frac{dv}{\left(\sqrt{2}v - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}} + \frac{dx}{x} = 0;$$

vagy

$$\frac{dv}{\left(\frac{4}{3}v - \frac{1}{3}\right)^2 - 1} + \frac{9}{8} \frac{dx}{x} = 0.$$

Ez így is írható:

$$\frac{4}{3} \frac{dv}{v - \frac{4}{3}} - \frac{4}{3} \frac{dv}{v + \frac{2}{3}} + \frac{9}{4} \frac{dx}{x} = 0,$$

vagy

$$\frac{dv}{v - 1} - \frac{dv}{v + \frac{1}{2}} + 3 \frac{dx}{x} = 0.$$

Ezt integrálva, kapjuk:

$$\ln \left| \frac{2v - 2}{2v + 1} x^3 \right| = \ln |C_1|;$$

vagy

$$\frac{2v - 2}{2v + 1} x^3 = C_1.$$

Ebből

$$v = \frac{2x^3 + C_1}{2x^3 - 2C_1},$$

vagy, mivel $v = xy$, ezért

$$y = \frac{2x^3 + C_1}{2x^4 - 2C_1x},$$

vagy ha még az integrálási állandó C_1 helyett $C = -\frac{2}{C_1}$, akkor végeredményben:

$$y = \frac{Cx^3 - 1}{Cx^4 + 2x}.$$

c) Keressük a differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását

$$y = \frac{k}{x}$$

alakban.

Ekkor k -ra a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$2k^2 - k - 1 = 0,$$

ahonnan

$$k_1 = 1, \quad k_2 = -\frac{1}{2}.$$

Tehát az adott differenciálegyenlet két partikuláris megoldása:

$$y_1 = \frac{1}{x} \quad \text{és} \quad y_2 = -\frac{1}{2x}.$$

Az általános megoldást

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{u}$$

alakban keressük. Ekkor, mivel

$$y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{u'}{u^2}$$

és

$$y^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{u^2} + \frac{2}{xu},$$

lesz:

$$u' - \frac{4}{x}u = 2.$$

Ennek egy partikuláris megoldása:

$$u_0 = \frac{1}{y_2 - y_1} = -\frac{2x}{3},$$

tehát az általános megoldása:

$$u = -\frac{Cx^4 + 2x}{3}.$$

Visszatérve az eredeti változókra, az adott differenciálegyenlet általános megoldása

$$y = \frac{1}{x} - \frac{3}{Cx^4 + 2x},$$

vagyis

$$y = \frac{Cx^3 - 1}{Cx^4 + 2x}.$$

2. Oldjuk meg az

$$y' + 4y^2 = \frac{1}{x^4}$$

differenciálegyenletet ($x \neq 0$).

Az

$$y = \frac{1}{v}u^2 + \frac{1}{4}u, \quad x = \frac{1}{u}; \quad xy \neq \frac{1}{4}$$

transzformációval új változatokat vezetünk be. Ekkor

$$y' = \frac{dv}{du} \cdot \frac{1}{v^2} u^4 - \frac{2}{v} u^3 - \frac{1}{4} u^2$$

és

$$y^2 = \frac{1}{v^2} u^4 + \frac{1}{16} u^2 + \frac{1}{2v} u^4.$$

*Ezeket behelyettesítve:

$$\frac{dv}{du} \cdot \frac{1}{v^2} u^4 - \frac{2}{v} u^3 - \frac{1}{4} u^2 + \frac{4}{v^2} u^4 + \frac{1}{4} u^2 + \frac{2}{v} u^3 = u^4,$$

vagy

$$\frac{dv}{du} + 4 - v^2 = 0.$$

Ebben a differenciálegyenletben már a változók szétválaszthatók:

$$\frac{dv}{4 - v^2} + du = 0,$$

vagy

$$\frac{dv}{2 - v} + \frac{dv}{2 + v} + 4 du = 0.$$

Integrálva, adódik:

$$\ln \left| \frac{2 + v}{2 - v} \right| + 4u = \ln |C|;$$

vagy

$$\frac{2 + v}{2 - v} = C e^{-4u}.$$

Ebből

$$v = 2 \frac{C e^{-4u} - 1}{C e^{-4u} + 1}.$$

Visszaírva az eredeti változókat, a

$$v = \frac{4}{x(4xy - 1)}, \quad u = \frac{1}{x}$$

inverz transzformáció alapján:

$$\frac{4}{x(4xy - 1)} = 2 \frac{C e^{-\frac{4}{x}} - 1}{C e^{-\frac{4}{x}} + 1};$$

vagy ebből y -t kifejezve:

$$y = \frac{C e^{-\frac{4}{x}} (2 + x) + 2 - x}{4 C x^2 e^{-\frac{4}{x}} - 4 x^2}.$$

Ez a differenciálegyenlet általános megoldása.

3. Oldjuk meg az

$$y' + 9y^2 = x^{-\frac{4}{3}}$$

differenciálegyenletet ($x \neq 0$).

Az

$$y = \frac{1}{u^2 v - \frac{1}{3} u}, \quad x = u^3$$

transzformációval új változókat vezetünk be. Ekkor

$$y' = \frac{1}{\left(u^2 v - \frac{1}{3} u\right)^2} \left(-\frac{1}{3} \frac{dv}{du} - \frac{2}{3} \frac{1}{u} v + \frac{1}{9} \frac{1}{u^2}\right)$$

és

$$y^2 = \frac{1}{\left(u^2 v - \frac{1}{3} u\right)^2}.$$

Ezeket behelyettesítve:

$$-\frac{1}{3} \frac{dv}{du} - \frac{2}{3} \frac{1}{u} v + \frac{1}{9} \frac{1}{u^2} + 9 = v^2 + \frac{1}{9} \frac{1}{u^2} - \frac{2}{3} \frac{1}{u} v,$$

vagy

$$\frac{dv}{du} + 3(v^2 - 9) = 0.$$

Ebben a differenciálegyenletben már a változók szétválaszthatók:

$$\frac{dv}{v^2 - 9} + 3 du = 0;$$

vagy

$$\frac{dv}{v - 3} - \frac{dv}{v + 3} + 6 du = 0.$$

Ezt integrálva, adódik:

$$\ln \left| \frac{v - 3}{v + 3} \right| + 6u = \ln |C|;$$

vagy

$$\frac{v-3}{v+3} = C e^{-6u}.$$

Ebből

$$v = 3 \frac{1 + C e^{-6u}}{1 - C e^{-6u}}.$$

Visszaírva az eredeti változókat, a

$$v = \frac{1 + \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}} y}{x^{\frac{2}{3}} y}, \quad u = x^{\frac{1}{3}}$$

inverz transzformáció alapján:

$$\frac{1 + \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}} y}{x^{\frac{2}{3}} y} = 3 \frac{1 + C e^{-6x^{\frac{1}{3}}}}{1 - C e^{-6x^{\frac{1}{3}}}},$$

vagy ebből y -t kifejezve:

$$y = \frac{1 - C e^{-6x^{\frac{1}{3}}}}{3x^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} + C\left(3x^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}\right)e^{-6x^{\frac{1}{3}}}}$$

Ez a differenciálegyenlet általános megoldása.

4. Oldjuk meg az

$$y' + y^2 + \frac{1}{x}y - \frac{4}{x^2} = 0$$

differenciálegyenletet.

Alkalmazzuk az

$$v = v(x) - \frac{1}{2x}$$

transzformációt. Ekkor, mivel

$$y' = v' + \frac{1}{2x^2}$$

és

$$y^2 = v^2 + \frac{1}{4x^2} - \frac{v}{x},$$

a differenciálegyenlet így alakul:

$$v' + \frac{1}{2x^2} + v^2 + \frac{1}{4x^2} - \frac{v}{x} + \frac{v}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{4}{x^2} = 0,$$

vagy az összevonásokat elvégezve és rendezve:

$$v' + v^2 = \frac{15}{4x^2}.$$

Ez egy speciális típusú Riccati-féle differenciálegyenlet. Ennek egy partikuláris megoldását

$$v = \frac{k}{x}$$

alakban keressük. k -nak ki kell elégítenie a következő másodfokú egyenletet:

$$k^2 - k - \frac{15}{4} = 0,$$

ahonnan

$$k_1 = -\frac{3}{2} \quad \text{és} \quad k_2 = \frac{5}{2}.$$

Tehát két partikuláris megoldás:

$$v_1 = -\frac{3}{2x} \quad \text{és} \quad v_2 = \frac{5}{2x}.$$

Most, ha a

$$v = \frac{1}{u(x)} - \frac{3}{2x}$$

transzformációt alkalmazzuk, akkor az

$$u' + \frac{3}{x}u = 1$$

inhomogén lineáris differenciálegyenletre jutunk, melynek egy partikuláris megoldása:

$$u_0 = \frac{1}{v_2 - v_1} = \frac{x}{4},$$

és mivel a megfelelő

$$U' + \frac{3}{x}U = 0$$

homogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása

$$U = \frac{C_1}{x^3} = \frac{C}{4x^3},$$

azért az általános megoldás:

$$u = \frac{x}{4} + \frac{C}{4x^3} = \frac{x^4 + C}{4x^3}.$$

Visszatérve az eredeti változókra, nyerjük az adott differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y = \frac{1}{u} - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2x} = \frac{2x^4 - 2C}{x^5 + Cx}.$$

5. Oldjuk meg az

$$xy' - xy^2 - (2x^2 + 1)y - x^3 = 0$$

differenciálegyenletet.

Próbálgatással megtalálhatjuk ennek a differenciálegyenletnek egy partikuláris megoldását:

$$y_1 = -x.$$

A differenciálegyenlet általános megoldását az

$$y = -x + z(x)$$

alakban keressük. Ha ezt behelyettesítjük a differenciálegyenletbe, az a következőképpen alakul:

$$x(-1 + z') - x(x^2 + z^2 - 2zx) - (2x^2 + 1)(-x + z) - x^3 = 0;$$

vagy a szorzásokat elvégezve:

$$-x + z'x - x^3 - z^2x + 2zx^2 + 2x^3 + x - 2x^2z - z - x^3 = 0;$$

vagy az összevonás után:

$$z'x - z - xz^2 = 0.$$

Ez egy Bernoulli-féle differenciálegyenlet. Alkalmazzuk a

$$z = \frac{1}{u}, \quad z' = -\frac{u'}{u^2}$$

helyettesítést. Akkor lesz

$$-\frac{u'}{u^2}x - \frac{1}{u} - \frac{1}{u^2}x = 0,$$

vagy

$$u'x + u + x = 0.$$

Ez már egy inhomogén lineáris differenciálegyenlet. A hozzá tartozó homogén lineáris differenciálegyenlet

$$U'x + U = 0,$$

melynek az általános megoldása

$$U = \frac{C_1}{x}.$$

Az inhomogén lineáris differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását az állandó variálásának módszerével az

$$u_0 = \frac{C_1(x)}{x}$$

alakban keressük. Behelyettesítve:

$$\frac{C_1'}{x} x - \frac{C_1}{x^2} x + \frac{C_1}{x} + x = 0,$$

vagyis

$$C_1' = -x,$$

ahonnan

$$C_1(x) = -\frac{1}{2} x^2.$$

Ezzel

$$u = -\frac{1}{2} x + \frac{C_1}{x},$$

vagyis

$$z = \frac{1}{-\frac{1}{2} x + \frac{C_1}{x}} = \frac{2x}{2C_1 - x^2}$$

és

$$\begin{aligned} y &= -x + \frac{2x}{2C_1 - x^2} = \\ &= \frac{-2C_1x + x^3 + 2x}{2C_1 - x^2}. \end{aligned}$$

vagy ha még a C_1 integrálási állandó helyett $2C_1 = C$, akkor a végeredmény:

$$y = \frac{x^3 + 2x - Cx}{C - x^2} = \frac{x[x^2 + (2 - C)]}{C - x^2} = -x + \frac{2x}{C - x^2}.$$

Rajzoljuk meg az általános megoldás által meghatározott görbesereg néhány görbáját (28. ábra).

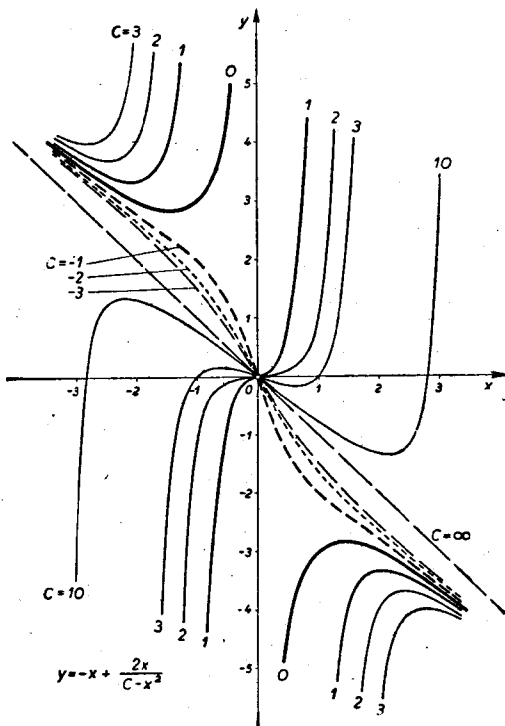
1. Ha $C = 0$, akkor $y = \frac{x(x^2 + 2)}{-x^2}$; itt ha $x \neq 0$, akkor

$$y = \frac{x^2 + 2}{-x} = -x - \frac{2}{x}.$$

2. Ha $C \rightarrow \infty$, akkor $y \rightarrow -x$.

3. Ha $C > 0$, mégpedig:

$$C = 1, \text{ akkor } y = \frac{x(x^2 + 1)}{(1 + x)(1 - x)} = -x + \frac{2x}{1 - x^2};$$



28. ábra

$$C = 2, \text{ akkor } y = \frac{x^3}{(\sqrt{2} + x)(\sqrt{2} - x)} = -x + \frac{2x}{2 - x^2};$$

$$C = 3, \text{ akkor } y = \frac{x(x+1)(x-1)}{(\sqrt{3} + x)(\sqrt{3} - x)} = -x + \frac{2x}{3 - x^2} \text{ stb.}$$

4. Ha $C < 0$, mégpedig:

$$C = -1, \text{ akkor } y = -\frac{x(x^2 + 3)}{x^2 + 1} = -x - \frac{2x}{x^2 + 1};$$

$$C = -2, \text{ akkor } y = -\frac{x(x^2 + 4)}{x^2 + 2} = -x - \frac{2x}{x^2 + 2} \text{ stb.}$$

Feladatok

Az alábbi feladatokban y_1 az adott differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását jelenti.

1. $y' + y^2 = \frac{2}{x^2}.$
2. $4y' + y^2 + 4x^{-2} = 0.$
3. $x^2 y' = x^2 y^2 + xy + 1; y_1 = \frac{k}{x}.$
4. $x^2 y' + (xy - 2)^2 = 0; y_1 = \frac{k}{x}.$
5. $y' = y^2 + \frac{1}{2x^2}.$
6. $y' + y^2 = x^{-\frac{4}{3}}.$
7. $y' = \frac{1}{3}y^2 + \frac{2}{3x^2}.$
8. $y' + y^2 + \frac{1}{x}y - \frac{4}{x^2} = 0.$
9. $y' = y^2 + \frac{1}{x^4}.$
10. $2x^2 y' = (x - 1)(y^2 - x^2) + 2xy; y_1 = x, y_2 = -x.$
11. $y' = (y - 1)(xy - y - x); y_1 = 1.$
12. $y' + y^2 = \frac{1}{x^4}.$
13. $xy' + (m - 1)ax^m(y - x)^2 + y - 2x = 0; y_1 = x.$ Itt a és m megadott állandók.
14. $y' + xy^2 - (2x^2 + 1)y + x^3 + x - 1 = 0; y_1 = x.$
15. $(x^2 + a)y' + 2y^2 - 3xy - a = 0; y_1 = x.$ Itt a = állandó.
16. $2x^2 y' = 2xy + (y^2 - x^2)(x \operatorname{ctg} x - 1); y_1 = x.$
17. $x(x - 1)y' - (1 + 2x)y + y^2 + 2x = 0; y_1 = 1.$
18. $y' + y^2 \sin x = 2 \frac{\sin x}{\cos^2 x}; y_1 = \frac{1}{\cos x}.$
19. $(1 - x^3)y' = y^2 - x^2 y - 2x; y_1 = -x^2.$
20. $(1 - x^2)y' + xy + x y^2 = 2x; y_1 = \text{állandó}.$

5. §. Egzakt differenciálegyenletek. Integráló tényező (Euler-féle multiplikátor)

a) Egzakt differenciálegyenlet

A

$$p(x, y) + q(x, y) y' = 0$$

vagy

$$p(x, y) dx + q(x, y) dy = 0$$

differenciálegyenletet egzaktnak nevezünk, ha van egy olyan folytonos elsőrendű parciális deriváltakkal rendelkező, kétváltozós $F(x, y)$ függvény, melyre

$$\frac{\partial F}{\partial x} = p(x, y) \quad \text{és} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = q(x, y).$$

Ha ez a függvény ismeretes, akkor

$$F(x, y) = C$$

a differenciálegyenlet általános megoldása.

Ha az (x, y) sík egyszerűen összefüggő D tartományában $p(x, y)$, $q(x, y)$, $p_y(x, y)$ és $q_x(x, y)$ létezik és folytonos, az adott differenciálegyenlet akkor egzakt, ha fennáll a

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

integrálhatósági feltétel.

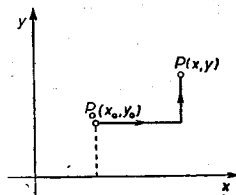
Ha az integrálhatósági feltétel teljesül, akkor a differenciálegyenlet általános megoldását adó $F(x, y)$ függvény az egyszerűen összefüggő D tartomány valamely $P_0(x_0, y_0)$ pontjából kiindul és teljes egészében e tartományban futó, tetszés szerinti görbe mentén vett *vonaltintegrállal* számítható. Célszerűen e görbét úgy szoktuk megválasztani, hogy az a koordináta-tengelyekkel párhuzamos egyenesszakaszokból álljon.

Ha pl. az integrálás útja P_0 -ból kiindulva, először az x tengellyel párhuzamosan halad, majd az y tengellyel párhuzamosan (29. ábra), akkor

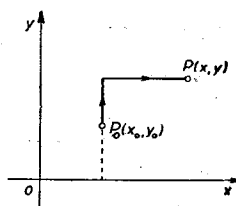
$$F(x, y) = \int_{x_0}^x p(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y q(x, y) dy.$$

Ha viszont az integrálás útja P_0 -ból kiindulva, először az y tengellyel párhuzamosan halad, majd aztán az x tengellyel párhuzamosan (30. ábra), akkor

$$F(x, y) = \int_{y_0}^y q(x_0, y) dy + \int_{x_0}^x p(x, y) dx.$$



29. ábra



30. ábra

Ellenőrzésül szolgál az, hogy az eredményül kapott $F(x, y)$ függvényre fenn kell állnia:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \equiv p(x, y) \quad \text{és} \quad \frac{\partial F}{\partial y} \equiv q(x, y).$$

Sok esetben kényelmesebb, ha — a görbe menti integrálás helyett — először integrálással meghatározzuk azt a $\Phi(x, y)$ függvényt, amelyre fennáll, hogy

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = p(x, y),$$

és ezután az $F(x, y) = \Phi(x, y) + \Psi(y)$ függvényben szereplő $\Psi(y)$ -t meghatározzuk úgy, hogy

$$\frac{\partial F}{\partial y} = q(x, y)$$

egyen. Azaz

$$F(x, y) = \int p(x, y) dx + \int \left\{ q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int p(x, y) dx \right\} dy,$$

vagy fordított sorrendben:

$$F(x, y) = \int q(x, y) dy + \int \left\{ p(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} \int q(x, y) dy \right\} dx.$$

M e g j e g y z é s. A síkbeli

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = p(x, y) \mathbf{i} + q(x, y) \mathbf{j}$$

vektor-vektor függvény (vektortér, vektormező, pl. síkáramlás sebességi vektortere vagy elektromos töltéssel ellátott, „végtelen hosszú” vonal elektrosztatikus erőtere) potenciális akkor, ha az egyszerűen összefüggő D tartományban az x és y irányú összetevőiből alkotott

$$p(x, y) dx + q(x, y) dy$$

kifejezés teljes differenciál. Ekkor ugyanis az

$$\int_L \mathbf{v}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int_L \{ p(x, y) dx + q(x, y) dy \}$$

görbe menti integrál értéke független az integrálás útvonaltól és csak a kezdő- és végponttól függ. Az $F(x, y)$ potenciálfüggvény görbe menti integrállal számítható:

$$F(x, y) = \int_{P_0(x_0, y_0)}^{P(x, y)} \{ p(x, y) dx + q(x, y) dy \}.$$

Ellenőrzésül szolgál az, hogy

$$\text{grad } F = \frac{\partial F}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \mathbf{j} = p(x, y) \mathbf{i} + q(x, y) \mathbf{j} = \mathbf{v}(\mathbf{r}),$$

azaz

$$\frac{\partial F}{\partial x} = p(x, y),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = q(x, y).$$

(Az elektrosztatikai alkalmazásoknál vegyük figyelembe azt, hogy az elektrosztatikus potenciál az általunk itt mondott potenciálfüggvénynek a -1 -szerese.)

Az ekvipotenciális vonalak egyenlete a

$$p(x, y) dx + q(x, y) dy = 0$$

egzakt differenciálegyenlet általános megoldása:

$$F(x, y) = C.$$

b) Integráló tényező
(Euler-féle
multiplikátor)

A $\mu(x, y) \neq 0$ függvény integráló tényező (Euler-féle multiplikátor) akkor, ha a

$$\mu(x, y) p(x, y) + \mu(x, y) q(x, y) y' = 0,$$

vagy másképpen* írva

$$\mu(x, y) p(x, y) dx + \mu(x, y) q(x, y) dy = 0$$

differenciálegyenlet egzakt. Ennek a differenciálegyenletnek a megoldásai nyilván az eredeti

$$p(x, y) + q(x, y) y' = 0$$

(nem egzakt) differenciálegyenletnek $-\mu(x, y) \neq 0$ miatt — is megoldásai.

Ha az egyszeresen összefüggő D tartományban $p(x, y)$, $q(x, y)$, $p_y(x, y)$ és $q_x(x, y)$ létezik és folytonos, a folytonos elsőrendű parciális deriváltakkal rendelkező $\mu(x, y) \neq 0$ függvény D -ben akkor integráló tényező, ha fennáll:

$$q(x, y) \frac{\partial \mu}{\partial x} - p(x, y) \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu(x, y) \left| \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} \right|.$$

Ezt a $\mu(x, y)$ ismeretlen függvényre vonatkozó elsőrendű parciális differenciálegyenletet — bár a mondott feltételek mellett kimutathatóan végtelen sok megoldása van — általában nem tudjuk megoldani. Azonban — mivel egy azonosan el nem tűnő partikuláris megoldás ismerete elégséges — sok esetben $\mu(x, y)$ meghatározható.

Az alábbiakban felsorolunk néhány speciális esetet:

α) μ csak x -től függ, azaz $\mu = \mu(x)$, ha

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x}}{q(x, y)} = f(x); \quad \text{akkor} \quad \mu(x) = e^{\int f(x) dx}.$$

β) μ csak y -től függ, azaz $\mu = \mu(y)$, ha

$$\frac{\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}}{p(x, y)} = f(y); \quad \text{akkor} \quad \mu(y) = e^{\int f(y) dy}.$$

γ) Ha a differenciálegyenlet homogén (fokszámú) és

$$x \cdot p(x, y) + y \cdot q(x, y) \equiv 0,$$

akkor

$$\mu(x, y) = \frac{1}{x \cdot p(x, y) + y \cdot q(x, y)}$$

integráló tényező.

δ) μ csak $(x + y)$ -től függ, azaz $\mu = \mu(x + y)$, ha

$$\frac{\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}}{p(x, y) - q(x, y)} = f(x + y); \quad \text{akkor} \quad \mu(x + y) = e^{\int f(x+y) d(x+y)}.$$

ε) μ csak $(x \cdot y)$ -től függ, azaz $\mu = \mu(x \cdot y)$, ha

$$\frac{\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}}{x \cdot p(x, y) - y \cdot q(x, y)} = f(x \cdot y); \quad \text{akkor} \quad \mu(x \cdot y) = e^{\int f(x \cdot y) d(x \cdot y)}.$$

ζ) μ csak $\left|\frac{y}{x}\right|$ -től függ, azaz $\mu = \mu\left|\frac{y}{x}\right|$, ha

$$\frac{x^2}{x \cdot p(x, y) + y \cdot q(x, y)} \left| \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right| = f\left|\frac{y}{x}\right|; \quad \text{akkor} \quad \mu\left|\frac{y}{x}\right| = e^{\int f\left(\frac{y}{x}\right) d\left(\frac{y}{x}\right)}.$$

η) μ csak $(x^2 + y^2)$ -től függ, azaz $\mu = \mu(x^2 + y^2)$, ha

$$\frac{1}{2 \{y \cdot p(x, y) - x \cdot q(x, y)\}} \left| \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} \right| = f(x^2 + y^2);$$

akkor

$$\mu(x^2 + y^2) = e^{\int f(x^2 + y^2) d(x^2 + y^2)}.$$

6) μ csak a tetszőleges $\omega(x, y)$ függvény függvénye, ha

$$\frac{\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}}{p(x, y) \frac{\partial \omega}{\partial y} - q(x, y) \frac{\partial \omega}{\partial x}} = f[\omega(x, y)]; \quad \text{ekkor} \quad \mu[\omega(x, y)] = e^{\int f(\omega) d\omega}.$$

1) $\mu(x, y) = \frac{1}{p^2 + q^2}$, ha $\frac{\partial p}{\partial x} \equiv \frac{\partial q}{\partial y}$ és $\frac{\partial p}{\partial y} \equiv -\frac{\partial q}{\partial x}$. (Ez esetben $w = p(x, y) + i \cdot q(x, y)$ az (x, y) sík D tartományában a $z = x + iy$ komplex változónak reguláris függvénye.)

2) $\mu(x, y) = m(x) n(y)$, ha

$$\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial x} = p(x, y) f_1(y) - q(x, y) f_2(x).$$

Ekkor ugyanis az integrálhatósági feltétel így alakul:

$$q(x, y) \frac{d m(x)}{dx} n(y) - p(x, y) \frac{d n(y)}{dy} m(x) = m(x) n(y) \{p(x, y) f_1(y) - q(x, y) f_2(x)\}.$$

Ebből átrendezéssel adódik:

$$q(x, y) \left\{ \frac{1}{m(x)} \frac{dm}{dx} + f_2(x) \right\} = p(x, y) \left\{ \frac{1}{n(y)} \frac{dn}{dy} + f_1(y) \right\},$$

s ez kielégül, ha

$$\frac{1}{m} \frac{dm}{dx} + f_2(x) = 0,$$

$$\frac{1}{n} \frac{dn}{dy} + f_1(y) = 0.$$

Eszerint

$$m(x) = e^{-\int f_2(x) dx},$$

$$n(y) = e^{-\int f_1(y) dy},$$

vagyis

$$\mu(x, y) = e^{-\int f_2(x) dx} \cdot e^{-\int f_1(y) dy}.$$

M e g j e g y z é s. 1. Ha a nem egzakt

$$p(x, y) dx + q(x, y) dy = 0$$

differeciálegyenletnek ismeretes két, folytonos elsőrendű parciális deriválttal rendelkező integráló tényezője: $\mu_1(x, y)$ és $\mu_2(x, y)$, melyekre fennáll, hogy

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \mu_1}{\partial x} & \frac{\partial \mu_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \mu_2}{\partial x} & \frac{\partial \mu_2}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0,$$

akkor

$$\frac{\mu_1(x, y)}{\mu_2(x, y)} = C$$

a differenciálegyenlet általános megoldása.

2. Ha a differenciálegyenletnek egy integráló tényezőjét ismerjük, akkor számtalan sok integráló tényezőt is felírhatunk. Tegyük fel ugyanis, hogy μ_1 integráló tényezője a nem egzakt

$$p \, dx + q \, dy = 0$$

differenciálegyenletnek. (Rövidség kedvéért nem írtuk ki p , q és μ_1 argumentumait.) Ekkor kell lennie egy olyan $U(x, y)$ függvénynek, melyre fennáll:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \mu_1 p, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \mu_1 q.$$

Mármost

$$\mu = \mu_1 \cdot \varphi(U)$$

is integráló tényező, ahol φ argumentumának tetszés szerinti differenciálható függvénye. Hiszen

$$\mu_1(p \, dx + q \, dy) = dU$$

teljes differenciál, továbbá

$$\mu_1 \varphi(U) (p \, dx + q \, dy) = \mu (p \, dx + q \, dy) = \varphi(U) dU$$

is teljes differenciál, mégpedig az

$$F(U) = \int \varphi(U) dU$$

függvénynek teljes differenciálja.

3. Ha a síkbeli

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = p(x, y) \mathbf{i} + q(x, y) \mathbf{j}$$

vektor-vektor függvény (vektortér, vektormező) nem potenciális, azaz a

$$p(x, y) \, dx + q(x, y) \, dy$$

kifejezés nem teljes differenciál, akkor bizonyos feltételek mellett mindig létezik egy olyan $\mu(x, y)$ függvény, hogy

$$\mu(x, y) p(x, y) \, dx + \mu(x, y) q(x, y) \, dy$$

teljes differenciál legyen, azaz a

$$\mathbf{w}(\mathbf{r}) = \mu(x, y) \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mu(x, y) p(x, y) \mathbf{i} + \mu(x, y) q(x, y) \mathbf{j}$$

vektor-vektor függvénynek legyen potenciálja.

Példák

1. Oldjuk meg a

$$(4x^3 + 10xy^3 - 3y^4)dx + (15x^2y^2 - 12xy^3 + 5y^4)dy = 0$$

differenciálegyenletet.

Ha

$$p(x, y) = 4x^3 + 10xy^3 - 3y^4$$

és

$$q(x, y) = 15x^2y^2 - 12xy^3 + 5y^4,$$

akkor

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 30xy^2 - 12y^3$$

és

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 30xy^2 - 12y^3.$$

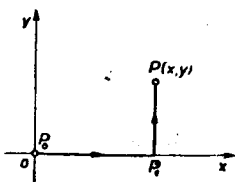
Mivel tehát

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x},$$

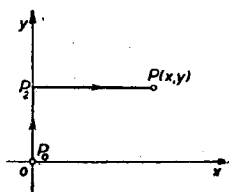
ezért az adott differenciálegyenlet egzakt.

Határozzuk meg a megoldást vonalintegrállal. Mivel $p(x, y)$ és $q(x, y)$ az egész (x, y) síkban mindenütt értelmezett, ezért az integrálás útját bárhogyan választhatjuk.

a) Válasszuk kiindulópontnak az origót $P_0(0, 0)$ és haladjunk először a x tengely mentén a $P_1(x, 0)$ pontig, majd az y tengellyel párhuzamosan a $P(x, y)$ pontig (31. ábra). A választott vonal mentén integrálva, nyerjük a következőt:



31. ábra



32. ábra

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_0^x p(x, 0) dx + \int_0^y q(x, y) dy = \\ &= \int_0^x 4x^3 dx + \int_0^y (15x^2y^2 - 12xy^3 + 5y^4) dy = x^4 + 5x^2y^3 - 3xy^4 + y^5. \end{aligned}$$

Tehát a differenciálegyenlet általános megoldása

$$x^4 + 5x^2y^3 - 3xy^4 + y^5 = C.$$

b) Ha az integrálás útja $P_0 \dots P_2 \dots P$ lett volna, ahol P_0, P_2 és P koordinátái: $(0, 0)$, $(0, y)$ és (x, y) (32. ábra), akkor a számítás így alakult volna:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_0^y q(0, y) dy + \int_0^x p(x, y) dx = \\ &= \int_0^y 5y^4 dy + \int_0^x (4x^3 + 10xy^3 - 3y^4) dx = y^5 + x^4 + 5x^2y^3 - 3xy^4. \end{aligned}$$

A végeredmény természetesen ugyanaz:

$$x^4 + 5x^2y^3 - 3xy^4 + y^5 = C.$$

c) A feladatot így is megoldhatjuk:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int p(x, y) dx + \Psi(y) = \int (4x^3 + 10xy^3 - 3y^4) dx + \Psi(y) = \\ &= x^4 + 5x^2y^3 - 3xy^4 + \Psi(y). \end{aligned}$$

Mivel pedig

$$\frac{\partial F}{\partial y} = q(x, y)$$

kell, hogy legyen, azért

$$15x^2y^2 - 12xy^3 + \frac{d\Psi}{dy} = 15x^2y^2 - 12xy^3 + 5y^4,$$

ahonnan

$$\frac{d\Psi}{dy} = 5y^4,$$

és ebből viszont

$$\Psi(y) = y^5.$$

Tehát

$$F(x, y) = x^4 + 5x^2y^3 - 3xy^4 + y^5.$$

d) Teljesen hasonlóan így is eljárhatunk:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int q(x, y) dy + \Phi(x) = \int (15x^2y^2 - 12xy^3 + 5y^4) dy + \Phi(x) = \\ &= 5x^2y^3 - 3xy^4 + y^5 + \Phi(x). \end{aligned}$$

Mivel pedig

$$\frac{\partial F}{\partial x} = p(x, y)$$

kell, hogy legyen, azért

$$10xy^3 - 3y^4 + \frac{d\Phi}{dx} = 4x^3 + 10xy^3 - 3y^4,$$

ahonnan

$$\frac{d\Phi}{dx} = 4x^3,$$

és ebből viszont

$$\Phi(x) = x^4.$$

Tehát

$$F(x, y) = 5x^2y^3 - 3xy^4 + y^5 + x^4.$$

2. Határozzuk meg az

$$(x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy - y^2) dy = 0$$

differentiálegyenletnek azt a partikuláris megoldását, mely az $x_0 = 0$, $y_0 = -2$ kezdeti feltételt kielégíti.

Mivel

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 2x - 2y = \frac{\partial q}{\partial x},$$

a differentiálegyenlet egzakt.

A feladatot vonalintegrállal a következőképpen oldhatjuk meg:

Az integrálás útja (33. ábra) a $\overline{P_0 P_1}$ és $\overline{P_1 P}$ egyenesekből álljon, ahol $P_0 (0, -2)$, $P_1 (x, -2)$ és $P (x, y)$. Így a keresett megoldás:

$$\int_0^x p(x, -2) dx + \int_{-2}^y q(x, y) dy = 0,$$

azaz

$$\int_0^x (x^2 - 4x - 4) dx + \int_{-2}^y (x^2 - 2xy - y^2) dy = 0.$$

Az integrálást elvégezve:

$$\left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 - 4x \right]_0^x + \left[x^2 y - xy^2 - \frac{y^3}{3} \right]_{-2}^y = 0,$$

vagy a határokat behelyettesítve:

$$\frac{x^3}{3} - 2x^2 - 4x + x^2 y - xy^2 - \frac{y^3}{3} + 2x^2 + 4x - \frac{8}{3} = 0;$$

vagy

$$\frac{x^3}{3} + x^2 y - xy^2 - \frac{y^3}{3} = \frac{8}{3},$$

illetve

$$x^3 + 3x^2 y - 3xy^2 - y^3 = 8.$$

Ez az adott differentiálegyenletnek az adott kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldása.

3. Oldjuk meg az

$$\left(\frac{y}{x+y} \right)^2 dx + \left(\frac{x}{x+y} \right)^2 dy = 0$$

differentiálegyenletet.

Itt

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y^2}{(x+y)^2} \right) = \frac{2xy}{(x+y)^3}$$

és

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^2}{(x+y)^2} \right) = \frac{2xy}{(x+y)^3},$$

vagyis

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Tehát, ha feltesszük, hogy $x + y \neq 0$, vagyis az $y > -x$, vagy $y < -x$ fél-síkra szorítkozunk, akkor az adott egzakt differenciálegyenletre teljesül az integrálható-sági feltétel.

Így

$$F(x, y) = \int \frac{y^2}{(x+y)^2} dx + \Psi(y) = -\frac{y^2}{x+y} + \Psi(y).$$

Mivel pedig fenn kell állania a

$$\frac{\partial F}{\partial y} = q(x, y)$$

egyenlőségnek, azaz

$$\frac{-2xy - y^2}{(x+y)^2} + \frac{d\Psi}{dy} = \frac{x^2}{(x+y)^2},$$

azért

$$\frac{d\Psi}{dy} = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{(x+y)^2} = 1.$$

Innen pedig

$$\Psi(y) = y;$$

végül

$$F(x, y) = y - \frac{y^2}{x+y} = \frac{xy}{x+y},$$

azaz a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\frac{xy}{x+y} = C.$$

4. Oldjuk meg az

$$y dx - x dy = 0$$

differenciálegyenletet.

A differenciálegyenlet nem egzakt, mivel

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 1,$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -1.$$

azaz

$$\frac{\partial p}{\partial y} \neq \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Keressünk egy $\mu(x, y)$ integráló tényezőt. Ha $\mu(x, y)$ integráló tényező, akkor fenn kell állania a következő összefüggésnek:

$$x \frac{\partial \mu}{\partial x} + y \frac{\partial \mu}{\partial y} + 2\mu = 0.$$

a) Ha μ csak x -től függ, vagyis $\mu = \mu_1(x)$, akkor

$$x \frac{d\mu_1}{dx} + 2\mu_1 = 0.$$

És innen

$$\frac{d\mu_1}{\mu_1} + 2 \frac{dx}{x} = 0,$$

azaz

$$\mu_1(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Ezzel az adott differenciálegyenletet megszorozva, nyerjük az

$$\frac{y}{x^2} dx - \frac{1}{x} dy = 0$$

egzakt differenciálegyenletet. Ennek az általános megoldása:

$$-\frac{y}{x} = C_1,$$

vagy

$$y = Cx.$$

b) Találhatunk azonban egy csak y -től függő $\mu = \mu_2(y)$ integráló tényezőt is. Feltételezve ugyanis azt, hogy $\mu = \mu_2(y)$, nyerjük az

$$y \frac{d\mu_2}{dy} + 2\mu_2 = 0$$

differenciálegyenletet. Innen pedig

$$\mu_2(y) = \frac{1}{y^2}.$$

Ezzel az adott differenciálegyenletet megszorozva, nyerjük az

$$\frac{1}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy = 0$$

egzakt differenciálegyenletet. Ennek az általános megoldása:

$$\frac{x}{y} = C_2,$$

vagy

$$y = C x.$$

c) Találhatunk egy, csak az $x \cdot y$ szorzattól függő integráló tényezőt is: $\mu = \mu_3(x \cdot y)$. Ugyanis

$$\frac{\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}}{x \cdot p - y \cdot q} = \frac{-2}{xy + xy} = -\frac{1}{xy},$$

csak az $x \cdot y$ szorzattól függ. Tehát

$$\mu_3(x, y) = e^{-\int \frac{1}{xy} d(xy)} = \frac{1}{xy}.$$

Az adott differenciálegyenletet ezzel megszorozva, nyerjük a

$$\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0$$

egzakt differenciálegyenletet, melynek az általános megoldása:

$$\ln |x| - \ln |y| = \ln |C_2|;$$

vagy

$$\frac{x}{y} = C_2,$$

vagy

$$y = C x.$$

Megjegyezzük, hogy a $\mu_3 = \frac{1}{xy}$ integráló tényezővel az adott differenciálegyenletet megszorozva, nemcsak egzakt differenciálegyenletet kaptunk, hanem egyben egy szétválasztott változójú differenciálegyenletet.

M e g j e g y z é s. Két-két integráló tényező hányadosa ugyancsak a differenciálegyenlet általános megoldását szolgáltatja:

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{y^2}{x^2} = C^2,$$

$$\frac{\mu_1}{\mu_3} = \frac{xy}{x^2} = C,$$

$$\frac{\mu_3}{\mu_2} = \frac{y^2}{xy} = C.$$

Az is könnyen belátható, hogy számtalan sok integráló tényező írható fel a

$$\mu = \frac{1}{x^2} F\left(\frac{y}{x}\right)$$

formula alapján, ahol F az argumentumának tetszés szerinti differenciálható függvénye.

5. Oldjuk meg az

$$(x - 2y) dx + (2x + y) dy = 0$$

differenciálegyenletet.

Itt

$$p(x, y) = x - 2y,$$

$$q(x, y) = 2x + y,$$

és mindkettő homogén elsőfokú.

Mivel

$$x \cdot p(x, y) + y \cdot q(x, y) = x^2 + y^2 \neq 0,$$

ezért

$$\mu(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

egy integráló tényező.

Ha ezzel az adott differenciálegyenletet megszorozzuk, nyerjük az

$$\frac{x - 2y}{x^2 + y^2} dx + \frac{2x + y}{x^2 + y^2} dy = 0$$

egzakt differenciálegyenletet. Ugyanis

$$\frac{\partial(\mu p)}{\partial y} = \frac{2y^2 - 2xy - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

és

$$\frac{\partial(\mu q)}{\partial x} = \frac{2y^2 - 2xy - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

azaz

$$\frac{\partial(\mu p)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu q)}{\partial x}.$$

A differenciálegyenlet megoldása:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int \frac{x - 2x}{x^2 + y^2} dx + \Phi(y) = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + y^2} dx - 2 \int \frac{\frac{dx}{x}}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} + \Phi(y) = \\ &= \ln \sqrt{x^2 + y^2} - 2 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y} + \Phi(y). \end{aligned}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = q(x, y), \quad \text{így} \quad \frac{d\Phi}{dy} = 0.$$

Tehát az adott differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} - 2 \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y} = C.$$

6. Oldjuk meg az

$$(5x^2 + 2xy + 3y^3) dx + 3(x^2 + xy^2 + 2y^3) dy = 0$$

differenciálegyenletet.

Itt

$$p(x, y) = 5x^2 + 2xy + 3y^3$$

és

$$q(x, y) = 3x^2 + 3xy^2 + 6y^3.$$

Mivel

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y}}{p - q} &= \frac{6x + 3y^2 - 2x - 9y^2}{5x^2 + 2xy + 3y^3 - 3x^2 - 3xy^2 - 6y^3} = \\ &= -\frac{6y^2 - 4x}{2x^2 + 2xy - 3xy^2 - 3y^3} = \frac{2}{x + y}, \end{aligned}$$

ezért van egy csak $(x + y)$ -től függő integráló tényező.

Lesz

$$\int \frac{2}{x + y} d(x + y) = 2 \ln(x + y),$$

és így

$$\mu(x + y) = e^{2 \ln(x + y)} = (x + y)^2.$$

Ha ezzel az adott differenciálegyenletet megszorozzuk, nyerjük az

$$\begin{aligned} (5x^4 + 12x^3y + 9x^2y^2 + 3x^2y^3 + 2xy^3 + 6xy^4 + 3y^5) dx + \\ + (3x^4 + 6x^3y + 3x^3y^2 + 3x^2y^2 + 12x^2y^3 + 15xy^4 + 6y^5) dy = 0 \end{aligned}$$

egzakt differenciálegyenletet.

Ennek a megoldása:

$$F(x, y) =$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^x 5x^4 dx + \int (3x^4 + 6x^3y + 3x^3y^2 + 3x^2y^2 + 12x^2y^3 + 15xy^4 + 6y^5) dy = \\ &= x^5 + 3x^4y + 3x^3y^2 + x^3y^3 + x^2y^3 + 3x^2y^4 + 3xy^5 + y^6 = \\ &= (x^2 + y^3)(x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) = (x^2 + y^3)(x + y)^3 = C. \end{aligned}$$

Tehát az adott differenciálegyenlet általános megoldása:

$$(x^2 + y^3)(x + y)^3 = C.$$

7. *Potenciális örvény* ekvipotenciális vonalainak meghatározása. Legyen a potenciális örvényt előidéző síkáramlás sebességvektora:

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} = c_0 \frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} - c_0 \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j} \quad (x \neq 0, y \neq 0).$$

Az örvény magja egy az (x, y) síkot az origóban merőlegesen átdőfő egyenes, a forgás értelme az óramutató járásával megegyezik és c_0 egy pozitív állandó: $2\pi c_0 = \Gamma =$ = cirkuláció. Határozzuk meg az áramlást jellemző ekvipotenciális vonalakat.

Az áramlás potenciális, mert a sebességkomponensekből alkotott

$$v_x dx + v_y dy$$

kifejezés teljes differenciál. Fennáll ugyanis az, hogy

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = c_0 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial v_y}{\partial x}.$$

Ez a feltétele annak, hogy legyen egy olyan $F(x, y)$ függvény — a sebességi potenciál —, melyből a sebességkomponensek parciális deriválással származtathatók:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = v_x = c_0 \frac{y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = v_y = -c_0 \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Az ekvipotenciális vonalak egyenlete:

$$F(x, y) = C,$$

vagyis a

$$v_x dx + v_y dy = 0,$$

azaz a mi példánkban a

$$c_0 \frac{y}{x^2 + y^2} dx - c_0 \frac{x}{x^2 + y^2} dy = 0$$

egzakt differenciálegyenlet általános megoldása.

Ezt a differenciálegyenletet így oldjuk meg:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int v_x dx + \Phi(y) = c_0 \int \frac{y}{x^2 + y^2} dx + \Phi(y) = \\ &= c_0 \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} + \Phi(y) = c_0 \arctg \frac{x}{y} + \Phi(y). \end{aligned}$$

Mivel fenn kell állnia a

$$v_y = \frac{\partial F}{\partial y} = -c_0 \frac{x}{y^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} + \frac{d\Phi}{dy} = -c_0 \frac{x}{x^2 + y^2}$$

egyenletnek, ezért

$$\frac{d\Phi}{dy} = 0,$$

tehát pl.

$$\Phi(y) = 0.$$

Így a differenciálegyenlet általános megoldása, vagyis az ekvipotenciális vonalak egyenlete:

$$c_0 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y} = C_1,$$

vagy

$$y = C x$$

(34. ábra).

Megjegyzés. A feladat megoldása közben nem vettük figyelembe azt, hogy az adott vektortér az origóban nincs értelmezve. Így, ha az egész (x, y) síkot tekintjük, abból az origót ki kell rekesztenünk, de akkor az (x, y) sík — az origó kirekesztésével — már nem egyszerűen összefüggő. Éppen ezért a feladat kidolgozásánál alkalmasnak bizonyult megfontolásaink és eredményeink nem vonatkozhatnak az egész (x, y) síkra hanem csak annak valamely egyszerűen összefüggő részére, pl. az $x > 0$ félsíkra.

Egyébként az eredményül kapott

$$F(x, y) = c_0 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y}$$

potenciál függvény nem egyértékű.

Ennek az a következménye, hogy a vektortérnek az (x, y) sík $P_1(x_1, y_1)$ és $P_2(x_2, y_2)$ pontjait összekötő L görbe menti integráljára csak akkor áll a következő összefüggés:

$$\int_L \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = \int_{P(x_1, y_1)}^{P_2(x_2, y_2)} (v_x \, dx + v_y \, dy) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_1),$$

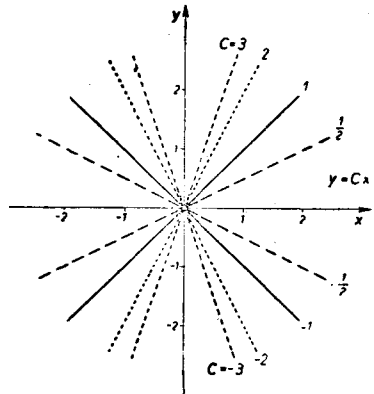
ha az L görbe nem veszi körül az origót, azaz teljes egészében a sík egyszerűen összefüggő részében (pl. az $x > 0$ félsíkon) halad.

Egyébként, ha az L' görbe egy az origót egyszer körülzáró zárt görbe, melyen a körüljárás az óramutató járásával egyező, akkor a vektortérnek az ezen zárt görbe mentén vett integrálja nem zérus, hanem

$$\oint_L \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = 2\pi c_0 = \Gamma.$$

Ha pedig az L'' zárt görbe egy az origót n -szer körülvevő görbe, melyen a körüljárás az óramutató járásával egyező, akkor

$$\oint_{L''} \mathbf{v} \, d\mathbf{r} = 2\pi n c_0 = n \Gamma.$$



34. ábra

Ezért az adott vektortér

$$F(x, y) = c_0 \arctg \frac{x}{y}$$

potenciálját ciklikus potenciálnak nevezzük.

8. Két párhuzamos, ellenkező előjelű elektromos töltéssel ellátott „végtelen hosszú” vonal elektrosztatikai erőtere:

$$E = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{a-x}{(a-x)^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \mathbf{i} + \\ + \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{-y}{(a-x)^2 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \mathbf{j}.$$

(Ha $y = 0$, akkor $x \neq 0$, $x \neq a$.)

Itt az (x, y) síkot úgy választottuk meg, hogy a két párhuzamos vonalra merőleges legyen. A $+Q$ töltésű vonal a $(0, 0)$ pontban és a $-Q$ töltésű vonal az $(a, 0)$ pontban dőli az (x, y) síkot; ϵ_0 a levegő dielektromos állandója.

Határozzuk meg az ekvipotenciális vonalak egyenletét.

Az adott erőter potenciális, mert a vektortér komponenseiből alkotott

$$E_x dx + E_y dy$$

kifejezés teljes differenciál. Fennáll ugyanis az, hogy

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \left[\frac{2y(a-x)}{[(a-x)^2 + y^2]^2} + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right] = \frac{\partial E_y}{\partial x}.$$

Ez a feltétele annak, hogy legyen egy olyan $U(x, y)$ függvény — az elektrosztatikai potenciál —, melyből az erőter komponensei parciális deriválással származtathatók:

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{a-x}{(a-x)^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + y^2} \right), \\ E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{-y}{(a-x)^2 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

Az ekvipotenciális vonalak egyenlete:

$$U(x, y) = C,$$

vagyis az

$$E_x dx + E_y dy = 0,$$

azaz a mi példánkban a

$$\frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{a-x}{(a-x)^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + y^2} \right) dx + \\ + \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{-y}{(a-x)^2 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^2} \right) dy = 0$$

egzakt differenciálegyenlet általános megoldása.

lapotegyenletet is, határesetként, magában foglalja a van der Waals-féle állapotegyenlet:

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT,$$

ahol a és b a gázra jellemző állandók.

A továbbiakban a Clapeyron-egyenlet érvényességét fogjuk feltételezni.

A hőmennyiségeket — mechanikai egyenértéküknek megfelelő egységekben kifejezve — Q -val fogjuk jelölni. dQ ennek a differenciálja.

Képzeliük el azt, hogy a v térfogat megváltoztatása nélkül bizonyos hőmennyiséget közlünk a gázzal. Ekkor a gáz hőmérséklete meg fog változni. Ha c_v jelenti a gáznak állandó térfogaton vett fajhőjét, akkor a hőmérsékletváltozás és a közölt hőmennyiség között a következő az összefüggés:

$$dQ = c_v dT.$$

A c_v természetesen a v térfogatnak és a T hőmérsékletnek a függvénye (s így természetesen végeredményben a három állapotjelző függvénye).

Képzeliük most el azt, hogy a tartály olyan deformációra képes, hogy a gázzal töltött térfogat dv -vel megváltozhat. Ekkor a gáz $p \cdot dv$ nagyságú munkát végez, és ennek megfelelően csökken a belső energiája. Ennek a veszteségnek a következménye az lesz, hogy a hőmérséklet dT -vel csökken, és ez egy meghatározott dQ hőmennyiséggel helyettesíthető. Ebből következik az, hogy ha állandó hőmérséklet mellett dQ hőmennyiséget közlünk a gázzal, a gáz térfogata dv -vel megváltozik:

$$dQ = l dv,$$

ahol l a három állapotjelző közül kettőnek a függvénye.

A fentiek alapján a gázzal közölt dQ hőmennyiség egy részéről, dQ_1 -ről feltehetjük azt, hogy az az állandó v térfogat mellett a gáz hőmérsékletének megváltozását idézi elő, a többi pedig ($dQ_2 = dQ - dQ_1$) a gáz állandó hőmérséklet melletti térfogatváltozását idézi elő. Ekkor fennáll, hogy

$$dQ_1 = c_v dT,$$

ahol c_v -t az állapotjelzők kezdeti értékei határozzák meg, és

$$dQ_2 = l dv,$$

ahol l értékét a kezdeti v érték és a dT -vel megnövelt kezdeti T érték határozza meg. Ha azonban dQ_1 és így dT is „elegendő kicsik”, akkor feltehetjük azt, hogy l értékét is a kezdeti v és T értékek határozzák meg.

Összefoglalva, azt mondhatjuk, hogy ha a gázzal dQ hőmennyiséget közlünk, akkor a gáz állapota megváltozik úgy, hogy fennáll

$$dQ = c_v dT + l dv. \quad (1)$$

ahol c_v és l értékét a v és T kezdeti értékei határozzák meg.

(Megjegyezzük, hogy csupán egyszerűsítés miatt tételeztük fel azt, hogy dQ_1 és dQ_2 pozitívok.)

Ennek az összefüggésnek természetesen más alakot adhatunk akkor, ha v és T helyett másképpen választjuk meg — a három állapotjelzők közül — a két független

paramétert. Így, ha T és p a független változók, akkor mivel

$$dv = \frac{\partial v}{\partial p} dp + \frac{\partial v}{\partial T} dT,$$

lesz

$$dQ = \left[c_v + l \frac{\partial v}{\partial T} \right] dT + l \frac{\partial v}{\partial p} dp,$$

vagy ha rövidség kedvéért azt írjuk, hogy

$$c_v + l \frac{\partial v}{\partial T} = c_p$$

és

$$l \frac{\partial v}{\partial p} = L,$$

akkor

$$dQ = c_p dT + L dp. \quad (2)$$

Itt c_p jelenti az állandó nyomáshoz tartozó fajhőjét a gáznak.

Ha pedig p és v a választott független paraméterek, akkor mivel

$$dT = \frac{\partial T}{\partial p} dp + \frac{\partial T}{\partial v} dv,$$

lesz

$$dQ = P dp + V dv, \quad (3)$$

ahol mindjárt, rövidítésként bevezettük a

$$c_v \frac{\partial T}{\partial p} = P$$

és

$$c_p \frac{\partial T}{\partial v} = l + c_v \frac{\partial T}{\partial v} = V$$

jelöléseket.

A fenti bevezetés után p -t és v -t választva független paramétereknek, a termodinamika I. főtételét a következőképpen fogalmazhatjuk (Carathéodory):

A

$$dU = dQ - p dv = P dp + (V - p) dv$$

kifejezés teljes differenciál, vagyis fennáll, hogy

$$\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial V}{\partial p} - 1.$$

Így tehát ennek a teljes differenciálnak az integrálásával egy, csak az integrál felső határától függő, egyértelmű U állapotfüggvényt lehet meghatározni, ez a gáz energiája.

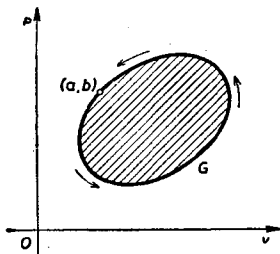
Ha egy derékszögű koordináta-rendszerben pl. v az abszcisszatengely és p az ordinátatengely, akkor a v és p értékek által jellemzett gázállapotot a (v, p) ponttal

ábrázolhatjuk. Egy rögzített (a, b) pontból kiindul és ugyanoda visszaérkező G zárt görbét kiválasztva, az egy, ún. körfolyamatot fog ábrázolni (36. ábra). Ezt a zárt görbét integrálási útnak választva, a termodinamika I. főtételenek fenti megfogalmazása alapján, fennáll:

$$\int_G dU = \int_G (dQ - p dv) = \int_G dQ - \int_G p dv = 0.$$

Az itt szereplő

$$\int_G dQ$$



36. ábra

integrál adja az egész körfolyamat alatt a gázzal közölt hőmennyiséget; az

$$\int_G p dv$$

integrál [a (v, p) síkon, a G zárt görbe által bezárt területnek a mérőszáma] pedig az egész körfolyamat alatt a gáz által végzett munkát adja. Tehát a termodinamika I. főtétele alapján:

Egy körfolyamat alatt a gáz által végzett munka egyenlő a közölt hőmennyiséggel.

Ha a dQ -ra felírt (1) egyenletre alkalmazzuk az imént mondottakat, akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial c_v}{\partial v} = \frac{\partial l}{\partial T} - \frac{\partial p}{\partial T}.$$

Ennek az összefüggésnek a II. főtétele megfogalmazásánál lesz jelentősége, mert itt most T és v lesznek a független paraméterek.

A II. főtétele így fogalmazhatjuk (Carathéodory):

A

$$dQ = c_v dT + l dv$$

kifejezés nem teljes differenciál, de $\frac{1}{T}$ integráló tényezője.

Tehát a

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{c_v}{T} dT + \frac{l}{T} dv$$

teljes differenciál integrálásával egy másik állapotfüggvényt lehet meghatározni: S a gáz entrópiája.

Az integrálhatóság feltétele a következőképpen írható:

$$\frac{\partial c_v}{\partial v} = \frac{\partial l}{\partial T} - \frac{l}{T},$$

vagy az I. főtétel alapján még átalakítva:

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{l}{T}.$$

A fenti összefüggések igen egyszerű alakot öltenek, ha az állapotjelzők értékészlete csak olyan intervallumba esik, amelynél a Clapeyron-egyenlet érvényes. Ekkor ugyanis:

$$p = R \frac{T}{v}, \quad \frac{l}{T} = \frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{v}, \quad \text{azaz} \quad l = R \frac{T}{v} = p;$$

$$v = R \frac{T}{p}, \quad L = l \frac{\partial v}{\partial p} = -Rl \frac{T}{p^2} = -R \frac{T}{p}, \quad L = -v.$$

Az állandó térfogathoz tartozó c_v fajhő, melyről eddig feltettük, hogy v és T függvénye, és melyre azt találtuk, hogy

$$\frac{\partial c_v}{\partial v} = \frac{\partial l}{\partial T} - \frac{\partial p}{\partial T},$$

mivel $l = p$, ezért csak T függvénye.

Továbbá

$$c_p = c_v + l \frac{\partial v}{\partial T} = c_v + p \frac{R}{p},$$

azaz

$$c_p = c_v + R.$$

Összefoglalva tehát, ha érvényes a Clapeyron-egyenlet, akkor c_v csak T értékétől függ, és a dQ -ra talált (1 – 3) egyenletek a következő alakot öltik:

$$dQ = c_v dT + p dv. \quad (1a)$$

$$dQ = (c_v + R) dT - v dp. \quad (2a)$$

$$dQ = \frac{v c_v}{R} dp + \frac{p (c_v + R)}{R} dv. \quad (3a)$$

Az energia és az entrópia differenciálja ez esetben:

$$dU = c_v dT, \quad \text{illetve} \quad dS = \frac{c_v}{T} dT + R \frac{dv}{v},$$

azaz

$$U = \int c_v dT + \text{állandó},$$

illetve

$$S = \int \frac{c_v}{T} dT + R \ln v + \text{állandó}.$$

Az ezekben az integrálokban szereplő c_v és T állandóknak tekinthetők, és így

$$U = c_v T + \text{állandó},$$

és

$$S = c_v \ln T + R \ln v + \text{állandó}.$$

Feladatok

a) Gyakorló feladatok

a) Egzakt differenciálegyenletek

1. $2 + 4y e^{xy} + (3 + 4x e^{xy}) y' = 0.$
2. $\cos x - e^{-x} \sin y + (e^{-x} \cos y) y' = 0.$
3. $3x^2 - 6xy + (3y^2 - 3x^2) y' = 0.$
4. $\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \cos x \sin y + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \sin x \cos y \right) y' = 0.$
5. $y \cos x - \sin(x - y) + [\sin x + \sin(x - y)] y' = 0.$
6. $2xy - 2y - 1 + (x^2 - 2x - 2y) y' = 0.$
7. $\cos(x + y) - \sin(x - y) + [\cos(x + y) + \sin(x - y)] y' = 0.$
8. $\frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{y y'}{x^2 + y^2} = 0.$
9. $(2x - 2y) dx + (2y - 2x) dy = 0.$
10. $(ax + by) dx + (bx + cy) dy = 0.$ Itt a, b és c megadott állandók.
11. $(3x^2 + y^2) dx + 2y(x - 2a) dy = 0.$ Itt $a =$ állandó.
12. $(3x^2 - ay) dx + (3y^2 - ax) dy = 0.$ Itt $a =$ állandó.
13. $[x(x^2 + y^2) - a^2 x] dx + [y(x^2 + y^2) + a^2 y] dy = 0.$ Itt $a =$ állandó.
14. $x y^2 dx + (2y^3 + 3b y^2 + b^2 y - a^2 y + x^2 y - a^2 b) dy = 0.$ Itt a és b megadott állandók.
15. $\frac{(1 + y^2) y dx + (1 + x^2) x dy}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}} = 0.$
16. $\ln(y^2 + 1) dx + \frac{2y(x - 1)}{y^2 + 1} dy = 0.$
17. $(3x^2 + 4xy) dx + (2x^2 + 3y^2) dy = 0.$
18. $[3ax^2 + 2(a + 2h)xy + (b + 2h)y^2] dx + [(a + 2h)x^2 + 2(b + 2h)xy + 3by^2] dy = 0.$ Itt a, b és h megadott állandók.
19. $(4x^3 y - 12x^2 y^2 + 5x^2 + 3x) y' + 6x^2 y^2 - 8x y^3 + 10xy + 3y = 0.$
20. $\frac{x^2 y'}{y} + 2x \ln y = 0.$
21. $(\cos x - x \cos y) dy - (\sin y + y \sin x) dx = 0.$
22. $2 \frac{x + a}{y + b} dx - \left| \frac{x + a}{y + b} \right|^2 dy = 0.$ Itt a és b megadott állandók.
23. $\frac{(1 - y^2) dx + (1 - x^2) dy}{(1 + xy)^2} = 0.$

24. $e^y dx + (xe^y - 2y) dy = 0.$
 25. $(x^2 + y^2) dx + 2xy dy = 0.$
 26. $x(x - 2y) dy - y(y - 2x) dx = 0.$
 27. $(3x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy - 3y^2) dy = 0.$
 28. $(y \cos^2 x - \sin x) dy - y \cos x (y \sin x + 1) dx = 0.$
 29. $e^x (y^3 + x y^3 + 1) dx + 3y^2 (x e^x - 6) dy = 0.$
 30. $(1 - \cos y + y \cos x) dx + (2 + \sin x + x \sin y) dy = 0.$
 31. $(y^2 + 1)^{\frac{3}{2}} dx + (y^2 + 3xy \sqrt{y^2 + 1}) dy = 0.$
 32. $(4x^2 + y^2) \sqrt{x^2 + y^2} dx + 3xy \sqrt{x^2 + y^2} dy = 0.$
 33. $\frac{2x - 3y}{y} dx + \frac{4y^2 - x^2}{y^2} dy = 0.$
 34. $\frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2} = dx.$ 35. $\frac{(2x^2 + y^2) dx + xy dy}{x^3 + xy^2} = 0.$

β) Integráló tényező (Euler-féle multiplikátor)

1. $y(1 + xy) dx - x dy = 0.$
 2. $y(2x + y^3) dx - x(2x - y^3) dy = 0.$ 3. $x dy - y dx = (x^2 - y^2) dx.$
 4. $y dx - (x + y) dy = 0.$ 5. $x dy - (x^2 + y) dx = 0.$
 6. $x dy + y dx = y^2 dx.$ 7. $y^2 dx + x^2 dy - 2xy dy = 0.$
 8. $y(3x - 2y) dx + x(x - 2y) dy = 0.$
 9. $(2xy + y^2) dx + (2x^2 + 3xy) dy = 0.$
 10. $(x + y) dy + (x - y) dx = 0.$ 11. $dy = \left| \frac{1}{\cos x} - y \operatorname{tg} x \right| dx.$
 12. $dy = \left| y \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} \right| dx.$ 13. $y dx + (y e^x - 1) dy = 0.$
 14. $e^y (y dx - dy) = e^x (x dy - dx).$
 15. $(2y^3 - 5ax^3) dx + 3xy^2 dy = 0.$ Itt $a = \text{állandó}.$
 16. $(3xy + 2y^2) dx + (3xy + 2x^2) dy = 0.$
 17. $(x^2 - 2xy - 3y^2) dx - (y^2 - 2xy - 3x^2) dy = 0.$
 18. $y(x^2 + 2y^2) dx + x(y^2 + 2x^2) dy = 0.$
 19. $(4x^2 + 3y^2) dx + xy dy = 0.$ 20. $(1 - xy) dx + (xy - x^2) dy = 0.$
 21. $(x y^3 + 2x^2 y^2 - y^2) dx + (x^2 y^2 + 2x^3 y - 2x^2) dy = 0.$
 22. $(x + y) dx + dy = 0.$ 23. $(x^3 + y^4) dx + 8x y^3 dy = 0.$

24. $x y^3 dx + (x^2 y^2 - 1) dy = 0.$ 25. $(1 - xy) dx + (1 - x^2) dy = 0.$
 26. $y^2 dx + (xy + 1) dy = 0.$ 27. $dx + [1 + (x + y) \operatorname{tg} y] dy = 0.$
 28. $(x^3 - 2 y^3 - 3xy) dx + 3x (y^2 + x) dy = 0.$
 29. $(x^2 - y^2 + 1) dx + (x^2 - y^2 - 1) dy = 0.$
 30. $(2 x^2 + xy + a^2) y dx + (x + 2y) (x^2 + a^2) dy = 0.$ Itt $a = \text{állandó}.$
 31. $(3 x^5 y^8 - y^3) dx + (5 x^6 y^7 + x^3) dy = 0.$
 32. $(y + 1) dx + (xy + y^2 + y + 1) dy = 0.$
 33. $(7 x^3 + 3 x^2 y + 4y) dx + (4 x^3 + x + 5y) dy = 0.$
 34. $\left| 2xy + x^2 y + \frac{y^3}{3} \right| dx + (x^2 + y^2) dy = 0.$
 35. $(x - y^2) dx + 2xy dy = 0.$

b) Fizikai feladatok

1. Legyen egy párhuzamos síkáramlás sebességvektora:

$$\mathbf{v} = c_0 \cos \alpha \mathbf{i} + c_0 \sin \alpha \mathbf{j},$$

ahol $c_0 = \text{állandó}$ a sebesség abszolút értéke, $\alpha = \text{állandó}$ pedig a sebességvektor és az x tengely pozitív szára közti szög. Határozzuk meg az ekvipotenciális vonalak egyenletét.

2. Egy az origóban elhelyezett forrás (nyelő) által előidézett síkáramlás sebességvektora:

$$\mathbf{v} = c_0 \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + c_0 \frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{j}.$$

Ha Q jelenti a forrás ($Q > 0$) vagy nyelő ($Q < 0$) erősségét, akkor az itt szereplő $c_0 = \text{állandó}$ jelentése:

$$c_0 = \frac{Q}{2\pi}.$$

Határozzuk meg az ekvipotenciális vonalak egyenletét.

3. Két, egymással $\frac{\pi}{2}$ szöget bezáró fal közötti áramlás sebességvektora:

$$\mathbf{v} = c_0 x \mathbf{i} - c_0 y \mathbf{j}.$$

Itt $c_0 = \text{állandó}$, és legyen $x > 0$, $y > 0$. Határozzuk meg az ekvipotenciális vonalak egyenletét.

4. Helyezzünk el egy x tengellyel párhuzamos, $c_0 = \text{állandó}$ sebességű párhuzamos síkáramlásba egy $Q = \text{állandó}$ bőségű forrást. Az eredő síkáramlás sebességvektora:

$$\mathbf{v} = \left| c_0 + \frac{Q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \right| \mathbf{i} + \frac{Q}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{j}.$$

Határozzuk meg az ekvipotenciális vonalak egyenletét.

5. Legyen egy az origóban elhelyezett és az x tengely pozitív irányába mutató dipólus momentuma M . Az ezáltal létesített síkáramlás sebességvektora:

$$\mathbf{v} = M \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \mathbf{i} - M \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \mathbf{j}.$$

Határozzuk meg az ekvipotenciális vonalak egyenletét.

6. Helyezzünk az origóba egy az x tengely pozitív irányába mutató, M momentumú dipólust, az x tengely pozitív irányában haladó c_0 sebességű párhuzamos áramlásba. (Ideális folyadéknak „végtelen hosszú” körhenger körüli párhuzamos áramlása.) Az eredő síkáramlás sebességvektora:

$$\mathbf{v} = \left[c_0 + M \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} \right] \mathbf{i} - M \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \mathbf{j}.$$

Határozzuk meg az ekvipotenciális vonalak egyenletét.

Az előző feladatban szereplő síkáramlásra szuperponáljunk még egy Γ erősségű potenciális örvényt. (Ideális folyadéknak „végtelen hosszú” körhenger körüli cirkulációs áramlása.) Az eredő síkáramlás sebességvektora:

$$\mathbf{v} = \left[c_0 + M \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \right] \mathbf{i} - \left[M \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \right] \mathbf{j}.$$

Határozzuk meg az ekvipotenciális vonalak egyenletét.

5. §. Általános megoldási módszerek az ismeretlen függvény deriváltjára nézve explicit alakban megadott differenciálegyenleteknél

a) Iránymező. Izoklinák

Tekintsük az

$$y' = f(x, y)$$

differenciálegyenletet, ahol $f(x, y)$ az (x, y) sík egy bizonyos D tartományában értelmezett függvény. Ez a differenciálegyenlet a tartomány minden egyes pontjához megadja annak az iránytényezőnek az értékét, mellyel a differenciálegyenlet megoldása által meghatározott görbe érintője abban a pontban rendelkezik. Ha a D tartomány minden egyes $P(x, y)$ pontjában az $f(x, y)$ érték által meghatározott érintő irányát egy egyenesszakasszal, ún. *vonalelemmel* (Lie) ábrázoljuk, akkor egy *iránymezőt* nyerünk

Az

$$y' = f(x, y)$$

differenciálegyenlet geometriai képe, a fenti értelmezés szerinti iránymező gyakorlatilag kevéssé szemléletes. Bizonyos rendet vihetünk ebbe a képbe akkor, ha azokat a görbéket vizsgáljuk, amelyeken

$$y' = f(x, y) = \text{állandó}.$$

Ezeket a görbéket — az azonos irányú vonalelemeket hordozó görbéket — *izoklinák*-nak nevezzük.

Az egyes izoklinákhoz tartozó vonalelemek közös irányát gyakorlatilag könnyen megszerkeszthetjük, ha pl. az

$$f(x, y) = C$$

görbének és az $f(x, C) = C$ egyenletből adódó $x = x(C)$ összefüggéssel meghatározott

$$x = x(C)$$

$$y = C \cdot x(C)$$

paraméteres egyenletrendszerű görbének metszéspontját az origóval összekötjük. Ez az egyenes a C -hez tartozó vonalelemekkel párhuzamos.

Az

$$y' = t(x, y) = C$$

izoklinák serege a differenciálegyenlet vonalelemeit elvileg áttekinthető rendbe foglalja.

Az izoklinák segítségével az

$$y' = f(x, y)$$

differenciálegyenlet közelítő megoldását grafikusán úgy származtathatjuk, hogy az „elég sűrű” felrajzolt izoklinák seregén — szintén „elég sűrű” — kijelöljük az ott érvényes vonalemeket, s ebbe az iránymezőbe olyan görbét rajzolunk, amelyek a megfelelő vonalemeket minden pontjukban érintik. Minden egyes ilyen görbe a differenciálegyenlet egy integrálgörbéjének közelítő görbéje.

Megjegyezzük azt, hogy a fenti módszer gyakorlatilag alig használatos,* mert a közelítés pontossága általában igen kevés kielégítő, s általában egyáltalán nincs arányban az izoklinák felrajzolásának nehézségeivel. Viszont a fenti szerkesztés igen sok esetben elvileg lényegesen hozzájárulhat a differenciálegyenlet megoldásával kapcsolatos geometriai viszonyok tisztázásához.

A differenciálegyenlet integrálgörbéinek áttekintésére lényeges, hogy azok maximum-, illetve minimumpontjait, illetve inflexiós pontjait is ismerjük. A maximum, illetve minimum szükséges feltétele, hogy

$$y' = f(x, y) = 0$$

legyen. Ha még az

$$f(x, y) = 0$$

görbe ellenkező előjelű iránytangensű vonalemeket hordozó izoklinákat választ e egymástól, akkor ez az

$$f(x, y) = 0$$

egyenletű izoklina valóban az integrálgörbék maximum-, illetve minimumpontjainak geometriai helye.

Az inflexiós pontok geometriai helyének meghatározásához képeznünk kell az

$$y'' = f'_x + f_y \cdot y' = f'_x + f_y \cdot f(x, y)$$

második deriváltat. Az

$$y'' = 0$$

* A differenciálegyenletek egyéb, gyakorlatilag használatos, grafikus megoldási módszereit lásd a sorozat további kötetiben.

görbe az integrálgörbék inflexió pontjainak geometriai helye akkor, ha e görbe két oldalán y'' előjele ellenkező (vagy $y''' \neq 0$).

Az alábbiakban, néhány egyszerű típusú differenciálegyenlet izoklínáit mutatjuk be:

$\alpha)$ $y' = f(x)$. Itt $f(x)$ egy, az $a < x < b$ intervallumban értelmezett függvény. Az $a < x < b$, $-\infty < y < \infty$ tartomány minden pontjához tartozik egy vonalelem. Minden olyan ponthoz, amelynek abszcisszája ugyanaz, ugyanakkora iránytangensű vonalelem tartozik. Tehát az izoklínák az y tengellyel párhuzamos egyenesek: $f(x) = C$, azaz $x = k$.

$\beta)$ $y' = g(y)$. Itt $g(y)$ egy a $c < y < d$ intervallumban értelmezett függvény. A $-\infty < x < \infty$, $c < y < d$ tartomány minden pontjához tartozik egy vonalelem. Minden olyan ponthoz, melynek ordinátája ugyanaz, ugyanakkora iránytangensű vonalelem tartozik. Tehát az izoklínák az x tengellyel párhuzamos egyenesek: $g(y) = C$, azaz $y = k$.

$\gamma)$ $y' = f(ax + by + c)$. Itt $a \neq 0$, $b \neq 0$ és f egy, az $r < ax + by + c < s$ intervallumban értelmezett függvény. Az izoklínák $-\frac{a}{b}$ iránytangensű, párhuzamos egyenesek: $f(ax + by + c) = C$, azaz $y = -\frac{a}{b}x + k$.

$\delta)$ $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Itt $x \neq 0$ és f egy, az $r < \frac{y}{x} < s$ intervallumban értelmezett függvény. Az izoklínák origóból kiinduló félsugarak:

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = C, \text{ azaz } y = kx.$$

$\epsilon)$ $y' + g(x)y + h(x) = 0$. Itt $g(x)$ és $h(x)$ az $a < x < b$ intervallumban értelmezett függvények.

Ha

$$g(x_0) = 0,$$

akkor az $x = x_0$ egyenes minden pontjához az

$$y' = -h(x_0)$$

iránytangens tartozik, tehát ez az y tengellyel párhuzamos egyenes egy izoklína.

Legyen a továbbiakban x_0 olyan, hogy $g(x_0) \neq 0$. Ekkor az (x_0, y_0) ponthoz — az adott inhomogén lineáris differenciálegyenlet által — hozzárendelt vonalelem az

$$\eta - y_0 = -(\xi - x_0)[g(x_0)y_0 + h(x_0)]$$

egyenes egy darabja. Ennek az egyenesnek a futópontja a (ξ, η) pont. Az ugyanakkora abszcisszájú, de különböző ordinátájú (x_0, y_1) ponthoz tartozó vonalelem az

$$\eta - y_1 = -(\xi - x_0)[g(x_0)y_1 + h(x_0)]$$

egyenes egy darabja. E két egyenes metszéspontjának koordinátái:

$$\xi = x_0 + \frac{1}{g(x_0)}, \quad \eta = -\frac{h(x_0)}{g(x_0)},$$

azaz csak az x_0 abszcisszától függenek. Ebből következik, hogy ha az $x = x_0$ egyen eshez hozzátartozó vonalelemeket meghosszabbítjuk valamelyik irányban, akkor olyan egyeneseket nyerünk, melyek egy pontban metszik egymást. Az y tengellyel párhuzamos egyenesek egyes pontjaihoz hozzátartozó vonalelemek meghosszabbításával nyert egyenesek metszéspontjainak geometriai helye a

$$\xi = x + \frac{1}{g(x)}$$

$$\eta = -\frac{h(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

paraméteres egyenletrendszerrel meghatározott görbe. (Itt x a paraméter, ξ és η pedig a görbe pontjainak koordinátái.)

Ha az adott lineáris differenciálegyenlethez tartozó fenti görbét (az ún. *izopunktál görbét*) megrajzoljuk és az egyes pontjaihoz a hozzátartozó x paraméter értékét odairjuk, akkor ezzel a differenciálegyenlethez tartozó iránymezőt könnyen áttekinthető módon rendezetté tesszük.

b) Sorozatos közelítés (szukcesszív approximáció, Picard–Lindelöf)

Legyen az

$$y' = f(x, y)$$

differenciálegyenlet jobb oldalán álló $f(x, y)$ függvény az

$$|x - x_0| < a \leq \infty, \quad |y - y_0| < b \leq \infty$$

tartományban folytonos és korlátos, azaz

$$|f(x, y)| \leq A$$

(ahol A egy pozitív állandó), továbbá ugyanott tegyen eleget az

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq M |y_2 - y_1|$$

(ahol M egy pozitív állandó) Lipschitz-feltételnek, akkor az

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_0) dx,$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_1(x)) dx,$$

$$y_3(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_2(x)) dx,$$

.....

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(x, y_{n-1}(x)) dx,$$

.....

függvénysorozat $n \rightarrow \infty$ esetén — legalább az

$$|x - x_0| < \text{Min} \left[a, \frac{b}{A} \right]$$

intervallumban — az adott differenciálegyenletnek, az $y_0 = y(x_0)$ adott kezdeti feltételt kielégítő, $y = y(x)$ megoldásához konvergál.

Az n -edik közelítésre fennáll, hogy

$$|y_n(x) - y(x)| \leq \frac{A}{M} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{M^k |x - x_0|^k}{k!}.$$

Ez az eljárás numerikus, közelítő számolásra is alkalmas. Ez esetben a jobboldali integrálok kiszámítására numerikus, közelítő módszert kell alkalmaznunk. (Ezekről bővebbet lásd a sorozat további kötetekben!)

c) Közelítő megoldás hatványsor alakjában

Ha az

$$y' = f(x, y)$$

differenciálegyenlet jobb oldalán álló függvény az

$$|x - x_0| < a \leq \infty, \quad |y - y_0| < b \leq \infty$$

tartományban folytonos és korlátos, azaz $|f(x, y)| \leq A$, és az

$$f(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij} (x - x_0)^i (y - y_0)^j$$

alakban hatványsorba fejthető, akkor az adott differenciálegyenletnek az $y_0 = y(x_0)$ kezdeti feltételt kielégítő, $y = y(x)$ megoldása az $x = x_0$ hely környezetében az

$$y(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k (x - x_0)^k$$

hatványsor alakjában előállítható. Ez a hatványsor legalább az

$$|x - x_0| < \text{Min} \left[a, \frac{b}{A} \right]$$

intervallumban konvergens. A c_k együtthatókat a

$$\sum_{k=1}^{\infty} k c_k (x - x_0)^{k-1} = \sum_{i,j} a_{ij} (x - x_0)^i \cdot \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} c_k (x - x_0)^k \right\}'$$

egyenletben a megfelelő együtthatók összehasonlításával határozhatjuk meg.

Példák

1. Határozzuk meg az izoklínák segítségével az

$$y' = 1 + xy$$

differenciálegyenlet közelítő megoldását.

Az izoklínák görbeseregének egyenlete:

$$C = 1 + xy,$$

azaz

$$y = \frac{C - 1}{x}.$$

Ezek egyenlő szárú hiperbolák, melyeknek közös aszimptotái a koordináta-tengelyek.

A koordináta-tengelyek egyes pontjaihoz tartozó vonalelemek irányát a következő megfontolással határozhatjuk meg:

Az y tengelyen $x = 0$, y pedig tetszőleges. Ekkor a differenciálegyenlet szerint

$$y' = C = 1.$$

Ha most a két változó szerepét felcseréljük: x az ismeretlen függvény és y a független változó, akkor a differenciálegyenletet

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1 + xy}$$

alakban írhatjuk. Ekkor az x tengelyen: $y = 0$ és x tetszőleges. De akkor a differenciálegyenlet szerint

$$\frac{dx}{dy} = 1,$$

azaz itt is

$$y' = C = 1.$$

Tehát az izoklínák görbeseregéhez hozzátartozik a két koordináta-tengely, mégpedig mindkettő $tg \vartheta = 1$ iránytangensű vonalelemeket hordoz.

A vízszintes vonalelemek izoklínája ($tg \vartheta = C = 0$) az

$$y = -\frac{1}{x}$$

egyenletű hiperbola. Ez a görbe egyben az (x, y) síkot három résztartományra osztja. Ezek közül a középsőben az integrálgörbék érintő iránytangense pozitív, vagyis az integrálgörbék ebben a tartományban — növekvő x -ekkel együtt — emelkednek; a másik két résztartományban viszont az integrálgörbék érintő iránytangense negatív, tehát az integrálgörbék e két tartományban, növekvő x -ekkel együtt süllyednek.

Hogy az egyes izoklínákhoz tartozó vonalelemek irányát meghatározhassuk, ki kellene a C paramétert az

$$y = Cx$$

$$C = 1 + Cx^2$$

egyenletekből. Így az adódik, hogy

$$x^2 = 1 - \frac{1}{C},$$

illetve

$$y = \frac{x}{1-x^2}.$$

Ennek a görbének az egyes izoklinákkal való metszéspontjait az origóval összekötve megkapjuk a metszéspontokhoz tartozó vonalelemek irányát (37. ábra). Ennek a görbének azonban csak az az ága lesz érvényes, melynél valós C iránytangens értékekhez valós x értékek tartoznak. Mivel pedig

ha $C < 0$, akkor $x^2 > 1$,

illetve

ha $C \geq 1$, akkor $0 \leq x^2 < 1$,

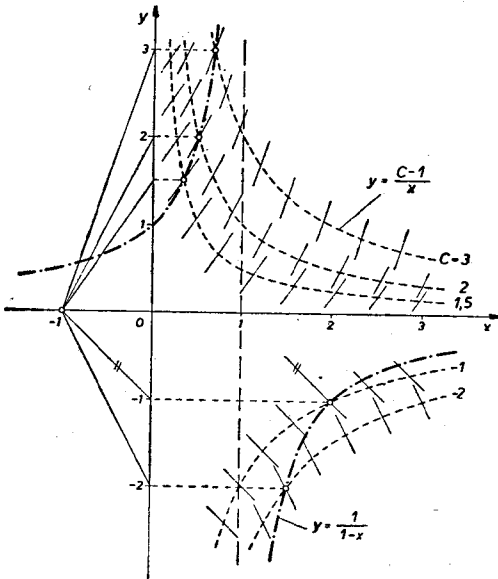
ezért ez a görbe a

$$0 < C < 1$$

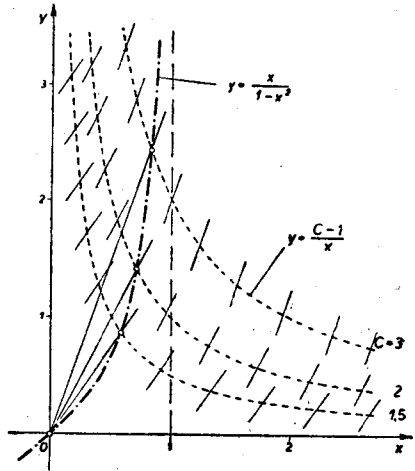
iránytangensű vonalelemeket nem határozza meg.

Éppen ezért célszerűbb, ha a vonalelemek irányát pl. az

$$y = \frac{C-1}{x}$$



38. ábra



37. ábra

izoklinákkal és a

$$\operatorname{tg} \vartheta = C = \frac{y}{1}$$

irányháromszöggel határozzuk meg. E két egyenletből C -t kiküszöbölve, adódik az

$$y = \frac{1}{1-x}$$

egyenletű görbe. Ez az a görbe, amelynek az izoklinákkal való metszéspontjait, ha az y tengelyre vetítjük és e pontokat a $(-1, 0)$ ponttal összekötjük, megkapjuk a metszéspontokhoz tartozó vonalelemek irányát (38. ábra).

Figyelemmel arra, hogy a megoldandó differenciálegyenlet lineáris, az iránymezőt az a) ε) pontban

mondottak alapján is megszerkeszthetjük. Az ottani jelöléseknek megfelelően, a mi esetünkben

$$g(x) = -x,$$

$$h(x) = -1.$$

Tehát az $x = 0$ egyenes egyes pontjaihoz tartozó vonalelemek iránytangense

$$y' = -h(0) = 1.$$

Bármely $x = \text{állandó}$ egyenes egyes pontjaihoz tartozó vonalelemek a

$$\xi = x - \frac{1}{x},$$

$$\eta = -\frac{1}{x}$$

görbe segítségével rajzolhatók meg (39. ábra).

Az integrálgörbék áttekintésére lényeges, hogy azok szélsőérték-, illetve inflexiós pontjainak geometriai helyét meghatározzuk. Szélsőérték csak ott lehet, ahol $y' = 0$. Ez pedig az

$$y = -\frac{1}{x}$$

hiperbolát adja. Hogy eldöntsük azt, hogy e görbe két ágán levő pontokban az integrálgörbéknek maximuma vagy minimuma van-e, képeznünk kell y'' -t:

$$y'' = x y' + y = x(1 + x y) + y.$$

Ha ide behelyettesítjük az $y = -\frac{1}{x}$ értéket, akkor

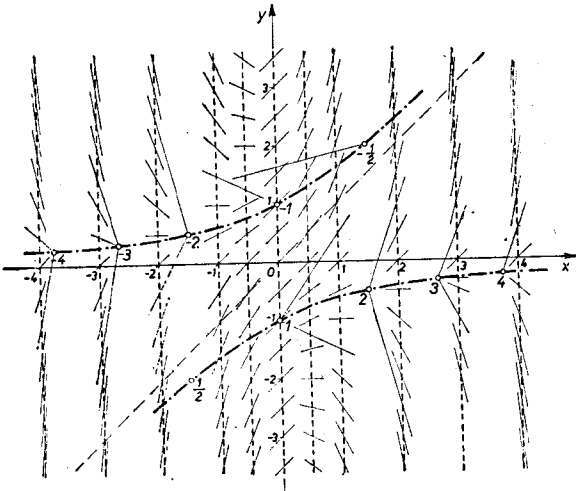
$$y'' = -\frac{1}{x}.$$

Vagyis

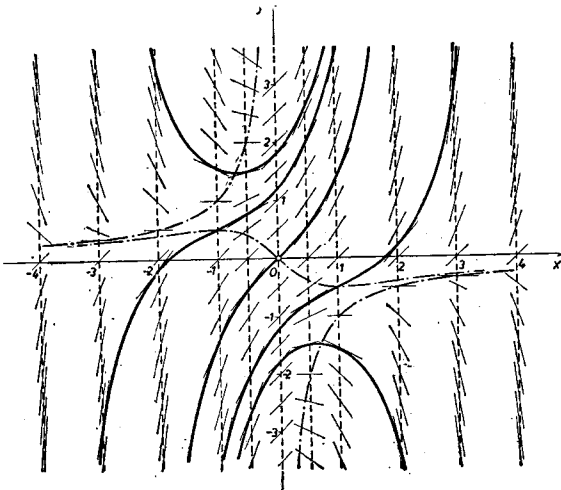
$$y'' < 0, \text{ ha } x > 0$$

és

$$y'' > 0, \text{ ha } x < 0.$$



39. ábra



40. ábra

Tehát az $y = -\frac{1}{x}$ hiperbolának pozitív x -ekhez tartozó ága az integrálgörbék maximumpontjainak geometriai helye, a másik ága pedig a minimumpontok geometriai helye.

Az inflexiós pontok geometriai helyét az $y'' = 0$ egyenletből kapjuk:

$$y = -\frac{x}{1+x^2}.$$

E görbe valóban az inflexiós pontok geometriai helye, mert e görbe pontjaiban

$$y''' = \frac{2}{1+x^2} \neq 0.$$

Ezzel a differenciálegyenlet integrálgörbéit közelítőleg megrajzolhatjuk (40. ábra).

2. Határozzuk meg az

$$y' = yx$$

differenciálegyenletnek az $y(0) = 1$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldását sorozatos közelítéssel.

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x x \, dx = 1 + \frac{x^2}{2},$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x \left(x + \frac{x^3}{2} \right) dx = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 4},$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x \left(x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2 \cdot 4} \right) dx = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 4} + \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6},$$

.....

$$\begin{aligned} y_n(x) &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 4} + \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots + \frac{x^{2n}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} = \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{x^2}{2} \right)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{x^2}{2} \right)^3 + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{x^2}{2} \right)^n, \end{aligned}$$

tehát

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{x^2}{2} \right)^k = e^{\frac{x^2}{2}}.$$

3. Határozzuk meg az

$$y' = x + y$$

differenciálegyenlet általános megoldását hatványsor alakjában.

Feltételezzük, hogy a megoldás az

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots$$

hatványsor, mely az $|x| \leq \varrho$ intervallumban egyenletesen összetartó, s így

$$y' = a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + 4 a_4 x^3 + \dots$$

Helyettesítsük ezeket be a differenciálegyenletbe:

$$a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + 4 a_4 x^3 + \dots \equiv x + a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots,$$

vagy másképpen:

$$a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + 4 a_4 x^3 + \dots \equiv a_0 + (a_1 + 1) x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

Ez pedig x -ben identikusan csak akkor állhat fenn, ha x megfelelő hatványainak együtthatói mindkét oldalról megegyeznek, azaz

$$a_1 = a_0,$$

$$2 a_2 = a_1 + 1,$$

$$3 a_3 = a_2,$$

$$4 a_4 = a_3,$$

$$5 a_5 = a_4, \dots$$

Ebből következik, hogy

$$a_1 = a_0,$$

$$a_2 = \frac{a_0 + 1}{1 \cdot 2},$$

$$a_3 = \frac{a_0 + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$a_4 = \frac{a_0 + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

$$a_5 = \frac{a_0 + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5},$$

.....

Tehát

$$\begin{aligned} y &= a_0 + a_0 x + \frac{a_0 + 1}{2!} x^2 + \frac{a_0 + 1}{3!} x^3 + \frac{a_0 + 1}{4!} x^4 + \frac{a_0 + 1}{5!} x^5 + \dots = \\ &= (a_0 + 1) \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right) - x - 1 = \\ &= (a_0 + 1) e^x - x - 1. \end{aligned}$$

Vagy ha még

$$a_0 + 1 = C,$$

végeredményben

$$y = C e^x - x - 1.$$

4. Határozzuk meg az előző feladatban szereplő

$$y' = x + y$$

differenciálegyenlet általános megoldását Taylor-sor alakjában.

Feltesszük azt, hogy ha $x = 0$, akkor $y(0) = a_0$. Ekkor az adott differenciálegyenlet szerint

$$y'(0) = a_0.$$

Képezzük az ismeretlen függvény magasabb rendű deriváltjait:

$$y'' = 1 + y',$$

$$y''' = y'',$$

$$y^{(4)} = y''',$$

$$y^{(5)} = y^{(4)},$$

.....

Behelyettesítve az $x = 0$, $y(0) = y'(0) = a_0$ értékeket:

$$y''(0) = a_0 + 1,$$

$$y'''(0) = a_0 + 1,$$

$$y^{(4)}(0) = a_0 + 1,$$

$$y^{(5)}(0) = a_0 + 1,$$

.....

Mivel $y = y(x)$ Taylor-sora

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \frac{y'''(0)}{3!} x^3 + \frac{y^{(4)}(0)}{4!} x^4 + \dots,$$

ezért a mi esetünkben:

$$y = a_0 + a_0 x + \frac{a_0 + 1}{2!} x^2 + \frac{a_0 + 1}{3!} x^3 + \frac{a_0 + 1}{4!} x^4 + \dots =$$

$$= (a_0 + 1) \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right) - x - 1 =$$

$$= (a_0 + 1) e^x - x - 1.$$

Végeredményben

$$y = C e^x - x - 1.$$

Feladatok

a) Az iránymező és az izoklinák megrajzolása

Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek közelítő megoldását az iránymező (izoklinák) megrajzolása alapján:

1. $x + y y' = 0.$

2. $x y' - y + \sqrt{x^2 + y^2} = 0.$

3. $y' = x^2 + y^2.$

4. $y' = x + y.$

5. $y' = \sqrt{\frac{1}{y^2} - 1}.$

6. $y' = x^2 - y^2.$

7. $y' = 1 + y^2.$

8. $y' = (x + y)^2.$

9. $x y' - y = x^3 + 1.$

10. $x y' + 2y = 3x.$

b) Közelítő megoldás sorozatos közelítéssel, illetve hatványsor alakjában

Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket sorozatos közelítéssel, illetve hatványsor alakjában, az adott kezdeti feltételek mellett:

1. $y' = x y + 1; y(0) = 1.$

2. $y' = \sqrt{1 - y^2}; y(0) = 0.$ (Csak Taylor-sor alakjában keressük a megoldást.)

3. $y' = x^2 + y^2; y(0) = 1.$

4. $y' = x + \sin y; y(1) = 0.$ (Csak Taylor-sor alakjában keressük a megoldást.)

5. $y' = 1 + y^2; y(0) = 0.$

7. §. Szinguláris pontok

Ha az $y' = f(x, y)$ alakú differenciálegyenlet jobb oldalán álló $f(x, y)$ függvény az

$$|x - x_0| < a \leq \infty, |y - y_0| < b \leq \infty$$

tartományban folytonos és korlátos, azaz

$$|f(x, y)| \leq A \quad (\text{ahol } A \text{ egy pozitív állandó}),$$

továbbá ugyanott eleget tesz az

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq M |y_2 - y_1| \quad (\text{ahol } M \text{ egy pozitív állandó})$$

Lipschitz-feltételnek, akkor az adott differenciálegyenletnek egyetlen egy olyan $y = y(x)$ megoldása létezik, mely az

$$|x - x_0| \leq h$$

intervallumban (ahol h az a és b számok kisebbike) értelmezett és folytonos és $x = x_0$ -ra az y_0 értéket veszi fel. (Megoldás egzisztenciája és unicitása. L. még a Bevezetés b) pontját és a 6. § b) pontját.)

Az alábbiakban azt az esetet vizsgáljuk, amikor az említett feltételek közül nem teljesül $f(x, y)$ -ra a korlátosság. Feltesszük tehát azt, hogy az $f(x, y)$ függvény az (x_0, y_0) pont környezetében nem korlátos. Két eset lehetséges:

1. $|f(x, y)| \rightarrow \infty$, ha $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$. Ekkor $\frac{1}{f(x, y)} \rightarrow 0$. Ha most az adott differenciálegyenletet

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}$$

alakban írjuk (x az ismeretlen függvény és y a független változó), feltéve, hogy erre a differenciálegyenletre az egzisztencia és unicitás feltétele teljesül, akkor van egy olyan

$$x = x(y)$$

megoldás, melyre $x = x_0$, $y = y_0$ esetén $\frac{dx}{dy} = 0$, eszerint az integrálgörbének az (x_0, y_0) pontban az y tengellyel párhuzamos érintője van.

2. $f(x, y)$ azonkívül, hogy nem korlátos az (x_0, y_0) pont környezetében, nincs egyértelmű $\pm \infty$ határértéke, ha $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, hanem a határátmenettől függő határértékhez tart. Ilyenkor $f(x, y)$ -nak szinguláris pontja van az (x_0, y_0) pontban.

Ha pl. $f(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, azaz

$$y' = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)},$$

és van olyan (x_0, y_0) pont, ahol P és Q egyaránt 0, azaz $P(x_0, y_0) = 0$, $Q(x_0, y_0) = 0$ és ha még

$$\begin{vmatrix} P'_x(x_0, y_0) & P'_y(x_0, y_0) \\ Q'_x(x_0, y_0) & Q'_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

akkor (x_0, y_0) szinguláris pont. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

Tegyük fel még azt, hogy a $P(x, y)$ és $Q(x, y)$ függvények x és y szerint akárhányszor differenciálhatók és helyettesítsük e függvényeket x és y szerint haladó hatványsoruk elsőfokú tagjaival:

$$P(x, y) \approx P'_x(0, 0)x + P'_y(0, 0)y,$$

$$Q(x, y) \approx Q'_x(0, 0)x + Q'_y(0, 0)y.$$

Ha most a λ -ra nézve másodfokú

$$\begin{vmatrix} Q'_x(0, 0) - \lambda & P'_x(0, 0) \\ Q'_y(0, 0) & P'_y(0, 0) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

egyenlet mindkét gyökének valós része nem 0, akkor a szinguláris pont jellegének megállapítása szempontjából az előbb említett közelítés megfelelő.

(Ha ez a λ -ra tett feltétel nem teljesül, akkor a $P(x, y)$ és $Q(x, y)$ hatványsorának elsőfokú tagjai nem határozzák meg a szinguláris pont jellegét, s így kiegészítő vizsgálat szükséges. Ezzel azonban itt nem foglalkozunk, csak megemlítjük, hogy ha λ valós része 0, akkor a szinguláris pont centrum vagy fókusz. L. később a γ) és δ) pontban.)

Éppen ezért a szinguláris pont jellegére vonatkozó különböző esetek áttekintésére elégséges az

$$y' = \frac{ax + by}{cx + dy} \quad \left(\text{ahol} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \right)$$

homogén fokszerű) differenciálegyenletet vizsgálni, az origó környezetében.

Állandó együtthatójú

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha x + \beta y \\ \eta &= \gamma x + \delta y \end{aligned} \quad \left(\text{ahol} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0 \right)$$

lineáris transzformációval átalakítjuk a differenciálegyenletet a lehető legegyszerűbb alakúra (l. az 1. kidolgozott példát):

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\gamma(cx + dy) + \delta(ax + by)}{\alpha(cx + dy) + \beta(ax + by)} = \frac{\lambda(\gamma x + \delta y)}{\mu(\alpha x + \beta y)} = \frac{\lambda}{\mu} \frac{\eta}{\xi}.$$

és μ ugyanannak a másodfokú egyenletnek a gyökei:

$$\begin{vmatrix} c - \lambda & a \\ d & b - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

A következő esetek lehetségesek:

a) $\lambda_1 \neq \lambda_2$, mindkettő valós, és egyező előjelűek: $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$. A transzformációk után differenciálegyenletünk:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \frac{\eta}{\xi},$$

vagy

$$\frac{d\eta}{\eta} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \cdot \frac{d\xi}{\xi},$$

ahonnan

$$\eta = C \cdot \left| \xi \right|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} \quad (C \neq 0).$$

Az integrálgörbék átmennek a $\xi = \eta = 0$ kezdőponton, val amennyien érintik a ξ -tengelyt. $\eta = 0$ és $\xi = 0$ is megoldások. A $\xi = \eta = 0$ szinguláris pont ún. *csomópont* (l. az 1. példát).

β) $\lambda_1 \neq \lambda_2$, mindkettő valós és különböző előjelűek: $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -k < 0$. A

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -k \frac{\eta}{\xi}$$

differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\eta = C \left| \xi \right|^{-k} \quad (C \neq 0)$$

Ezek az integrálgörbék nem mennek át a szinguláris ponton. Van azonban még két megoldás: $\xi = 0$ és $\eta = 0$. A $\xi = \eta = 0$ szinguláris pont ún. *nyeregpont* (l. a 2. példát).

γ) λ_1 és λ_2 konjugált komplexek:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= p + qi, \\ \lambda_2 &= p - qi\end{aligned}\quad (p \neq 0).$$

Célszerű még egy lineáris transzformációt alkalmazni:

$$\xi = u + i v,$$

$$\eta = u - i v.$$

Ezzel a

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\lambda_1 \eta}{\lambda_2 \xi}$$

differenciálegyenletből lesz:

$$\frac{du - i dv}{du + i dv} = \frac{(p + qi)(u - i v)}{(p - qi)(u + i v)},$$

vagy

$$(p v - q u) du = (p u + q v) dv.$$

Ez még így is írható:

$$q \frac{u du + v dv}{u^2 + v^2} = p \frac{v du - u dv}{u^2 + v^2},$$

ahonnan

$$\ln \sqrt{u^2 + v^2} + \frac{p}{q} \arctg \frac{u}{v} = \ln |C|,$$

vagy ha az (u, v) síkban polárkoordinátákat vezetünk be:

$$r = C e^{-\frac{p}{q} \varphi} \quad (C \neq 0).$$

Az integrálgörbék tehát logaritmikus spirálisok, melyeknek az origó aszimptotikus pontja; mindegyik görbe közeledik a kezdőponthoz anélkül, hogy az érintő eközben határhelyezethez közeledne. A szinguláris pont ún. *fókus* (*örvénypont*). (L. a 3. példát.)

δ) A λ_1 és λ_2 gyökök tiszta képzetes számok:

$$\lambda_1 = qi,$$

$$\lambda_2 = -qi.$$

Az előző transzformációval kapjuk ($p = 0$) az

$$u du + v dv = 0$$

differenciálegyenletet, melynek általános megoldása:

$$u^2 + v^2 = C.$$

Az integrálgörbék tehát zárt görbék, melyek a szinguláris pontot körülfogják; a szinguláris ponton egyetlen egy integrálgörbe sem halad keresztül. A szinguláris pont ún. *centrum* (*középpont*). (L. a 4. példát.)

$\varepsilon)$ $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ valós gyök. Ekkor a

$$\begin{vmatrix} c - \lambda & a \\ d & b - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

egyenlet diszkriminánsa:

$$(b - c)^2 + 4ad = 0$$

és

$$\lambda = \frac{b + c}{2}.$$

Az α és β számokat meghatározó egyenletrendszer a következő lesz:

$$-\frac{b - c}{2} \alpha + a \beta = 0,$$

$$d \alpha + \frac{b - c}{2} \beta = 0.$$

Tegyük fel, hogy ebben az egyenletrendszerben α és β együtthatói nem mind 0-val egyenlők. Ekkor a két egyenlet nem független, és pl.

$$\alpha = a,$$

$$\beta = \frac{b - c}{2}.$$

Alkalmazzuk a

$$\xi = ax + \frac{b - c}{2} y,$$

$$\eta = y$$

transzformációt. Ekkor lesz

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi + \lambda \eta}{\lambda \xi},$$

vagy

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta}{\xi} + \frac{1}{\lambda}.$$

Ennek az általános megoldása:

$$\eta = \frac{1}{\lambda} \xi \ln |\xi| + C \xi.$$

Ezenkívül még $\xi = 0$ is megoldás. Ezúttal az összes integrálgörbék áthaladnak az origón és érintőjük vertikális. A szinguláris pont ismét *csomópont*.

Ha az előző feltevésünkől eltérően, a

$$-\frac{b - c}{2} \alpha + a \beta = 0$$

$$d \alpha + \frac{b - c}{2} \beta = 0$$

egyenletrendszerben az összes együtthatók 0-val egyenlők, azaz $a = d = 0$, $b = c = \lambda$, akkor az eredeti differenciálegyenlet

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

alakú, melynek általános megoldása:

$$y = C x.$$

Az origó ismét *csomópont* (ún. *dikritikus csomópont*). Mindegyik integrálgörbe átmegy a kezdőponton.

Példák

1. Vizsgáljuk az

$$y' = \frac{12x + 41y}{34x + 12y}$$

differenciálegyenletet. Határozzuk meg a szinguláris pont jellegét.

A differenciálegyenlet jobb oldalán álló függvény számlálója és nevezője a koordináta-rendszer kezdőpontjában 0, tehát ez a pont szinguláris pont.

Az állandó együtthatójú

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha x + \beta y \\ \eta &= \gamma x + \delta y \end{aligned} \quad \left(\text{ahol } \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0 \right)$$

lineáris transzformációval átalakítjuk a differenciálegyenletet a lehető legegyszerűbb alakúra.

Az alkalmazandó transzformáció szerint:

$$d\xi = \alpha dx + \beta dy, \quad d\eta = \gamma dx + \delta dy.$$

A differenciálegyenletet így is írhatjuk:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{dx}{12x + 41y} = \frac{dx}{34x + 12y},$$

ahonnan

$$d\eta = k(12x + 41y),$$

$$d\xi = k(34x + 12y).$$

(Itt k arányossági tényező.)

Ezekkel a differenciálegyenlet így alakul:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\gamma(34x + 12y) + \delta(12x + 41y)}{\alpha(34x + 12y) + \beta(12x + 41y)}.$$

Azt akarjuk elérni, hogy a számláló $\lambda_1 \eta$ és a nevező pedig $\lambda_2 \xi$ alakúvá váljék, vagyis hogy fennálljon a

$$\gamma(34x + 12y) + \delta(12x + 41y) = \lambda_1 \eta = \lambda_1 (\gamma x + \delta y)$$

és

$$\alpha (34x + 12y) + \beta (12x + 41y) = \lambda_2 \xi = \lambda_2 (\alpha x + \beta y)$$

azonosság.

Ezekből a transzformáció — egyelőre ismeretlen — állandóira kapjuk a

$$(34 - \lambda_1) \gamma + 12 \delta = 0$$

$$12 \gamma + (41 - \lambda_1) \delta = 0,$$

illetve

$$(34 - \lambda_2) \alpha + 12 \beta = 0$$

$$12 \alpha + (41 - \lambda_2) \beta = 0$$

egyenletrendszereket. Csupa zérustól különböző megoldás csak akkor van, ha λ_1 , illetve λ_2 a

$$\begin{vmatrix} 34 - \lambda & 12 \\ 12 & 41 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

másodfokú egyenlet gyökei.

Ha ezt kifejtjük, kapjuk, hogy

$$\lambda^2 - 75\lambda + 1250 = 0,$$

ahonnan

$$\lambda_1 = 50 \quad \text{és} \quad \lambda_2 = 25.$$

 λ_1 és λ_2 értékét behelyettesítve az egyenletrendszerek egy-egy, pl. első egyenleteibe:

$$-16\gamma + 12\delta = 0,$$

$$9\alpha + 12\beta = 0.$$

Ezekből például

$$\alpha = 4, \quad \beta = -3,$$

$$\gamma = 3, \quad \delta = 4.$$

Vagyis, ha alkalmazzuk a

$$\xi = 4x - 3y,$$

$$\eta = 3x + 4y$$

lineáris transzformációt, akkor a differenciálegyenlet a következő alakú lesz:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = 2 \frac{\eta}{\xi}.$$

Ennek az általános megoldása:

$$\eta = C \xi^2 \quad (C \neq 0).$$

Ezenkívül még $\eta = 0$ és $\xi = 0$ is megoldások.

Tehát az eredeti differenciálegyenlet általános megoldása:

$$3x + 4y = C (4x - 3y)^2 \quad (C \neq 0).$$

Ezenkívül még két megoldás van: $y = \frac{4}{3}x$ és $y = -\frac{3}{4}x$. Az általános megoldás által meghatározott integrálgörbék másodfokú parabolák.

A transzformációnál szereplő λ_1 és λ_2 értékek valósak és megegyező előjelűek, tehát — amint az a transzformációval nyert differenciálegyenlet

$$\eta = C\xi^2$$

általános megoldásából látszik — a koordináta-rendszer kezdőpontja *csomópont*: az összes integrálgörbék átmennek e ponton.

Az integrálgörbékét könnyen megrajzolhatjuk, ha figyelembe vesszük, hogy a

$$\xi = 4x - 3y$$

$$\eta = 3x + 4y$$

lineáris transzformáció csupán a koordináta-rendszernek a kezdőpont körüli elforgatását jelenti. Ha ugyanis i -vel jelöljük az x tengely pozitív irányába mutató egységvektort és j -yel az y tengely pozitív irányába mutató egységvektort, és hasonlóan i' jelenti a ξ tengely, j' pedig az η tengely egységvektorát, akkor fennáll, hogy

$$i' = \frac{4}{5}i - \frac{3}{5}j,$$

$$j' = \frac{3}{5}i + \frac{4}{5}j,$$

és eszerint

$$i'j' = 0,$$

vagyis i' merőleges j' -re, továbbá mivel az i' és j által bezárt szög koszinusza (-1) -szereése a j' és i által bezárt szög koszinuszának, ezért valóban — tükrözés nélküli — forgatásról van szó (41. ábra).

2. Vizsgáljuk az

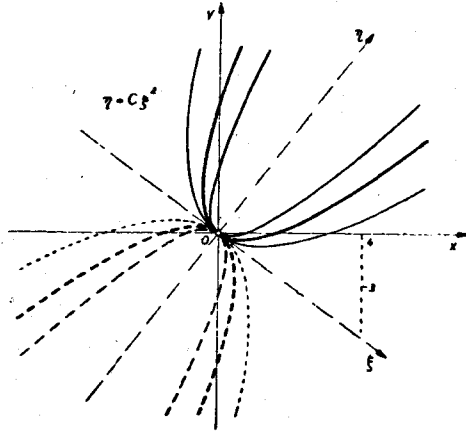
$$y' = \frac{24x - 7y}{7x + 24y}$$

differenciálegyenletet. Határozzuk meg a szinguláris pont jellegét.

Az előző, kidolgozott példához hasonlóan:

$$\xi = \alpha x + \beta y$$

$$\eta = \gamma x + \delta y$$



41. ábra

lineáris transzformációt alkalmazunk. Az itt szereplő együtthatókra csupa 0-tól különböző megoldást csak akkor kaphatunk, ha λ kielégíti a

$$\begin{vmatrix} 7 - \lambda & 24 \\ 24 & -7 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

egyenletet, azaz

$$\lambda^2 - 625 = 0.$$

Innen $\lambda_1 = -25$ és $\lambda_2 = 25$. Ezekkel egyrészt

$$32\alpha + 24\beta = 0,$$

azaz például

$$\alpha = 3,$$

$$\beta = -4,$$

másrészt

$$-18\gamma + 24\delta = 0,$$

azaz például

$$\gamma = 4,$$

$$\delta = 3.$$

Ha tehát alkalmazzuk a

$$\xi = 3x - 4y,$$

$$\eta = 4x + 3y$$

lineáris transzformációt, akkor differenciálegyenletünk a következő alakú lesz:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\eta}{\xi}.$$

Ennek az általános megoldása:

$$\eta = C \frac{1}{\xi} \quad (C \neq 0),$$

és ezenkívül $\eta = 0$ és $\xi = 0$ is megoldások.

Ennek megfelelően az eredeti differenciálegyenlet általános megoldása:

$$3x - 4y = \frac{C}{4x + 3y} \quad (C \neq 0),$$

vagy másképpen írva:

$$12x^2 - 7xy - 12y^2 = C \quad (C \neq 0).$$

Ezenkívül még $y = -\frac{4}{3}x$ és $y = \frac{3}{4}x$ is megoldások. Az általános megoldás által meghatározott integrálgörbék egyenlő szárú hiperbolák, melyeknek aszimptotái az $y = -\frac{4}{3}x$ és $y = \frac{3}{4}x$ egyenesek. A koordináta-rendszer kezdőpontja *nyeregpon*t,

amint az a transzformációnál szereplő λ_1 és λ_2 értékekből is látszik: mindkettő valós, és ellenkező előjelűek.

Az integrálgörbéket könnyen megrajzolhatjuk, ha figyelembe vesszük, hogy a

$$\xi = 3x - 4y$$

$$\eta = 4x + 3y$$

lineáris transzformáció csupán a koordináta-rendszernek a kezdőpont körüli elforgatását jelenti. Ha i és j az (x, y) koordináta-rendszer tengelyeinek egységvektorai és i' , j' a (ξ, η) koordináta-rendszer tengelyeinek egységvektorai, akkor

$$i' = \frac{3}{5} i - \frac{4}{5} j,$$

$$(i' \cdot j' = 0, i'^2 = j'^2 = 1.)$$

$$j' = \frac{4}{5} i + \frac{3}{5} j.$$

Megjegyzés. Az adott differenciálegyenletet így is írhatjuk:

$$(24x - 7y) dx + (-7x - 24y) dy = 0.$$

Ha itt

$$P(x, y) = -7y + 24x,$$

$$Q(x, y) = -7x - 24y,$$

akkor

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x} = -7.$$

Tehát az adott differenciálegyenlet egzakt. Az általános megoldás így számítható:

$$\int_0^x 24x dx - \int_0^y (7x + 24y) dy = C,$$

azaz

$$12x^2 - 7xy - 12y^2 = C,$$

vagy

$$(3x - 4y)(4x + 3y) = C.$$

Ha $C = 0$, akkor vagy

$$y = \frac{3}{4}x,$$

vagy

$$y = -\frac{4}{3}x.$$

Ezek origón átmenő, egymásra merőleges egyenesek. Ha $C \neq 0$, akkor egyelőre csak annyi látszik, hogy a

$$12x^2 - 7xy - 12y^2 = C$$

egyenlet másodrendű görbéket határoz meg.

A koordináta-rendszer alkalmas elforgatásával hozzuk ezt

$$a_{11}^* x^{*2} + a_{22}^* y^{*2} = C$$

kanonikus alakra. (Elforgatáskor az egyenlet állandó, szabad tagja, C nem változik.) Az elforgatás mértékét és az elforgatott koordináta-rendszerben szereplő a_{11}^* , a_{22}^* együtthatókat a

$$\begin{vmatrix} 12 - \mu & -\frac{7}{2} \\ -\frac{7}{2} & -12 - \mu \end{vmatrix} = 0$$

karakterisztikus egyenlet segítségével határozhatjuk meg.

A determináns kifejtésével adódik:

$$\mu^2 - \frac{625}{4} = 0,$$

azaz

$$\mu_1 = \frac{25}{2},$$

$$\mu_2 = -\frac{25}{2}.$$

Az elforgatott koordináta-rendszer egységvektorainak iránykoszinuszai, ezekkel a kiszámított μ_1 és μ_2 sajátértékekkel, a következők lesznek: a

$$\left(12 - \frac{25}{2}\right) \varepsilon_{1x} - \frac{7}{2} \varepsilon_{1y} = 0$$

és

$$\left(12 + \frac{25}{2}\right) \varepsilon_{2x} - \frac{7}{2} \varepsilon_{2y} = 0$$

egyenletekből

$$\varepsilon_{1x} : \varepsilon_{1y} = 7 : -1,$$

és

$$\varepsilon_{2x} : \varepsilon_{2y} = 1 : 7,$$

tehát

$$\bar{\varepsilon}_1 = \frac{7}{\sqrt{50}} \mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{50}} \mathbf{j},$$

$$\bar{\varepsilon}_2 = \frac{1}{\sqrt{50}} \mathbf{i} + \frac{7}{\sqrt{50}} \mathbf{j}.$$

$$(\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2 = 0, \quad \bar{\varepsilon}_1^2 = \bar{\varepsilon}_2^2 = 1).$$

Ha a koordináta-rendszert úgy forgatjuk el a kezdőpont körül, hogy az x^* és y^* tengelyek egységvektorai $\bar{\varepsilon}_1$ és $\bar{\varepsilon}_2$ legyenek, akkor az integrálgörbék transzformált egyenlete a következő lesz:

$$\frac{25}{2} x^{*2} - \frac{25}{2} y^{*2} = C,$$

vagy

$$x^{*2} - y^{*2} = K.$$

Ez az egyenlet pedig egyenlő szárú hiperbolákat határoz meg, melyeknek közös főtengelyei az x^* és y^* koordináta-tengelyek (42. ábra).

A két különböző megoldási módszer azonos eredményre vezetett. Még érdemes megfigyelnünk, hogy a (ξ, η) koordináta-rendszer tengelyei az (x^*, y^*) koordináta-rendszer szögfelező egyenesei, megfelelően annak, hogy a

$$\xi \eta = C$$

hiperbolák egyenlete, a koordináta-rendszernek a kezdőpont körüli $\varphi = \frac{\pi}{4}$ szöggel való elforgatásával

$$x^{*2} - y^{*2} = K$$

alakra transzformálódik. Ennek igazolására elég azt kimutatni, hogy pl. az ε_1 és i' vektorok által bezárt

szög $\varphi = \frac{\pi}{4}$:

$$\cos \varphi = \varepsilon_1 \cdot i' = \frac{3}{5} \frac{7}{\sqrt{50}} - \frac{4}{5} \left| -\frac{1}{\sqrt{50}} \right| = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3. Vizsgáljuk az

$$y' = \frac{-x+y}{x+y}$$

differenciálegyenletet. Határozzuk meg a szinguláris pont jellegét.

Az

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

azaz

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

karakterisztikus egyenlet gyökei konjugált komplex számok (a valós rész nem 0):

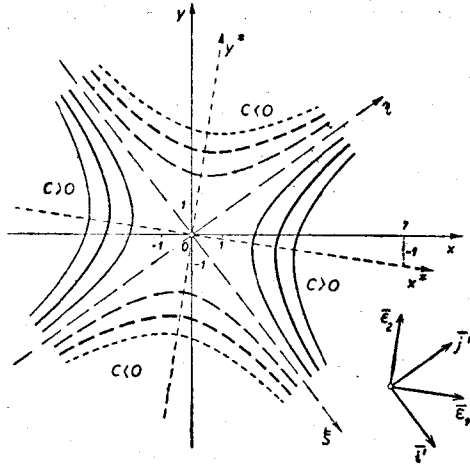
$$\lambda_1 = 1 + i,$$

$$\lambda_2 = 1 - i.$$

Tehát a koordináta-rendszer kezdőpontja: *fókusz*.

A differenciálegyenletet így is írhatjuk:

$$(x - y) dx + (x + y) dy = 0.$$



42. ábra

Ha végigszorozzuk $\frac{1}{x^2 + y^2}$ -tel, kapjuk az

$$\left(\frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy \right) + \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right) = 0$$

egzakt differenciálegyenletet. Ennek általános megoldása:

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} + \arctg \frac{y}{x} = \ln |C|$$

($C \neq 0$),

vagy másképp írva:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = C e^{-\arctg \frac{y}{x}}$$

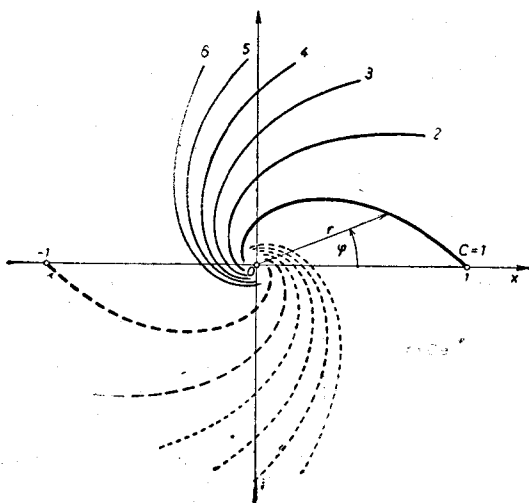
Polárkoordinátákra áttérve:

$$r = C e^{-\varphi}.$$

Az integrálgörbék logaritmikus spirálisok (43. ábra).

4. Vizsgáljuk az

$$y' = \frac{3x - y}{x - 3y}$$



43. ábra

differenciálegyenletet. Határozzuk meg a szinguláris pont jellegét.

Az

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 3 \\ -3 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

azaz

$$\lambda^2 + 9 = 0$$

karakterisztikus egyenlet gyökei tiszta képzetes számok:

$$\lambda_1 = 3i,$$

$$\lambda_2 = -3i.$$

Tehát a koordináta-rendszer kezdőpontja: centrum.

A differenciálegyenletet így is írhatjuk:

$$(-y + 3x) dx + (-x + 3y) dy = 0.$$

Ez pedig egzakt differenciálegyenlet. Az általános megoldást pl. görbe menti integrállal számíthatjuk:

$$\int_0^x 3x dx + \int_0^y (-x + 3y) dy = C_1,$$

vagyis

$$\frac{3x^2}{2} - xy + \frac{3y^2}{2} = C_1,$$

vagy

$$3x^2 - 2xy + 3y^2 = C.$$

Az integrálgörbék másodrendű görbék. A koordináta-rendszer alkalmas elforgatásával hozzuk ezt az egyenletet kanonikus alakra. A karakterisztikus egyenlet:

$$\begin{vmatrix} 3 - \mu & -1 \\ -1 & 3 - \mu \end{vmatrix} = 0,$$

vagy kifejtve: *

$$\mu^2 - 6\mu + 8 = 0.$$

Ennek az egyenletnek a gyökei, a sajátértékek:

$$\mu_1 = 2,$$

$$\mu_2 = 4.$$

Az elforgatott koordináta-rendszer egységvektorai ezekkel a sajátértékekkel számíthatók:

mivel

$$(3 - 2)\varepsilon_{1x} - \varepsilon_{1y} = 0,$$

illetve

$$(3 - 4)\varepsilon_{2x} - \varepsilon_{2y} = 0,$$

ezért

$$\varepsilon_{1x} : \varepsilon_{1y} = 1 : 1,$$

és

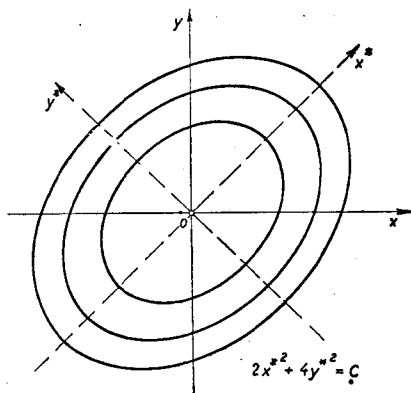
$$\varepsilon_{2x} : \varepsilon_{2y} = -1 : 1,$$

tehát

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j},$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}.$$

$$(\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1.)$$



44. ábra

Ha a koordináta-rendszert úgy forgatjuk el a kezdőpont körül, hogy az x^* és y^* tengelyek egységvektorai ε_1 és ε_2 legyenek, akkor az integrálgörbék transzformált egyenlete a következő lesz:

$$2x^{*2} + 4y^{*2} = C. \quad (C > 0).$$

Ez az egyenlet pedig ellipsziseket határoz meg, melyeknek közös főtengelyei az x^* és y^* koordináta-tengelyek.

Ezzel az integrálgörbéket már könnyen megrajzolhatjuk (44. ábra).

Feladatok

Vizsgáljuk az alábbi differenciálegyenleteket: határozzuk meg a szinguláris pont jellegét:

1. $y' = \frac{x+y}{4x-2y}.$

2. $y' = \frac{3x-2y}{5x-2y}.$

3. $y' = \frac{2x-2y}{4x-5y};$

4. $y' = \frac{x-3y}{3x-13y}.$

5. $y' = \frac{x+2y}{4x-y}.$

II. ELSŐRENDŰ, AZ ISMERETLEN FÜGGVÉNY DERIVÁLTJÁBAN IMPLICIT DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

1. §. Speciális alakú elsőrendű implicit differenciálegyenletek

a) Elsőrendű n -ed
fokú differenciál-
egyenletek

Az

$$F(x, y, y') = 0$$

általános alakú differenciálegyenlet bal oldaláról feltesszük, hogy az ismeretlen függvény deriváltjának (y' -nek) n -ed fokú polinomja, melynek együtthatói az (x, y) sík valamely D tartományában az x és y változóknak folytonos függvényei és y szerinti parciális deriváltjuk folytonos:

$$F(x, y, y') \equiv a_n(x, y) y'^n + a_{n-1}(x, y) y'^{n-1} + \dots + a_1(x, y) y' + a_0(x, y) = 0.$$

Feltesszük még azt is, hogy a D tartományban $a_n(x, y) \neq 0$ és $\left| \frac{\partial F}{\partial y'} \right| \equiv a > 0$,

ahol $a =$ állandó. Ekkor az algebra alaptétele szerint a D tartomány minden (x, y) értékpárjához n számú (valós vagy komplex) y' érték tartozik, és ezek mind különbözőek. Csak a valós értékekre figyelemmel, az adott differenciálegyenletből $k \leq n$ olyan elsőrendű, y' -ben explicit differenciálegyenlet választható ki, melyek mindegyikére teljesül — legalább a D tartományban — a megoldás egzisztenciájára és unicitására vonatkozó feltétel. Ekkor ugyanis

$$F(x, y, y') \equiv [y' - f_1(x, y)] [y' - f_2(x, y)] \dots [y' - f_k(x, y)] G(x, y, y') = 0,$$

tehát

$$y' = f_1(x, y), \quad y' = f_2(x, y), \quad \dots, \quad y' = f_k(x, y).$$

Ezeknek a differenciálegyenleteknek az összes, D tartományhoz tartozó megoldásai az eredeti differenciálegyenletnek is megoldásai, és így, ha ezeknek a differenciálegyenleteknek általános megoldásai:

$$\varphi_1(x, y, C) = 0, \quad \varphi_2(x, y, C) = 0, \quad \dots, \quad \varphi_k(x, y, C) = 0,$$

akkor az eredeti differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\varphi_1(x, y, C) \cdot \varphi_2(x, y, C) \dots \varphi_k(x, y, C) = 0.$$

b) A differenciál-
egyenletből
 y hiányzik:
 $F(x, y') = 0$

Két esetet tárgyalunk:

α) A differenciálegyenlet x -ben *explicit alakra* hozható:

$$x = f(y').$$

Vezessük be az $y' = p$ paramétert. Ekkor egyrészt

$$x = f(p),$$

másrészt pedig

$$dy = p \, dx,$$

vagy mivel

$$dx = f'(p) \, dp,$$

ezért

$$dy = p f'(p) \, dp.$$

Ez utóbbiból

$$y = \int p f'(p) \, dp + C.$$

A differenciálegyenlet *általános megoldása paraméteres alakban*:

$$x = f(p)$$

$$y = \int p f'(p) \, dp + C.$$

β) A differenciálegyenletből x és y' egy alkalmasan választott t paraméterrel kifejezhetők:

$$x = \varphi(t),$$

$$y' = \psi(t).$$

Ekkor a differenciálegyenlet *általános megoldása* — az előbbi esethez hasonló gondolatmenet szerint — *paraméteres alakban*:

$$x = \varphi(t)$$

$$y = \int \psi(t) \varphi'(t) \, dt + C.$$

c) A differenciál-
egyenletből
 x hiányzik:
 $F(y, y') = 0$

Megint két esetet tárgyalunk:

α) A differenciálegyenlet y -ban *explicit alakra* hozható:

$$y = f(y').$$

Vezessük be az $y' = p$ paramétert. Ekkor egyrészt

$$y = f(p),$$

másrészt pedig

$$dx = \frac{dy}{p}.$$

vagy mivel

$$dy = f'(p) dp,$$

ezért

$$dx = \frac{f'(p) dp}{p}.$$

Ez utóbbiból

$$x = \int \frac{f'(p) dp}{p} + C.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása paraméteres alakban:

$$\begin{aligned} y &= f(p) \\ x &= \int \frac{f'(p) dp}{p} + C. \end{aligned}$$

β) A differenciálegyenletből y és y' egy alkalmasan választott t paraméterrel kifejezhetők:

$$y = \varphi(t)$$

$$y' = \psi(t).$$

Ekkor a differenciálegyenlet általános megoldása — az előbbi esethez hasonló gondolatmenet szerint — paraméteres alakban:

$$\begin{aligned} y &= \varphi(t) \\ x &= \int \frac{\varphi'(t) dt}{\psi(t)} + C. \end{aligned}$$

d) Paraméter bevezetésének módszere; megoldás differenciálás útján

Legyen adott egy y' -ben *implicit* differenciálegyenlet:

$$F(x, y, y') = 0.$$

Tegyük fel, hogy alkalmasan választott u és v paraméterek segítségével ebből a differenciálegyenletből x , y és $y' = p$

kifejezhetők:

$$x = \varphi(u, v)$$

$$y = \psi(u, v)$$

$$y' = p = \chi(u, v).$$

Mivel

$$\frac{dy}{dx} = p,$$

ezért

$$dy = p dx,$$

s így az előbb felírt paraméteres egyenletrendszer alapján:

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} du + \frac{\partial \psi}{\partial v} dv = \chi(u, v) \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv \right\},$$

ahonnan

$$\frac{dv}{du} = \frac{\chi(u, v) \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial u}}{\frac{\partial \psi}{\partial v} + \chi(u, v) \frac{\partial \varphi}{\partial v}}.$$

Ez pedig a v ismeretlen függvény és u független változó között egy elsőrendű, az ismeretlen függvény deriváltjában explicit alakú differenciálegyenlet. Tegyük fel, hogy ennek az általános megoldása:

$$v = \omega(u, C),$$

akkor az eredeti differenciálegyenlet *általános megoldása*, paraméteres alakban (u a paraméter):

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, \omega(u, C)) \\ y &= \psi(u, \omega(u, C)). \end{aligned}$$

Két speciális esetet tárgyalunk:

$\alpha)$ Legyen

$$y = f(x, y').$$

Paraméterül x -et és $y' = p$ -t választjuk. Ekkor az előbbi gondolatmenet alapján nyerjük a

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p - \frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial p}}$$

differenciálegyenletet. Ha ennek az általános megoldása

$$p = \varphi(x, C),$$

akkor az eredeti differenciálegyenlet *általános megoldása*:

$$y = f(x, \varphi(x, C)).$$

Megjegyzés. Ugyanarra a p és x között fennálló differenciálegyenletre jutunk, ha az eredeti differenciálegyenletet x szerint differenciáljuk és $y' = p$ -t az x függvényének tekintjük:

$$\frac{dy}{dx} = p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dx}.$$

$\beta)$ Legyen

$$x = f(y, y').$$

Differenciáljuk mindkét oldalt y szerint és tekintsük $y' = p$ -t az y függvényének:

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{dp}{dy}.$$

Ha ennek a differenciálegyenletnek az általános megoldása:

$$p = \psi(y, C),$$

akkor az eredeti differenciálegyenlet *általános megoldása*:

$$x = f(y, \psi(y, C)).$$

e) Lagrange-
(d'Alembert-)
féle differenciál-
egyenlet:

$$y = \varphi(y') x + \psi(y')$$

Legyen az előző jelöléseinkkel megegyezően

$$y' = p,$$

és deriváljuk mindkét oldalát x szerint, p -t az x függvényé-
nek tekintve:

$$p = \varphi(p) + \{\varphi'(p) x + \psi'(p)\} \frac{dp}{dx}.$$

Ha ebben a differenciálegyenletben x és p szerepét felcseréljük: x az ismeretlen függ-
vény és p a független változó, akkor a

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p} x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)} \quad (\varphi(p) - p \neq 0)$$

inhomogén lineáris differenciálegyenletre jutunk. Ennek az általános megoldása
legyen

$$x = C \omega(p) + \chi(p),$$

akkor az eredeti differenciálegyenletnek az *általános megoldása* paraméteres alakban:

$$\begin{aligned} x &= C \omega(p) + \chi(p) \\ y &= \{C \omega(p) + \chi(p)\} \varphi(p) + \psi(p). \end{aligned}$$

Ha a $p = C_0$ értéknél fennáll, hogy

$$\varphi(C_0) - C_0 = 0,$$

akkor

$$y = \varphi(C_0) x + \psi(C_0)$$

is megoldás.

f) Clairaut-féle differenciálegyenlet:

$$y = x y' + \varphi(y')$$

Ez a differenciálegyenlet az előzőnek speciális esete. Differenciáljuk mindkét oldalt x szerint, akkor

$$p = p + (x + \varphi'(p)) \frac{dp}{dx},$$

vagyis

$$\frac{dp}{dx} [x + \varphi'(p)] = 0.$$

Két eset lehetséges:

1. Ha

$$\frac{dp}{dx} = 0,$$

akkor nyilván

$$p = C,$$

és így a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = Cx + \varphi(C).$$

2. Ha

$$x + \varphi'(p) = 0,$$

akkor ebből és az

$$y = px + \varphi(p)$$

egyenletből a p paramétert kiküszöbölve, nyerjük az általános megoldás által meghatározott egyenessereg burkoló görbét. Ez a görbe ábrázolja a differenciálegyenlet szinguláris megoldását (l. 2. § c)).

A Clairaut-féle differenciálegyenletet ezek szerint a legegyszerűbben így oldjuk meg:

1. A differenciálegyenletben y' helyére C -t írunk. Ez adja az általános megoldást.

2. Az általános megoldásból és annak C szerinti deriváltjából a C -t kiküszöbölve, nyerjük az általános megoldás által meghatározott egyenessereg burkoló görbéjének egyenletét, vagyis a differenciálegyenlet szinguláris megoldását.

M e g j e g y z é s. Clairaut-féle differenciálegyenletre vezetnek olyan geometriai feladatok, melyekben egy görbét érintőjének valamilyen tulajdonsága alapján kell meghatározni.

P é l d á k*

1. Oldjuk meg az

$$y'^2 - 2y'x + x^2 - y^2 = 0$$

differenciálegyenletet.

Ez még így is írható:

$$(y' - x)^2 - y^2 = 0,$$

vagy

$$(y' - y - x)(y' + y - x) = 0.$$

* A következőkben többször találkozunk szinguláris megoldásokkal. A jobb megértés céljából ajánlatos előbb a 2. § tartalmát átnézni!

Tehát az adott differenciálegyenlet szétbontható az

$$y' - y = x,$$

$$y' + y = x$$

inhomogén lineáris differenciálegyenletekre. Ezeknek az általános megoldása:

$$y - C e^x + x + 1 = 0,$$

$$y - C e^{-x} - x + 1 = 0.$$

Így az eredeti differenciálegyenlet általános megoldása e két megoldás szorzata:

$$C^2 - C \{e^x (y - x + 1) + e^{-x} (y + x + 1)\} + (y + 1)^2 - x^2 = 0.$$

2. Határozzuk meg azt, hogy az

$$x^2 = y'^2 (a^2 - x^2)$$

differenciálegyenlet milyen görbesereget határoz meg ($a = \text{állandó}$).

A differenciálegyenletből y hiányzik. Bevezetjük az $y' = p$ paramétert. Ha x -et kifejezzük, kapjuk, hogy

$$x = \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} = f(p).$$

Mivel

$$f'(p) = \frac{a}{(1+p^2)^{3/2}},$$

ezért

$$y = \int p f'(p) dp + C = a \int \frac{p}{(1+p^2)^{3/2}} dp + C = -\frac{a}{\sqrt{1+p^2}} + C.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása paraméteres alakban:

$$x = \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}},$$

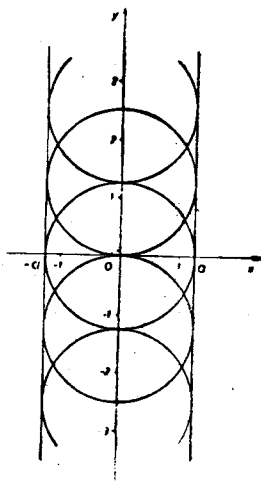
$$y = -\frac{a}{\sqrt{1+p^2}} + C.$$

Ebből a paraméteres egyenletrendszerből a p paramétert kiküszöbölhetjük és akkor nyerjük a következő egyenletet:

$$(y - C)^2 + x^2 = a^2.$$

Ez a differenciálegyenlet általános megoldása. Az integrálgörbék olyan a sugarú körök, melyeknek középpontjait az y tengely egyes pontjai alkotják, és amelyek az $x = +a$, $x = -a$ egyeneseket érintik (45. ábra).

Az általános megoldáson kívül $x = +a$ és $x = -a$ is megoldások, mégpedig szinguláris megoldások.



$$(y - C)^2 + x^2 = a^2$$

45. ábra

3. Határozzuk meg az

$$x^3 + y'^3 - 3xy' = 0$$

differenciálegyenlet általános megoldását.

Bevezetve az $y' = p$ jelölést, ez még így is írható:

$$x^3 + p^3 - 3xp = 0.$$

Vezessük be a t paramétert úgy, hogy $p = tx$ legyen. Ekkor a differenciálegyenletet így is írhatjuk:

$$x^3(1 + t^3) = 3tx^2,$$

és innen

$$x = \frac{3t}{1 + t^3},$$

$$p = \frac{3t^2}{1 + t^3}.$$

Mivel

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3(1 - 2t^3)}{(1 + t^3)^2},$$

ezért

$$dy = p dx = \frac{3t^2}{1 + t^3} \cdot \frac{3(1 - 2t^3)}{(1 + t^3)^2} dt.$$

Ebből pedig

$$y = 3 \int \frac{(1 - 2t^3) 3t^2}{(1 + t^3)^3} dt + C.$$

Ezt az integrált az $u = 1 + t^3$ helyettesítéssel számítjuk:

$$\begin{aligned} y &= 3 \int \frac{(3 - 2u) du}{u^3} + C = 9 \int \frac{du}{u^3} - 6 \int \frac{du}{u^2} + C = \\ &= -\frac{9}{2u^2} + \frac{6}{u} + C = -\frac{9}{2(1 + t^3)^2} + \frac{6}{1 + t^3} + C. \end{aligned}$$

Tehát a differenciálegyenlet általános megoldása paraméteres alakban:

$$x = \frac{3t}{1 + t^3},$$

$$y = -\frac{9}{2(1 + t^3)^2} + \frac{6}{1 + t^3} + C.$$

4. Oldjuk meg az

$$y'' = \frac{y'^2}{1 + y'}$$

differenciálegyenletet.

Bevezetjük az $y' = p$ paramétert:

$$y = \frac{p^2}{1+p}.$$

Mivel

$$\frac{dy}{dp} = \frac{2p + p^2}{(1+p)^2},$$

ezért

$$dx = \frac{dy}{p} = \frac{2+p}{(1+p)^2} dp.$$

Így

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{2+p}{(1+p)^2} dp + C = \int \frac{dp}{(1+p)^2} + \int \frac{dp}{1+p} + C = \\ &= -\frac{1}{1+p} + \ln |1+p| + C. \end{aligned}$$

Tehát a differenciálegyenlet általános megoldása paraméteres alakban:

$$y = \frac{p^2}{1+p}$$

$$x = -\frac{1}{1+p} + \ln |1+p| + C.$$

5. Határozzuk meg azt, hogy az

$$y'' + y'^2 = a^2$$

differenciálegyenlet milyen görbesereget határoz meg.

Bevezetve az $y' = p$ jelölést és a t paramétert, írhatjuk:

$$y = a \sin t,$$

$$p = a \cos t.$$

Ekkor, mivel

$$dy = a \cos t \, dt,$$

$$dx = \frac{dy}{p} = dt,$$

ahonnan

$$x = t + C,$$

a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = a \sin (x - C).$$

Az integrálgörbék ezek szerint a amplitudójú kongruens szinuszgörbék, melyek egymástól x tengely irányú, C mértékű párhuzamos eltolásban különböznek (46. ábra). A differenciálegyenletnek szinguláris megoldásai az ezeket a szinuszgörbékét burkoló

$y = +a$, $y = -a$ egyenletű egyenesek.

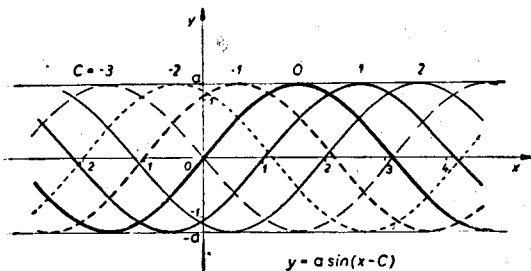
6. Oldjuk meg az

$$y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0$$

differenciálegyenletet.

Ez a differenciálegyenlet x -ben elsőfokú. Ha x -re megoldjuk és bevezetjük az $y' = p$ jelölést, akkor lesz:

$$x = \frac{p^2}{4y} + \frac{2y}{p}.$$



46. ábra

y -t tekintjük független változónak és differenciáljuk mindkét oldalt y szerint:

$$\frac{1}{p} = \left(\frac{p}{2y} - \frac{2y}{p^2} \right) \frac{dp}{dy} - \frac{p^2}{4y^2} + \frac{2}{p}.$$

Innen

$$(p^3 - 4y^2) \left(\frac{dp}{dy} - \frac{p}{2y} \right) = 0.$$

Ha az első tényezőt tesszük 0-val egyenlővé, nyerjük

$$p = 4^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}.$$

Ha most ezt behelyettesítjük az eredeti differenciálegyenletbe, akkor az

$$y = \frac{4}{27} x^3$$

szinguláris megoldást kapjuk.

Ha a második tényezőt tesszük egyenlővé 0-val, akkor a változókat szétválasztva és integrálva, adódik:

$$p = C y^{\frac{1}{3}}.$$

Ezt behelyettesítve az eredeti egyenletbe:

$$C^3 y^{\frac{5}{3}} - 4C x y^{\frac{5}{3}} + 8y^2 = 0,$$

ahonnan az $y = 0$ partikuláris megoldást elkülönítve:

$$64y = (4Cx - C^3)^2,$$

vagy bevezetve a $C_1 = \frac{C^2}{4}$ új állandót,

$$y = C_1 (x - C_1)^2.$$

Végeredményben tehát a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = C_1 (x - C_1)^2$$

és két szinguláris megoldása:

$$y = 0,$$

$$y = \frac{4}{27} x^3.$$

7. Oldjuk meg az

$$y = \frac{x}{x+1} y' + \frac{(x+1) e^x}{y'}$$

differenciálegyenletet.

Differenciáljuk mindkét oldalt x szerint és vezessük be az $y' = p$ jelölést:

$$p = \frac{p}{(x+1)^2} + \frac{(x+2) e^x}{p} + \left[\frac{x}{x+1} - \frac{(x+1) e^x}{p^2} \right] \frac{dp}{dx}.$$

Ez még így is írható:

$$\left[\frac{x}{x+1} - \frac{(x+1) e^x}{p^2} \right] \left[\frac{dp}{dx} - \frac{x+2}{x+1} p \right] = 0.$$

Ha az első tényező egyenlő 0-val, akkor innen

$$p^2 = \frac{(x+1)^2 e^x}{x}.$$

Ha ebből és az eredeti egyenletből p -t kiküszöböljük, nyerjük a differenciálegyenlet

$$y^2 = 4x e^x$$

szinguláris megoldását.

Ha viszont a második tényező 0, akkor egy szétválasztható változójú differenciálegyenletet nyerünk, melynek az általános megoldása:

$$p = C (x+1) e^x.$$

Ha ebből és az eredeti differenciálegyenletből p -t kiküszöböljük, nyerjük az

$$y = C x e^x + \frac{1}{C}$$

általános megoldást.

8. Oldjuk meg az

$$y = x + y'^2 - \frac{2}{3} y'^3$$

differenciálegyenletet.

Ez egy Lagrange-féle differenciálegyenlet. Bevezetjük az $y' = p$ jelölést és mindkét oldalt deriváljuk x szerint:

$$p = 1 + (2p - 2p^2) \frac{dp}{dx}.$$

Ez még így is írható:

$$(p - 1) \left(2p \frac{dp}{dx} + 1 \right) = 0.$$

Ha az első tényező 0, akkor

$$p = 1,$$

és ezt behelyettesítve az eredeti egyenletbe, nyerjük az

$$y = x + \frac{1}{3}$$

szinguláris megoldást.

Ha a második tényező 0, akkor

$$2p \, dp + dx = 0,$$

vagy integrálva:

$$p^2 + x = C.$$

Helyettesítsük ezt be az eredeti egyenletbe, akkor nyerjük az általános megoldást paraméteres alakban:

$$y = C - \frac{2}{3} p^3,$$

$$x = C - p^2.$$

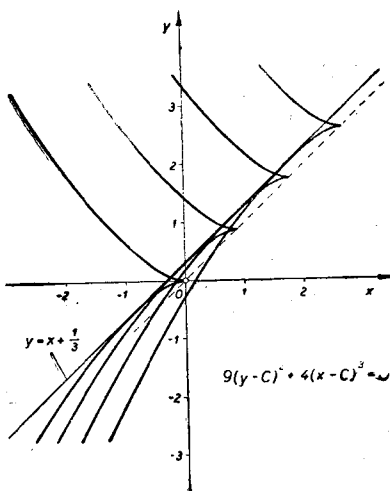
Küszöböljük ki innen a p paramétert, akkor

$$9(y - C)^2 + 4(x - C)^3 = 0.$$

Az integrálgörbék ezek szerint a

$$9y^2 + 4x^3 = 0$$

egyenletű görbével kongruens görbék és egymásból úgy származtathatók, hogy önmagukkal párhuzamosan toljuk el őket az $y = x$ szögfelező



47. ábra

egyenes mentén. Valamennyi integrálgörbe burkolója az $y = x + \frac{1}{3}$ szinguláris megoldást ábrázoló egyenes (47. ábra).

9. Oldjuk meg az

$$y = y'x + \frac{a}{y'}$$

differenciálegyenletet ($a = \text{állandó}$).

Ez egy Clairaut-féle differenciálegyenlet. Az általános megoldást rögtön felírhatjuk:

$$y = Cx + \frac{a}{C}.$$

Deriváljuk ezt az egyenletet C szerint. Akkor

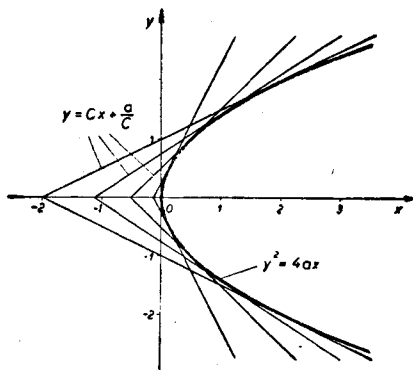
$$x - \frac{a}{C^2} = 0,$$

azaz

$$x = \frac{a}{C^2},$$

tehát

$$y = \frac{2a}{C}.$$



48. ábra

E két egyenletből C -t kiküszöbölve, nyerjük a differenciálegyenlet

$$y^2 = 4ax$$

singuláris megoldását (48. ábra).

Feladatok

a) Gyakorló feladatok

Az alábbi feladatokban mindenütt $p = y'$.

1. $p^2 + y y' - x^2 - xy = 0.$
2. $x p^2 - 2y p + 4x = 0.$
3. $p^2 y + p(x - y) - x = 0.$
4. $x^2 p^2 - 2xy p + y^2 = x^2 y^2 + x^4.$
5. $p^3 - (x^2 + xy + y^2) p^2 + (x^3 y + x^2 y^2 + xy^3) p - x^3 y^3 = 0.$
6. $x p^2 + 2x p - y = 0.$
7. $x p^2 - 2y p - x = 0.$
8. $(dx^2 - dy^2) \cos x = 2 \sin x \cdot dx dy.$
9. $(p - x)^2 = p + x.$
10. $x^2 p^2 - xy p + y^2 = 0.$
11. $xy p^2 + (y^2 - x^2) p - xy = 0.$
12. $p^2 - (x + y) p + xy = 0.$
13. $p^2 - 2x p - 3x^2 = 0.$
14. $y^2 p^2 - 2xy p = y^2 - 2x^2.$
15. $(y - x p)^2 = x.$
16. $4y p^2 - 2x p + y = 0.$
17. $4x y^2 p^2 = 1 + 2y^3 p.$
18. $(x p - y)^2 = y p^2.$
19. $p^2 + x(y + 1) p + x^2 y = 0.$
20. $(y - x p)^2 = p^3.$
21. $x^2 p^2 + 2xy p = 9x - y^2.$
22. $x^2 p^2 + 2x(y - 2x) p + y^2 = 0.$
23. $p^3 + x^4 p = 2x^3 y.$
24. $p^2 + 2x^3 p = 4x^2 y.$
25. $3xy p^2 - 2y^2 p + 2 = 0.$
26. $p^3 + 4xy p = 8y^2.$
27. $2p^2 + 2x^2 p = 3xy.$

28. $x(1 + p^2) = 1$. 29. $x(1 + p^2)^{\frac{3}{2}} = a$. Itt $a = \text{állandó}$.
30. $x = ap + bp^2$. Itt a és b állandók. 31. $x = \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}$. Itt $a = \text{állandó}$.
32. $y = p^2 + 2p^3$. 33. $y\sqrt{1 + p^2} = p$.
34. $y = p \ln p$. 35. $p^2 - 2xp - 1 = 0$.
36. $e^p + p = x$. 37. $y = p + \ln p$.
38. $p^3 - y^2(a - p) = 0$. Itt $a = \text{állandó}$.
39. $x p^3 = 1 + p$. 40. $p^3 - x^3(1 - p) = 0$.
41. $p^3 + y^3 - 3yp = 0$. 42. $y = p^2 e^p$.
43. $y^2(p - 1) = (2 - p)^2$. 44. $y(1 - p^2) = 2a$. Itt $a = \text{állandó}$.
45. $y = p^2 - px + \frac{x^2}{2}$. 46. $y = 2px + p^2$.
47. $p^4 = 4y(xp - 2y)^2$. 48. $y = 2px + \frac{x^2}{2} + p^3$.
49. $x = py + ap^2$. Itt $a = \text{állandó}$. 50. $y = xp + p - p^2$.

b) Geometriai feladatok

- Határozzuk meg azt a görbét, melynek az érintői a koordináta-tengelyekkel $a^2 = \text{állandó}$ területű háromszöget zárnak be.
- Határozzuk meg azt a görbét, melynél bármelyik ponthoz húzott érintőnek a koordináta-tengelyek közti darabja $a = \text{állandó}$ hosszúságú.
- Határozzuk meg azt a görbét, amelynél az érintő a tengelyekből olyan darabokat metsz le, amelyeknek összege $2a = \text{állandó}$.
- Határozzuk meg azt a görbét, amelynél a koordináta-tengelyek, az érintő és az érintési ponthoz tartozó ordináta által alkotott trapéz területe $a^2 = \text{állandó}$. Válasszuk ki az (a, a) ponton keresztül haladó görbét.

2. §. Szinguláris megoldások. Burkoló görbék

a) Explicit differenciálegyenlet szinguláris megoldásai

Adva van az ismeretlen függvény deriváltjára megoldott,

$$y' = f(x, y)$$

explicit alakú differenciálegyenlet és az $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltétel. Ha az $f(x, y)$ függvény az (x, y) sík

$$D : |x - x_0| \leq a, \quad |y - y_0| \leq b$$

zárt tartományában folytonos és korlátos, azaz

$$|f(x, y)| \leq A,$$

továbbá eleget tesz az

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq M |y_2 - y_1|$$

Lipschitz-feltételnek (A és M pozitív állandók), akkor az

$$y' = f(x, y)$$

differentiálegyenletnek egyetlen olyan $y = y(x)$ megoldása létezik, mely az $|x - x_0| \leq h$ intervallumban értelmezett és folytonos függvénye az x változónak $\left(h = \min \left| a, \frac{b}{A} \right| \right)$, és $x = x_0$ -nál az y_0 értéket veszi fel. (Egzsiztencia és unicitás feltétele.)

Egy differentiálegyenlet olyan megoldását, amely által meghatározott görbe minden pontjában teljesül az unicitás feltétele, *reguláris (közönséges) megoldásnak* nevezzük. Az olyan megoldást viszont, melynek egyik pontjában sem teljesül az unicitás feltétele, *szinguláris megoldásnak* nevezzük. Egy szinguláris megoldás bármely (x, y) pontjának tetszőleges környezetében legalább két olyan integrálgörbe létezik, mely keresztülhalad ezen a ponton. Szinguláris megoldások csak azokon a pontokon haladhatnak keresztül, amelyekben a Lipschitz-feltétel nem teljesül.

Eszerint az

$$y' = f(x, y)$$

differentiálegyenlet szinguláris megoldásainak megtalálása céljából, először meg kell állapítani azon pontok geometriai helyét, melyekben a Lipschitz-feltétel nem teljesül

(pl. azon pontok geometriai helyét, melyekben $\frac{\partial f}{\partial y}$ végtelenné válik); ha ez a mértani hely egy vagy több görbét képez, meg kell vizsgálni, hogy vajon integrálgörbéi-e ezek a görbék az adott differentiálegyenletnek, és vajon egyetlen egy pontjukban sem áll-e fenn az unicitás; ha ez a két feltétel teljesül, akkor a talált görbe egy szinguláris megoldást ábrázol.

b) Implicit differenciálegyenlet szinguláris megoldásai

Legyen most a vizsgált differenciálegyenlet

$$F(x, y, y') = 0$$

alakú, amely az ismeretlen függvény deriváltjában implicit.

Ebben az esetben a differenciálegyenlet szinguláris megoldásait úgy kereshetjük meg, hogy az

$$F(x, y, y') = 0$$

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0$$

egyenletekből kiküszöböljük y' -t. Az így nyert

$$\Phi(x, y) = 0$$

egyenlet meghatározza az ún. *diszkriminánsgörbét*. Ha egy, ezen egyenlet által meghatározott

$$y = y(x)$$

függvény megoldása az adott differenciálegyenletnek, akkor ez a függvény (általában) szinguláris megoldás.*

c) Burkoló görbék | Tegyük fel, hogy az általános,

$$F(x, y, y') = 0$$

differenciálegyenlet általános megoldása:

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

ismert.

Ha a

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

$$\frac{\partial \Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0$$

egyenletekből kiküszöböljük a C paramétert, nyerjük (általában) az általános megoldás által meghatározott görbesereg burkoló görbéjének

$$\varphi(x, y) = 0$$

egyenletét. Ha most még az ezen egyenlet által meghatározott

$$y = y(x)$$

függvény az adott differenciálegyenletnek megoldása, akkor ez a függvény (általában) szinguláris megoldás.

Példák

1. Legyen a vizsgált differenciálegyenlet:

$$y' = y^{\frac{2}{3}}.$$

A differenciálegyenlet jobb oldala:

$$f(x, y) = y^{\frac{2}{3}}$$

mindenütt értelmezve van és folytonos, azonban a

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}}$$

derivált végtelenné válik, ha $y = 0$.

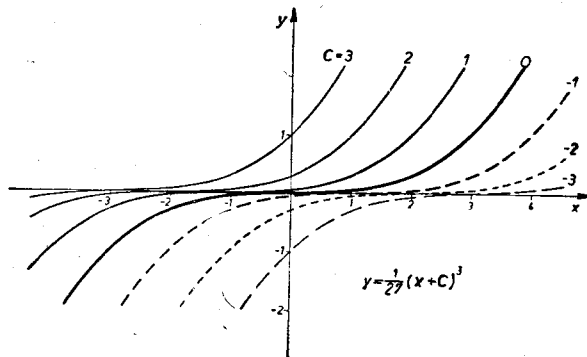
A differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = \frac{1}{27} (x + C)^3.$$

* Előfordulhat azonban, hogy a fenti módon meghatározott $y = y(x)$ függvény nem ad szinguláris megoldást, hanem az integrálgörbék csúcspontjainak vagy érintkezési pontjainak a geometriai helyét.

Ez az egyenlet harmadfokú parabolák seregével ábrázolható (49. ábra).

Az általános megoldáson kívül — nyilvánvalóan — $y = 0$ is megoldás. Ez az x tengely egyenlete. Az x tengely azon pontok geometriai helye, melyekben a Lipschitz-feltétel nem teljesül. Ez a megoldás szinguláris. Az x tengely minden pontján két integrálgörbe halad keresztül: egy harmadfokú parabola és az x tengely maga. Az unicitás tehát itt nem áll fenn.



49. ábra

2. Legyen

$$F(x, y, y') \equiv \\ \equiv y'^2 + y^2 - 1 = 0. \\ \frac{\partial F}{\partial y'} = 2y' = 0.$$

E két egyenletből

$$y^2 = 1,$$

vagyis

$$y = \pm 1.$$

E két függvény kielégíti a differenciálegyenletet, vagyis ezek a differenciálegyenlet megoldásai. Azonfelül szinguláris megoldások, mert egyik pontjukban sem áll fenn az unicitás. E két egyenes egy szinusz-görbesereg két burkolója.

3. $y'^2 - y^3 = 0.$

Az általános megoldás:

$$y = \frac{4}{(x+C)^2}.$$

Az $y^3 = 0$ diszkrimináns az $y = 0$ megoldást adja, mely azonban reguláris, mert az x tengely összes pontjaiban fennáll az unicitás. Az $y > 0$ félsíkon értelmezett megoldások nem érik el a diszkriminánsgörbét.

4. Az

$$y = xy' + \frac{1}{y^2}$$

Clairaut-féle differenciálegyenlet általános megoldása:

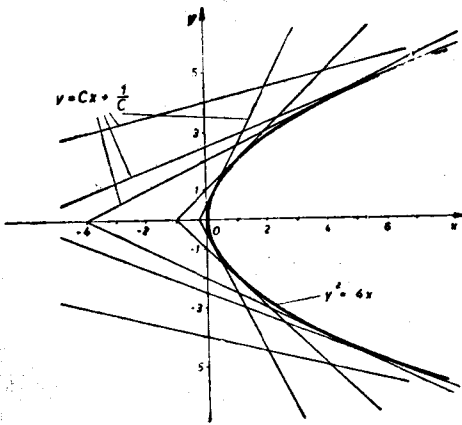
$$y = Cx + \frac{1}{C}.$$

Ha ebből az egyenletből és az

$$x - \frac{1}{C^2} = 0$$

egyenletből a C paramétert kiküszöböljük, nyerjük az általános megoldás által meghatározott egyenessereg burkoló görbéjének az egyenletét:

$$y^2 = 4x.$$



50. ábra

Ez az egyenlet adja a differenciálegyenlet szinguláris megoldását. Ha a differenciálegyenletet így írjuk:

$$xy'^2 - yy' + 1 = 0,$$

akkor kiderül, hogy ez y' -re csak akkor adhat valós értékeket, ha

$$y^2 - 4x \geq 0.$$

Geometriailag ezt úgy értelmezzük, hogy az $y^2 - 4x = 0$ parabola konvex oldalán vannak integrálgörbék: a parabola érintő egyenesei; viszont a másik oldalon egy sincs. A parabola épp az az integrálgörbe, mely az (x, y) síkot ilyen értelemben ketté osztja (50. ábra).

Feladatok

Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek szinguláris megoldásait:

1. $y = xy' + y'^3.$
2. $y(y' + 1) = (x + 1)y'.$
3. $y = xy' + 2\sqrt{ay'}.$ Itt $a =$ állandó.
4. $y = xy' + \sqrt{y'^2 - 1}.$
5. $y = xy' + \frac{2}{3}(y' + 1)^{\frac{3}{2}}.$
6. $y = xy' + \sqrt{\frac{a + 2hy' + by'^2}{ab - h^2}}.$ Itt a, b és h állandók.
7. $y = xy' + \frac{ay'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$ Itt $a =$ állandó.
8. $y = xy' + y' - y' \ln |y'|.$
9. $y = xy' + \sqrt{1 - y'^2} - y' \arccos y'.$
10. $y = xy' + \sqrt{1 + y'^2} - y' \ln(y' + \sqrt{1 + y'^2}).$

3. §. Trajektóriák

a) Görbesereg
izogonális
trajektóriái

Legyen

$$f(x, y, C) = 0$$

és

$$g(x, y, C_1) = 0$$

két egyparaméteres görbesereg egyenlete. Tegyük fel, hogy a második görbesereg mindegyik görbéje ugyanakkora ($\omega =$ állandó) szög alatt metszi az első görbesereg

valamennyi görbéjét. Ez esetben a második görbesereg egyes görbéi az elsőnek *izogonális trajektóriái*. Ha speciálisan $\omega = \frac{\pi}{2}$, azaz a két görbesereg egyes görbéi egymást derékszög alatt metszik, akkor az izogonális trajektóriákat *ortogonális trajektóriák*-nak nevezzük.

$\alpha)$ *Derékszögű koordináták esete.* Legyen adva egy egyparaméteres görbesereg egyenlete:

$$f(x, y, C) = 0,$$

és az ω szög. Keressük az adott görbesereg egyes görbéit ω szög alatt metsző izogonális trajektóriák egyenletét.

Az

$$f(x, y, C) = 0$$

és

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot y' = 0$$

egyenletből kiküszöböljük a C paramétert. Így nyerjük az adott görbesereg

$$F(x, y, y') = 0$$

differenciálegyenletét. Az izogonális trajektóriák differenciálegyenletét ebből úgy nyerhetjük, hogy y' helyére az

$$\frac{y' - \operatorname{tg} \omega}{1 + y' \operatorname{tg} \omega}$$

kifejezést írjuk:

$$F\left(x, y, \frac{y' - \operatorname{tg} \omega}{1 + y' \operatorname{tg} \omega}\right) = 0.$$

Ha speciálisan $\omega = \frac{\pi}{2}$; akkor az ortogonális trajektóriák differenciálegyenlete:

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0.$$

$\beta)$ *Polárkoordináták esete.* Ha a görbesereg egyenlete polárkoordinátákban ismeretes:

$$f(r, \varphi, C) = 0$$

és az ehhez tartozó differenciálegyenlet $\left(r' = \frac{dr}{d\varphi} \text{ jelöléssel}\right)$

$$F(r, \varphi, r') = 0,$$

akkor az izogonális trajektóriák differenciálegyenlete:

$$F\left(r, \varphi, r \frac{r' + r \operatorname{tg} \omega}{r - r' \operatorname{tg} \omega}\right) = 0,$$

az ortogonális trajektóriák differenciálegyenlete pedig:

$$F\left(r, \varphi, -\frac{r^2}{r'}\right) = 0.$$

b) Geometriai és fizikai alkalmazások

α) Evolvensek. Valamely görbe érintőinek ortogonális trajektóriáit evolvensnek nevezzük. Az eredeti görbe pedig ezen evolvens bármelyikének az evolútája, vagyis a görbületi középpontjainak geometriai helye. Ha az evolútára fonalat feszítünk és bizonyos pontból kiindulva ezt a fonalat lefejtjük, akkor ezen fonál bármelyik pontja evolvenst ír le. A kifeszített fonál ugyanis mindig az alapgörbe, az evoluta egyik érintője, és a fonál lefejtésekor a fonál bármelyik pontjának pillanatnyi elmozdulása az érintőre merőleges irányú.

1. Keressük az

$$y = \varphi(x)$$

egyenletű görbe evolvensait.

A görbe érintő egyenesseregének egyenlete:

$$y - \varphi(t) - \varphi'(t)(x - t) = 0.$$

(Itt t a paraméter.)

Az érintő egyenessereg differenciálegyenletét megkapjuk, ha az

$$y = \varphi(t) + \varphi'(t)(x - t)$$

$$y' = \varphi'(t)$$

egyenletekből kiküszöböljük a t paramétert.

Legyen $y' = p$, akkor t kiküszöbölése után a következő differenciálegyenlet adódik:

$$y - x p = f(p).$$

Az evolvens differenciálegyenletét úgy nyerjük, ha p helyébe $-\frac{1}{p}$ -t írunk:

$$y + \frac{x}{p} = f\left(-\frac{1}{p}\right),$$

vagy

$$x + p y = p \cdot f\left(-\frac{1}{p}\right) = g(p).$$

Ennek a differenciálegyenletnek az általános megoldása a keresett evolvensnek egyenlete par améteres alakban:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \left\{ C + \int \frac{p g'(p)}{\sqrt{1+p^2}} dp \right\} \\ x &= g(p) - \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \left\{ C + \int \frac{p g'(p)}{\sqrt{1+p^2}} dp \right\}. \end{aligned}$$

2. Legyen az alapgörbe egyenlete paraméteres alakban:

$$x = \varphi(u)$$

$$y = \psi(u).$$

Ennek az evolvensait keressük.

Ha ennek a görbének az u paraméterértékhez tartozó P pontjában az érintő irány-szöge ϑ , akkor

$$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\psi'(u)}{\varphi'(u)},$$

és innen

$$\sin \vartheta = \frac{\psi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}, \quad \cos \vartheta = \frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}.$$

Az evolvens merőlegesen szeli az alapgörbe érintőit. Keressük tehát, hogy a görbe P pontjából az érintőre mekkora $\delta(u)$ távolságot kell felmérnünk, hogy a létrejövő új görbe érintője merőleges legyen az alapgörbe érintőjére.

Az új görbe egyenlete:

$$x = \varphi + \delta \frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}$$

$$y = \psi + \delta \frac{\psi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}.$$

A számítás egyszerűsítése végett δ helyett legyen

$$t = \frac{\delta}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}$$

a meghatározandó ismeretlen. Ezzel

$$x = \varphi + t \varphi'$$

$$y = \psi + t \psi'$$

a keresett görbe egyenlete. Annak a feltétele, hogy ez a görbe merőleges legyen az alapgörbe érintőjére, a következő:

$$\frac{\psi' (1 + t') + t \psi''}{\varphi' (1 + t') + t \varphi''} = - \frac{\varphi'}{\psi'}.$$

Innen t -re kapjuk a

$$t' + \frac{\varphi' \varphi'' + \psi' \psi''}{\varphi'^2 + \psi'^2} t + 1 = 0$$

inhomogén lineáris differenciálegyenletet. Ennek az általános megoldása:

$$t = \frac{1}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}} \left(C - \int \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2} du \right).$$

Így a keresett evolvensnek egyenlete, paraméteres alakban:

$$\begin{aligned} x &= \varphi - \frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}} \int \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2} du + C \frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}} \\ y &= \psi - \frac{\psi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}} \int \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2} du + C \frac{\psi'}{\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2}}. \end{aligned}$$

β) *Paralelgörbék.* Ha az

$$y = \varphi(x)$$

egyenletű görbe normálisaira, a görbétől számítva, annak egyik oldalára, az állandó δ távolságot felmérjük, kapjuk az adott görbének paralelgörbéjét.

Egy görbe paralelgörbéi, a görbe normálisainak ortogonális trajektóriái.

A görbe normálisainak egyenlete:

$$y - \varphi(t) = -\frac{1}{\varphi'(t)} (x - t).$$

Ha ebből és az

$$y' = -\frac{1}{\varphi'(t)}$$

egyenletből a t paramétert kiküszöböljük, nyerjük a normálisok differenciálegyenletét:

$$y - xy' = g(y').$$

Ebből a paralelgörbék differenciálegyenlete:

$$x + yy' = y' \cdot g\left(-\frac{1}{y'}\right),$$

vagy az $y' = p$ jelöléssel:

$$x + p y = p \cdot g\left(-\frac{1}{p}\right) = f(p).$$

γ) *Felület esésvonalai.* A

$$z = f(x, y)$$

kétváltozós függvény a térbeli (x, y, z) koordináta-rendszerben egy felületet határoz meg. A $z =$ állandó síkok által kimetszett görbéket az (x, y) síkra vetítve, nyerjük a felület szintvonalait:

$$f(x, y) = C.$$

A szintvonalak ortogonális trajektóriái adják a felület ún. esésvonalait. Ha az (x, y) síkon nyert esésvonalakra mint vezérgörbékre z tengellyel párhuzamos alkotójú hengerfelületeket állítunk, akkor ezek az adott felületen kimetszik a legmeredekebb lejtésű vonalakat.

Ha egy tömegpont a

$$z = f(x, y)$$

egyenletű felületen a nehézségi erő hatására úgy esik (a z tengely pozitív iránya a nehézségi gyorsulás irányával ellentétes), hogy esése közben állandóan az adott felületen marad, akkor a pályagörbe a felületnek egyik legmeredekebb lejtésű vonala lesz. Vagyis a pályagörbe vetülete az (x, y) síkon a felület egyik esésvonala lesz.

δ) *Erővonalak, áramvonalak.* Legyen

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = p(x, y) \mathbf{i} + q(x, y) \mathbf{j}$$

egy potenciális síkbeli erőter vagy egy potenciális síkáramlás sebességi vektortere.

Az ekvipotenciális vonalak ortogonális trajektóriái az adott erőter erővonalai, a síkáramlás áramvonalai.

Mivel az ekvipotenciális vonalak differenciálegyenlete

$$p(x, y) dx + q(x, y) dy = 0,$$

ezért az erővonalak, illetve áramvonalak differenciálegyenlete:

$$p(x, y) dy - q(x, y) dx = 0.$$

e) *Hőtani alkalmazás.* A homogén test síkbeli stacionárius hőáramlását az azonos hőmérsékletű pontokat összekötő izotermákkal és ezek ortogonális trajektóriáival, a hőáramlás áramvonalalaival lehet jellemezni.

Ha a hőáramlás vektora:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \text{grad } u(x, y) = p(x, y) \mathbf{i} + q(x, y) \mathbf{j},$$

akkor az izotermák $(u(x, y) = C)$ egyenletű vonalak differenciálegyenlete:

$$p(x, y) dx + q(x, y) dy = 0,$$

és a hőáramlás áramvonalainak differenciálegyenlete:

$$p(x, y) dy - q(x, y) dx = 0.$$

Példák

1. Határozzuk meg az

$$y = ax$$

egyenessereg izogonális trajektóriáit, ha a két görbesereg egyes görbéinek metszési szöge

$$\omega \neq \frac{\pi}{2} \quad (\operatorname{tg} \omega = k).$$

Az egyenessereg differenciálegyenlete:

$$y' = \frac{y}{x}.$$

Az izogonális trajektóriák differenciálegyenlete:

$$\frac{y' - k}{1 + k y'} = \frac{y}{x},$$

vagy

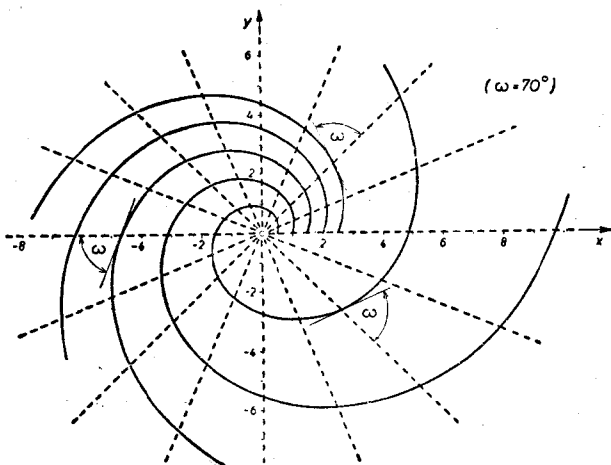
$$xy' - kx = y + kyy'.$$

Ezt még így is írhatjuk:

$$\begin{aligned} x dy - y dx &= \\ &= k(x dx + y dy). \end{aligned}$$

Ennek a differenciálegyenletnek egy integráló tényezője:

$$\frac{1}{x^2 + y^2}.$$



51. ábra

Ha ezzel végigszorunk, nyerjük az

$$\frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{k} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

egzakt differenciálegyenletet. Ennek az általános megoldása:

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = \frac{1}{k} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} + \ln |C| \quad (C \neq 0).$$

Ezt még így is írhatjuk:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = C e^{\frac{1}{k} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}},$$

vagy polárkoordinátákban:

$$r = C e^{\frac{\varphi}{k}}.$$

Ez pedig logaritmikus spirálisok egyenlete (51. ábra).

Ha speciálisan $\omega = \frac{\pi}{2}$, akkor az ortogonális trajektóriák differenciálegyenlete:

$$-\frac{1}{y'} = \frac{y}{x},$$

vagy a változók szétválasztása után:

$$x dx + y dy = 0.$$

Ennek az általános megoldása:

$$x^2 + y^2 = C.$$

Ez pedig origó körül rajzolt koncentrikus körök egyenlete (52. ábra).

2. Keressük az

$$x^2 + y^2 = a^2$$

kör evolvensait.

A kör érintő egyenesseregének az egyenlete:

$$y - \sqrt{a^2 - t^2} - \frac{t}{\sqrt{a^2 - t^2}} (x - t) = 0.$$

Ebből

$$y' = \frac{t}{\sqrt{a^2 - t^2}}.$$

Ha e két egyenletből kiküszöböljük a t paramétert és bevezetjük az $y' = p$ jelölést, kapjuk az érintők differenciálegyenletét:

$$y - p x = a \sqrt{1 + p^2}.$$

Ebből az evolvensok differenciálegyenlete:

$$x + p y = a \sqrt{1 + p^2}.$$

Ha ezt a differenciálegyenletet megoldjuk, kapjuk az evolvensok paraméteres egyenletrendszerét:

$$x = a \left(\frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} p \right) - \frac{C p}{\sqrt{1 + p^2}},$$

$$y = a \left(\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} \operatorname{arc} \operatorname{tg} p \right) + \frac{C}{\sqrt{1 + p^2}}.$$

A $p = \operatorname{tg} \varphi$ helyettesítéssel egyszerűbb alakban:

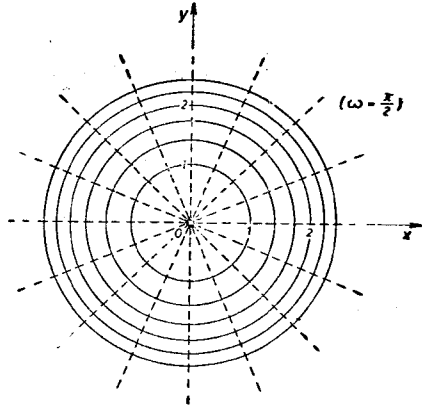
$$x = a (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi) - C \sin \varphi,$$

$$y = a (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) + C \cos \varphi.$$

$C = 0$ esetben kapjuk azt az evolvenst, mely a kör $x = +a, y = 0$ pontjából indul ki (53. ábra):

$$x = a (\cos \varphi + \varphi \sin \varphi)$$

$$y = a (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi).$$



52. ábra

3. Keresük az $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ láncgörbe evolvensét.

A b) α) 2. pont jelölésével legyen

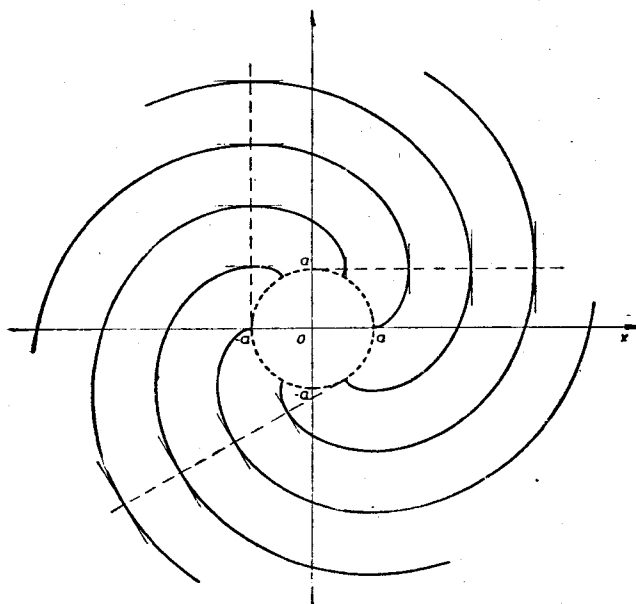
$$\varphi = u,$$

$$\psi = a \operatorname{ch} \frac{u}{a},$$

$$\varphi' = 1,$$

$$\psi' = \operatorname{sh} \frac{u}{a},$$

$$\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2} = \operatorname{ch} \frac{u}{a}, \quad \int \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2} du = a \operatorname{sh} \frac{u}{a}.$$



53. ábra

A keresett evolvens egyenlete tehát:

$$x = u - a \operatorname{th} \frac{u}{a} + \frac{C}{\operatorname{ch} \frac{u}{a}},$$

$$y = \frac{a}{\operatorname{ch} \frac{u}{a}} + C \operatorname{th} \frac{u}{a}.$$

A $C = 0$ értékhez tartozó evolvens:

$$x = u - a \operatorname{th} \frac{u}{a},$$

$$y = \frac{a}{\operatorname{ch} \frac{u}{a}}.$$

Ez a traktrix egyenlete (54. ábra). A $\operatorname{ch} \frac{u}{a} = \frac{1}{\sin \nu}$ helyettesítéssel:

$$x = a \left(\ln \operatorname{tg} \frac{\nu}{2} - \cos \nu \right)$$

$$y = a \sin \nu.$$

4. Határozzuk meg az

$$y = x^2$$

másodfokú parabola paralelgörbéinek egyenletét.

A parabola normálisainak egyenlete:

$$y - t^2 = -\frac{1}{2t}(x - t).$$

Ha ebből az egyenletből és az

$$y' = -\frac{1}{2t}$$

egyenletből a t paramétert kiküszöböljük és bevezetjük az $y' = p$ jelölést, kapjuk a normálisok differenciálegyenletét:

$$y = \frac{1}{4p^2} + px + \frac{1}{2}.$$

Ebből a keresett paralelgörbék differenciálegyenlete:

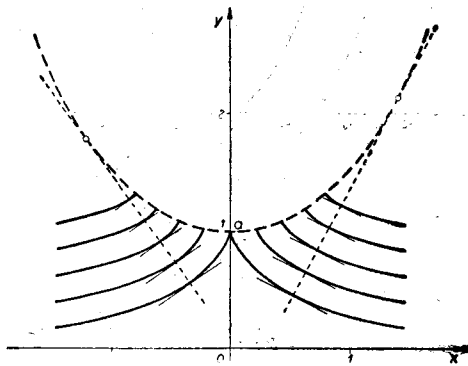
$$x + py = \frac{1}{4}p^3 + \frac{1}{2}p.$$

Differenciáljuk ezt y szerint:

$$\frac{1}{p} + p + y \frac{dp}{dy} = \left(\frac{3}{4}p^2 + \frac{1}{2} \right) \frac{dp}{dy},$$

vagy

$$\frac{dp}{dy} \left(\frac{3}{4}p^2 + \frac{1}{2} - y \right) = \frac{1}{p} + p.$$



54. ábra

Ha itt y -t tekintjük ismeretlen függvénynek és p -t független változónak, akkor ebből a

$$\frac{p^2 + 1}{p} \frac{dy}{dp} + y = \frac{3}{4} p^2 + \frac{1}{2}$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlet adódik. Ennek az általános megoldása:

$$y = \frac{1}{4} p^2 + C \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}.$$

És ezzel

$$x = \frac{1}{2} p - C \frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}}.$$

E két egyenlet együtt adja a keresett paralelgörbék paraméteres egyenletrendszerét (55. ábra).

5. Tekintsük a

$2z = ax^2 + by^2$ (a és b állandók) egyenletű paraboloidot.

Ennek (x, y) síkra vetített szintvonalai az

$$ax^2 + by^2 = 2C$$

egyenletű görbék.

A szintvonalak differenciálegyenlete:

$$a x dx + b y dy = 0.$$

Az esésvonalak differenciálegyenlete:

$$a x dy - b y dx = 0.$$

Ennek az általános megoldása

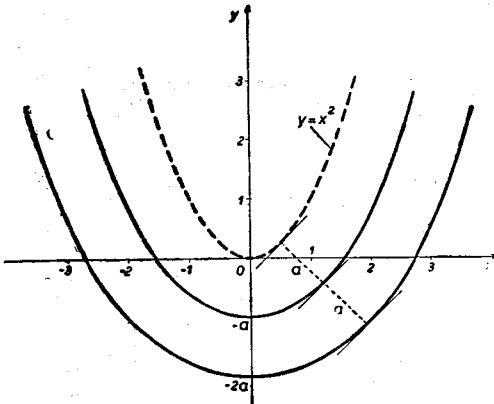
$$y^a = C_1 x^b.$$

Ez lesz az esésvonalak egyenlete (56. ábra).

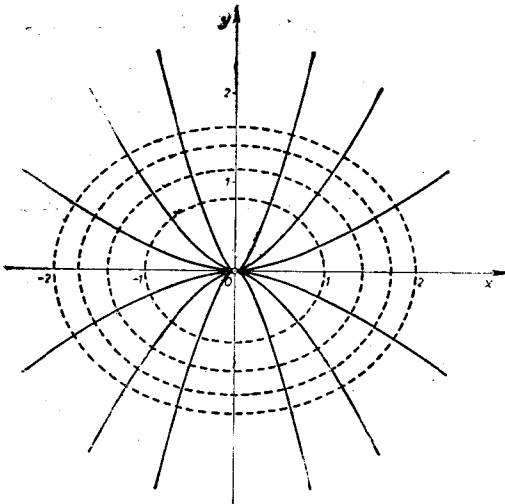
6. Két párhuzamos, ellenkező előjelű elektromos töltéssel ellátott „végtelen hosszú” vonal elektrosztatikai erőtere:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{a-x}{(a-x)^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \mathbf{i} + \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{-y}{(a-x)^2 + y^2} + \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \mathbf{j}.$$

(Ha $y = 0$, akkor $x \neq 0$, $x \neq a$.)



55. ábra



56. ábra

Itt az (x, y) síkot úgy választottuk meg, hogy a két párhuzamos vonalra merőleges legyen. A $+Q$ töltésű vonal a $(0, 0)$ pontban és a $-Q$ töltésű vonal az $(a, 0)$ pontban dőli az (x, y) síkot. ϵ_0 a levegő dielektromos állandója.

Határozzuk meg az erővonalak egyenletét. (L. még az I. 5. § 8. példáját I)

Mivel az ekvipotenciális vonalak differenciálegyenlete:

$$\frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{a-x}{(a-x)^2+y^2} + \frac{x}{x^2+y^2} \right) dx + \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{-y}{(a-x)^2+y^2} + \frac{y}{x^2+y^2} \right) dy = 0,$$

azért az erővonalak differenciálegyenlete:

$$\frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{y}{(a-x)^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} \right) dx + \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \left(\frac{a-x}{(a-x)^2+y^2} + \frac{x}{x^2+y^2} \right) dy = 0.$$

Ennek az általános megoldása:

$$\frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \left| \arctg \frac{y}{x} - \arctg \frac{a-x}{y} \right| = C.$$

Ez még így is írható:

$$\arctg \frac{y}{x} - \arctg \frac{a-x}{y} = C_1,$$

vagy

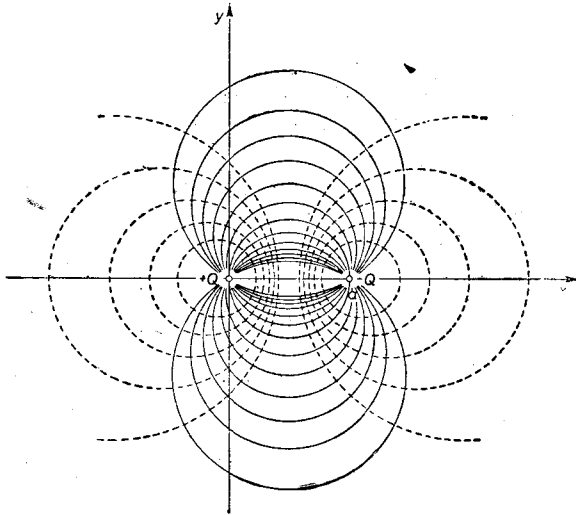
$$\frac{\frac{y}{x} - \frac{a-x}{y}}{1 + \frac{a-x}{x}} = k.$$

Rendezve:

$$y^2 - ax + x^2 = k a y,$$

vagy

$$\begin{aligned} \left(y - \frac{ka}{2} \right)^2 + \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 &= \\ &= \frac{a^2}{4} (k^2 + 1). \end{aligned}$$



57. ábra

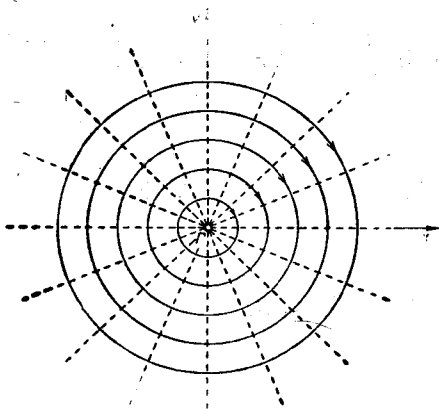
Ez az erővonalak egyenlete. Ezek pedig a $(0, 0)$, $(a, 0)$ pontokon keresztülmennő olyan körök, melyeknek középpontjai az $x = \frac{a}{2}$ egyenletű egyenesen vannak (57. ábra).

7. A potenciális örvényt előidéző síkáramlás sebességvektora:

$$\mathbf{v} = c_0 \frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} - c_0 \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j} \quad (x \neq 0, y \neq 0).$$

Az örvény magja egy az (x, y) síkot az origóban merőlegesen átdőfő egyenes, a forgás értelme az óramutató járásával megegyezik és c_0 egy pozitív állandó: $2\pi c_0 = \Gamma =$ = cirkuláció.

Határozzuk meg az áramvonalak egyenletét. (L. még I. 5. 7. példáját!) Az ekvipotenciális vonalak differenciálegyenlete:



58. ábra

$$c_0 \frac{y}{x^2 + y^2} dx - c_0 \frac{x}{x^2 + y^2} dy = 0.$$

Az áramvonalak differenciálegyenlete ebből adódik:

$$c_0 \frac{x}{x^2 + y^2} dx + c_0 \frac{y}{x^2 + y^2} dy = 0.$$

Ennek az általános megoldása:

$$c_0 \ln \sqrt{x^2 + y^2} = k,$$

vagyis az áramvonalak egyenlete:

$$x^2 + y^2 = C^2.$$

Ez pedig az origó köré rajzolt koncentrikus körök egyenlete (58. ábra).

8. Tételezzük fel, hogy egy homogén testben a *stacionárius hőáramlás* az (x, y) síkkal párhuzamos síkokban azonosan folyik le (síkáramlás), s így a viszonyok jellemzésére elegendő az (x, y) síkban lejátszódó folyamat vizsgálata. Legyen az egyenlő hőmérsékletű pontokat összekötő görbék (izotermák) egyenlete:

$$\frac{x^2}{1+C} + \frac{y^2}{C} = 1 \quad (C > 0).$$

Határozzuk meg a hőáramlás áramvonalainak az egyenletét.

Az izotermák konfokális ellipszisek, melyeknek fókuszai az $(1, 0)$ és $(-1, 0)$ pontok. Ennek a görbeseregnek a differenciálegyenlete:

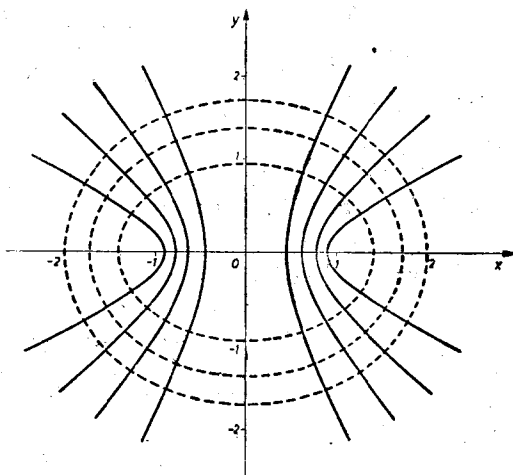
$$(xy' - y)(x + yy') = y',$$

vagy

$$xy y'^2 + (x^2 - y^2 - 1) y' - xy = 0.$$

Az áramvonalak differenciálegyenletét ebből úgy kapjuk, hogy y' helyébe $-\frac{1}{y'}$ -t írunk. Így

$$\frac{xy}{y'^2} - \frac{x^2 - y^2 - 1}{y'} - xy = 0,$$



59. ábra

vagy

$$xy y'^2 + (x^2 - y^2 - 1) y' - xy = 0,$$

vagyis ugyanazt a differenciálegyenletet kapjuk. Ennek a magyarázata az, hogy az adott differenciálegyenlet y' -ben másodfokú; minden ponton két görbe halad keresztül, melyek közül az egyik ellipszis ($C > 0$), a másik pedig egy konfokális hiperbolásereg egyik görbéje ($-1 < C < 0$). A konfokális hiperbolák a konfokális ellipszisek ortogonális trajektóriái. Tehát a keresett áramvonalak egyenlete:

$$\frac{x^2}{1+C} + \frac{y^2}{C} = 1, \quad -1 < C < 0 \quad (59. \text{ ábra}).$$

Feladatok

a) Gyakorló feladatok

Határozzuk meg az alábbi feladatokban megadott egyenletű görbesereg izogonális trajektóriáinak egyenletét. A megadott $\omega = \text{állandó}$ jelenti az adott és keresett görbesereg

egyes görbéinek metszési szögét, C pedig a paramétert.

1. $x^2 + y^2 - 2Cx = 0$; $\omega = \frac{\pi}{2}$.
2. $r = 2C \cos \varphi$; $\omega = \frac{\pi}{2}$.
3. $x^3 - 3xy^2 = C$; $\omega = \frac{\pi}{2}$.
4. $y^2 = Cx$; $\omega = \frac{\pi}{2}$.
5. $x^2 + Cy^2 = a$; $\omega = \frac{\pi}{2}$. Itt $a = \text{állandó}$.
6. $x^2 - y^2 + 2Cxy = a^2$; $\omega = \frac{\pi}{2}$. Itt $a = \text{állandó}$.
7. $x(x^2 + y^2) + C(x^2 - y^2) = 0$; $\omega = \frac{\pi}{2}$.
8. $(x^2 - a)^2 + (y^2 - b)^2 = C^2$; $\omega = \frac{\pi}{2}$. Itt a és b állandók.
9. $xy = C(x-1)^2$; $\omega = \frac{\pi}{2}$.
10. $y = C \ln |x|$; $\omega = \frac{\pi}{2}$.
11. $y = C(x+a)e^x$; $\omega = \frac{\pi}{2}$. Itt $a = \text{állandó}$.
12. $\operatorname{th}^2 x + \operatorname{th}^2 (y+C)$; $\omega = \frac{\pi}{2}$.
13. $\frac{x^2}{C} + y^2 = \frac{a^2}{C-1}$; $\omega = \frac{\pi}{2}$. Itt $a = \text{állandó}$.

14. $r = \operatorname{tg}(\varphi + C); \quad \omega = \frac{\pi}{2}.$

15. $(r^2 + a^2) \sin \varphi + C r = 0; \quad \omega = \frac{\pi}{2}. \quad \text{Itt } a = \text{állandó.}$

16. $r = \frac{C}{1 + 2 \cos \varphi}; \quad \omega = \frac{\pi}{2}.$

17. $r = C(1 + 2 \cos \varphi); \quad \omega = \frac{\pi}{2}.$

18. $x^2 - y^2 = C; \quad \omega \neq \frac{\pi}{2}.$

19. $x^2 + y^2 = 2C x; \quad \omega \neq \frac{\pi}{2}.$

20. $r^p = C \cos p \varphi; \quad \omega \neq \frac{\pi}{2}. \quad \text{Itt } p = \text{állandó.}$

21. $xy = C; \quad \omega = \frac{\pi}{2}.$

22. $x^2 - C y^2 = 1; \quad \omega = \frac{\pi}{2}.$

23. $r = C(1 + \cos \varphi); \quad \omega = \frac{\pi}{2}.$

24. $r = C \sin \varphi; \quad \omega \neq \frac{\pi}{2}.$

25. $a x^2 + 2b xy - a y^2 = C; \quad \omega = \frac{\pi}{2}. \quad \text{Itt } a \text{ és } b \text{ állandók.}$

26. $x^2 + y^2 - 2C x - a^2 = 0; \quad \omega = \frac{\pi}{2}. \quad \text{Itt } a = \text{állandó.}$

27. $y = C + \sqrt{2} x; \quad \omega = \frac{\pi}{2}.$

28. $3 x^2 + y^2 = C x; \quad \omega = \frac{\pi}{2}.$

29. $xy = C(x^2 + y^2)^2; \quad \omega = \frac{\pi}{2}.$

30. $x^2 = C(C + 2y); \quad \omega = \frac{\pi}{2}.$

b) Geometriai és fizikai feladatok

1. Határozzuk meg az

$$y^2 + 4a x = 0 \quad (a = \text{állandó})$$

egyenletű görbe evolvensait mint az érintőinek ortogonális trajektóriáit.

2. Határozzuk meg az

$$x = 2 u \cos u - 2 \sin u,$$

$$y = 2 u \sin u + 2 \cos u$$

paraméteres egyenletrendszerrel megadott görbe evolvensait mint az érintőinek ortogonális trajektóriáit.

3. Határozzuk meg az $y = e^x$ függvény görbéjének paralelgörbéit mint a normálisainak ortogonális trajektóriáit.

4. Határozzuk meg az

$$(x - z)^2 + y^2 = a^2 \quad (a = \text{állandó})$$

hengerfelület esésvonalait mint a szintvonalainak ortogonális trajektóriáit.

5. Határozzuk meg az

$$(y - z)^2 = 2p x \quad (p = \text{állandó})$$

parabolikus hengerfelület esésvonalait.

6. Határozzuk meg a

$$(2z - x) y^2 = x^3$$

egyenletű, cissois vezérgörbéjű hengerfelület esésvonalait.

7. Határozzuk meg a

$$z^2 = \frac{x(x^2 + y^2)}{x^2 - y^2}$$

felület esésvonalait.

8. Egy, az origóban elhelyezett forrás (nyelő) által előidézett síkáramlás sebességvektora:

$$\mathbf{v} = c_0 \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + c_0 \frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{j}.$$

Ha Q jelenti a forrás ($Q > 0$) vagy nyelő ($Q < 0$) erősségét, akkor az itt szereplő $c_0 =$ = állandó jelentése:

$$c_0 = \frac{Q}{2\pi}.$$

Határozzuk meg az áramvonalak egyenletét. (Lásd még I. 5. § Feladatok b) 2.)

9. Egy homogén testben előálló síkbeli hőáramlást az

$$x^2 - y^2 = C$$

izotermák jellemzik. Határozzuk meg a hőáramlás áramvonalait.

10. Helyezzünk el egy x tengellyel párhuzamos $c_0 =$ állandó sebességű síkáramlásba egy $Q =$ állandó bőségű forrást. Az eredő síkáramlás sebességvektora:

$$\mathbf{v} = \left(c_0 + \frac{Q}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \right) \mathbf{i} + \frac{Q}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{j}.$$

Határozzuk meg az áramvonalak egyenletét. (Lásd még I. 5. § Feladatok b) 4.)

11. Legyen egy az origóban elhelyezett és az x tengely pozitív irányába-mutató dipólus momentuma M . Az ezáltal létesített síkáramlás sebességvektora:

$$\mathbf{v} = M \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \mathbf{i} - M \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \mathbf{j}.$$

Határozzuk meg az áramvonalak egyenletét.

12. Helyezzünk az origóba egy, az x tengely pozitív irányába mutató, M momentumú dipólust az x tengely pozitív irányában haladó c_0 sebességű párhuzamos áramlásba. (Ideális folyadéknak „végtelen hosszú” körhenger körüli párhuzamos áramlása.) Az eredő síkáramlás sebességvektora:

$$\mathbf{v} = \left(c_0 + M \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \mathbf{i} - M \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \mathbf{j}.$$

Határozzuk meg az áramvonalak egyenletét.

13. Az előző feladatban szereplő síkáramlásra szuperponáljunk még egy Γ erősségű potenciális örvényt. (Ideális folyadéknak „végtelen hosszú” körhenger körüli cirkulációs áramlása.) Az eredő síkáramlás sebességvektora:

$$\mathbf{v} = \left[c_0 + M \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \right] \mathbf{i} - \left[M \frac{2xy}{x^2 + y^2)^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \right] \mathbf{j}.$$

Határozzuk meg az áramvonalak egyenletét.

III. SPECIÁLIS TÍPUSÚ MÁSODRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

1. §. Hiányos másodrendű differenciálegyenletek

a) $y'' = f(x)$ | A differenciálegyenlet közvetlenül *kvadraturákkal* megoldható.

Ha ugyanis

$$y'' = f(x),$$

akkor egy első integrál:

$$y' = \int f(x) dx + C_1,$$

és ebből

$$y = \int \left\{ \int f(x) dx \right\} dx + C_1 x + C_2.$$

b) A differenciálegyenletből y hiányzik:

$$F(x, y', y'') = 0$$

A differenciálegyenlet *elsőrendűre vezethető vissza*, ha új ismeretlen függvényt vezetünk be:

$$y' = p.$$

Ekkor ugyanis:

$$y'' = p',$$

és így a megoldandó differenciálegyenlet elsőrendűre redukált alakja:

$$F(x, p, p') = 0.$$

Ha ennek az általános megoldása:

$$G(x, p, C_1) = 0,$$

akkor már csak a

$$G(x, y', C_1) = 0$$

differenciálegyenletet kell megoldanunk. Ennek az *általános megoldása*:

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0,$$

vagy paraméteres alakban :

$$\begin{aligned} x &= \varphi(p, C_1) \\ y &= \int p \frac{dp}{dp} dp + C_2. \end{aligned}$$

c) A differenciál-
egyenletből
x hiányzik:
 $F(y, y', y'') = 0$

A differenciálegyenlet *elsőrendűre* vezethető vissza, ha új ismeretlen függvényt vezetünk be:

$$y' = p,$$

és y -t tekintjük független változónak.

Ekkor ugyanis

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p,$$

és így a megoldandó differenciálegyenlet elsőrendűre redukált alakja:

$$F\left(y, p, \frac{dp}{dy} p\right) = 0.$$

Ha ennek az általános megoldása:

$$G(y, p, C_1) = 0,$$

akkor már csak a

$$G(y, y', C_1) = 0$$

differenciálegyenletet kell megoldanunk. Ennek az *általános megoldása*

$$\Phi(x, y, C_1, C_2) = 0,$$

vagy paraméteres alakban :

$$\begin{aligned} y &= \varphi(p, C_1) \\ x &= \int \frac{1}{p} \frac{dp}{dp} dp + C_2. \end{aligned}$$

Példák

1. Oldjuk meg az

$$y'' \sin x \cos x - y' = 0$$

differenciálegyenletet.

A differenciálegyenletből y hiányzik. Új ismeretlen függvényt vezetünk be:
 $y' = p$; független változó marad x , tehát $y'' = p'$.

Behelyettesítve:

$$p' \sin x \cos x - p = 0.$$

Ez az elsőrendű differenciálegyenlet megoldható a változók szétválasztásával:

$$\frac{dp}{p} = \frac{dx}{\sin x \cos x}.$$

Mindkét oldalt integrálva:

$$\ln |p| = \ln |C_1 \operatorname{tg} x|,$$

vagy

$$p = C_1 \operatorname{tg} x,$$

tehát

$$y' = C_1 \operatorname{tg} x.$$

Ebből újabb integrálással:

$$y = C_2 - C_1 \ln |\cos x|.$$

Ez az általános megoldás.

2. Oldjuk meg az

$$xy''(e^y + 1) - e^y - y' = 0$$

differenciálegyenletet.

A differenciálegyenletből y hiányzik. Az $y' = p$, $y'' = p'$ helyett esítéssel:

$$x p'(e^p + 1) - e^p - p = 0,$$

vagy a változókat szétválasztva:

$$\frac{dx}{x} = \frac{e^p + 1}{e^p + p} dp.$$

Mindkét oldalt integrálva:

$$\ln x = \ln |C_1 (e^p + p)|,$$

vagy

$$x = C_1 (e^p + p).$$

Mivel

$$y' = \frac{dy}{dx} = p,$$

ezért

$$\frac{dy}{dp} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dp} = p \frac{dx}{dp}.$$

A mi esetünkben

$$\frac{dx}{dp} = C_1 (e^p + 1),$$

tehát

$$\frac{dy}{dp} = p C_1 (e^p + 1),$$

vagy a változókat szétválasztva:

$$dy = (C_1 p e^p + C_1 p) dp.$$

Mindkét oldalt integrálva:

$$y = C_1 p e^p - C_1 e^p + C_1 \frac{p^2}{2} + C_2.$$

Tehát az adott differenciálegyenlet általános megoldása paraméteres alakban:

$$x = C_1 (e^p + p),$$

$$y = C_1 p e^p - C_1 e^p + C_1 \frac{p^2}{2} + C_2.$$

3. Oldjuk meg a

$$2y y' - y'' = 0$$

differenciálegyenletet.

A differenciálegyenletből x hiányzik. Új ismeretlen függvényt vezetünk be: $y' = p$; új független változó: y . Ekkor $y'' = \frac{dp}{dy} p$.

A differenciálegyenletbe behelyettesítve:

$$2y p - \frac{dp}{dy} p = 0,$$

vagy

$$p \left(2y - \frac{dp}{dy} \right) = 0.$$

Két eset lehetséges:

a) $p = 0$, és akkor $y = C$ egy megoldás.

b) $2y - \frac{dp}{dy} = 0$, és akkor a változókat szétválasztva:

$$dp = 2y dy.$$

Mindkét oldalt integráljuk:

$$p = y^2 + C_1$$

vagy p helyébe y' -t írva és a változókat szétválasztva:

$$dx = \frac{dy}{y^2 + C_1},$$

Mindkét oldalt integrálva:

$$x + C_2 = \int \frac{dy}{y^2 + C_1}.$$

Ha $C_1 = 0$, akkor $\int \frac{dy}{y^2 + C_1} = \int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y}.$

Ha $C_1 > 0$, akkor $\int \frac{dy}{y^2 + C_1} = \frac{1}{\sqrt{C_1}} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{y}{\sqrt{C_1}}.$

Ha $C_1 < 0$, akkor $\int \frac{dy}{y^2 + C_1} = -\frac{1}{\sqrt{|C_1|}} \operatorname{ar} \operatorname{th} \frac{y}{\sqrt{|C_1|}}.$

Így a differenciálegyenlet összes megoldásai:

$$y = C,$$

$$y = -\frac{1}{x + C},$$

$$y = \sqrt{C_1} \operatorname{tg} \sqrt{C_1} (x + C_2),$$

$$y = -\sqrt{|C_1|} \operatorname{th} \sqrt{|C_1|} (x + C_2).$$

4. Oldjuk meg az

$$y' - 1 = y y''$$

differenciálegyenletet.

A differenciálegyenletből x hiányzik. Az $y' = p$, $y'' = \frac{dp}{dy} p$ helyettesítéssel:

$$p - 1 = y p \frac{dp}{dy}.$$

A változókat szétválasztva:

$$\frac{dy}{y} = \frac{p}{p-1} dp.$$

Ebből integrálással:

$$\ln y = \ln C_1 + p + \ln |p-1|,$$

vagy

$$y = C_1 e^p (p-1).$$

Másrészt, mivel

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p},$$

$$dx = \frac{1}{p} \frac{dy}{dp} dp,$$

vagyis a mi esetünkben:

$$dx = C_1 e^p dp,$$

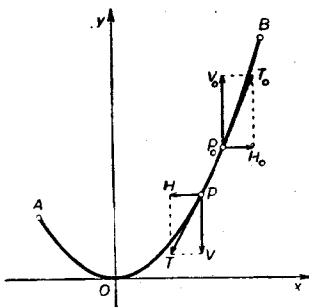
tehát

$$x = C_1 e^p + C_2.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása eszerint:

$$v = C_1 e^p (p - 1)$$

$$x = C_1 e^p + C_2.$$



60. ábra

5. Függesszünk fel egy homogén, állandó keresztmetszetű, teljesen hajlékonynak és nyúthatatlannak feltételezett kötelet az A és B pontokban. Tegyük fel továbbá, hogy a kötel minden pontjára ugyanakkora $q(x) = q = \text{állandó (kg/m)}$, függőleges irányú terhelés hat. Határozzuk meg azt az $v = y(x)$ függvényt, mely a kötel egyensúlyi alakját meghatározza (60. ábra).

Ragadjuk ki a kötelnek az x és x_0 abszcisszáik közötti szakaszát. Az ezekhez tartozó P és P_0 pontokban érintőirányú T és T_0 erő hat. Bontsuk fel ezeket vízszintes és függőleges irányú komponensekre, majd írjuk

fel a P és P_0 pontok közötti kötelrész egyensúlyát kifejező egyenleteket (I. Bevezetés, 9. példát).

A vízszintes irányú erőkre:

$$H = H_0 = \text{állandó.}$$

A függőleges irányú erőkre:

$$V - V_0 = \int_{x_0}^x q(x) dx.$$

Ez utóbbiból, ha $P_0 \rightarrow P$, akkor

$$\frac{dV}{dx} = q(x).$$

Mivel T érintőirányú, ezért

$$v' = \frac{V}{H},$$

s így

$$v'' = \frac{1}{H} \frac{dV}{dx},$$

vagyis

$$H v'' = q(x).$$

Ez a kötélgörbe differenciálegyenlete.

A mi esetünkben $q = \text{állandó}$. A kezdeti feltételek legyenek a következők:

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása kétszeres integrálással:

$$y = \frac{1}{H} \left(\frac{1}{2} q x^2 + C_1 x + C_2 \right).$$

Eszerint a kötélegyensúlyi alakja másodfokú parabola.

A kezdeti feltételeknek is megfelelő megoldás:

$$y = \frac{1}{2H} q x^2.$$

M e g j e g y z é s. Ha a kötelet csak a saját súlya terheli ($q(x) = \text{állandó}$) és a H vízszintes irányú feszítő erő „elég nagy”, akkor a fenti példának megfelelő közelítő alak lesz a kötélegyensúlyi alakja.

6. Legyen egy állandó keresztmetszetű, l hosszúságú, homogén vízszintes rúd az egyik végén befogva. A másik végén, tehát a befogás helyétől l távolságra $P = \text{állandó}$, függőleges irányú terhelés hat. Határozzuk meg a rugalmas (súlyponti) szál egyenletét (1. Bevezetés, 6. példát).

A rúd tetszés szerinti x helyén a hajlító nyomaték (61. ábra):

$$M = P(l - x).$$

Ha E a rugalmassági modulusz, I a keresztmetszetnek a súlypontján átmenő, vízszintes tengelyre vonatkozó másodrendű nyomatéka és ϱ a súlyponti szál görbületi sugara, akkor

$$M = \frac{E I}{\varrho}.$$

Másrészt, ha $y = y(x)$ az a függvény, mely a súlyponti szálát meghatározza, akkor

$$\varrho = \pm \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}.$$

Feltehetően, a kis lehajlás miatt y' olyan kicsiny, hogy 1 mellett y'^2 elhanyagolható. Így közelítőleg:

$$\frac{1}{\varrho} = \pm y''.$$

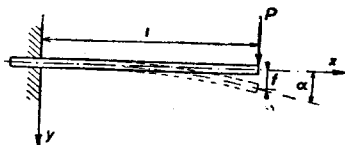
A választott koordináta-rendszerben y'' és M megegyező előjelűek.

Így a keresett differenciálegyenlet:

$$y'' = \frac{P(l - x)}{I E}.$$

Kétszer integrálva:

$$y = \frac{P}{I E} \left(-\frac{x^3}{6} + \frac{l x^2}{2} \right) + C_1 x + C_2.$$



61. ábra

A kezdeti feltételek: $y(0) = 0$, és $y'(0) = 0$. Az ezeket is kielégítő partikuláris megoldás:

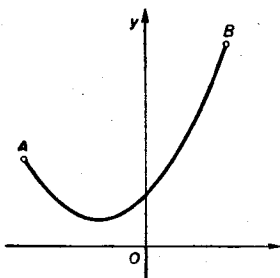
$$y = \frac{P}{IE} \left(\frac{l x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right).$$

A végpont függőleges irányú elmozdulása, a rúd lehajlása:

$$f = y(l) = \frac{P l^3}{3 IE}.$$

Ebben a pontban az érintő iránytangense (ún. szögjárulék):

$$\operatorname{tg} \alpha = y'(l) = \frac{P l^2}{2 IE}.$$



62. ábra

7. Függesszünk fel az A és B pontok között egy homogén és állandó keresztmetszetű kötelet, melyet csak a saját súlya terhel. Határozzuk meg az *egyensúlyi alakot*. (62. ábra.)

Legyen a hosszegység súlya: γ kg/m. Ekkor az abszcissa egységére vonatkoztatott súly:

$$q(x) = \gamma \frac{ds}{dx} = \gamma \sqrt{1 + y'^2}.$$

Így a megoldandó differenciálegyenlet (l. az 5. példát):

$$y'' = \frac{\gamma}{H} \sqrt{1 + y'^2}.$$

Új ismeretlen függvényt vezetünk be: $y' = p$. Ekkor $y'' = p'$, és így, mindjárt a változókat szétválasztva:

$$\frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{\gamma}{H} dx,$$

vagy mindkét oldalt integrálva:

$$\operatorname{ar} \operatorname{sh} p = \frac{\gamma}{H} (x + C_1),$$

vagy ebből:

$$p = \operatorname{sh} \frac{\gamma}{H} (x + C_1),$$

illetve

$$y' = \operatorname{sh} \frac{\gamma}{H} (x + C_1).$$

Ezt integrálva, a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = \frac{H}{\gamma} \operatorname{ch} \frac{\gamma}{H} (x + C_1) + C_2.$$

Az egyensúlyi alak a láncgörbe alakja.

A C_1 és C_2 integrálási állandókat, valamint a H (vízszintes irányú) erőkomponenst úgy kell meghatároznunk, hogy az adott L hosszúságú köté az adott A és B pontokon átmenjen.

Ha $A(x_1, y_1)$ és $B(x_2, y_2)$, akkor fenn kell állnia a következő két egyenletnek:

$$y_1 = \frac{H}{\gamma} \operatorname{ch} \frac{\gamma}{H} (x_1 + C_1) + C_2,$$

$$y_2 = \frac{H}{\gamma} \operatorname{ch} \frac{\gamma}{H} (x_2 + C_1) + C_2.$$

Másrészt

$$\begin{aligned} L &= \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx = \frac{H}{\gamma} \int_{x_1}^{x_2} y'' dx = \frac{H}{\gamma} [y'(x_2) - y'(x_1)] = \\ &= \frac{H}{\gamma} \left[\operatorname{sh} \frac{\gamma}{H} (x_2 + C_1) - \operatorname{sh} \frac{\gamma}{H} (x_1 + C_1) \right]. \end{aligned}$$

Ez a három egyenlet egyértelműen meghatározza a három állandót (C_1 , C_2 és H).

8. R belső sugarú, L hosszúságú hengeres csőben, súrlódással stacionárius áramlásban folyadék áramlik $p_2 - p_1$ nyomáskülönbség hatására. Határozzuk meg az áramlás sebességét a henger sugarának függvényében (l. Bevezetés, 8. példát).

A megoldandó differenciálegyenlet:

$$\frac{d^2 v}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv}{dr} = - \frac{p_2 - p_1}{L \eta}.$$

(Itt η a súrlódási együttható.)

A differenciálegyenletet úgy oldjuk meg, hogy elsőrendűre redukáljuk a $\frac{dv}{dr} = u$ új ismeretlen függvény bevezetésével. Ekkor a megoldandó differenciálegyenlet — a $-\frac{p_2 - p_1}{L \eta} = k$ egyszerűsítő jelöléssel — így alakul:

$$\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} = k.$$

Ez egy elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet, melynek általános megoldása:

$$u = \frac{k}{2} r^2 + C_1 \frac{1}{r},$$

azaz

$$\frac{dv}{dr} = \frac{k}{2} r^2 + C_1 \frac{1}{r}.$$

Innen integrálással adódik:

$$v = \frac{k}{4} r^2 + C_1 \ln r + C_2.$$

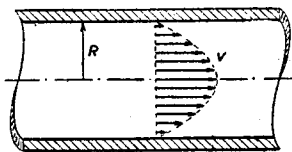
Ez a differenciálegyenlet általános megoldása.

Az integrálási állandókat a következő feltevéssel határozzuk meg:

Az áramlás sebessége nyilván mindenütt csak véges értékű lehet. Mivel pedig $\ln r \rightarrow -\infty$, ha $r \rightarrow 0$, kell, hogy $C_1 = 0$ legyen. A C_2 állandó pedig abból a feltevésből számítható, hogy a csőfal mentén ($r = R$) a folyadék tapad, tehát $v = 0$, és így

$$C_2 = -\frac{k}{4} R^2.$$

Végeredményben az ismert (Hagen—Poiseuille-féle) parabolikus sebességeloszlást jellemző



63. ábra

azaz

$$v = \frac{k}{4} r^2 - \frac{k}{4} R^2,$$

$$v = \frac{p_2 - p_1}{4 L \eta} (R^2 - r^2)$$

összefüggés adódik (63. ábra).

9. Szabadon lengő rendszert létesítünk oly módon, hogy egy rugót, a ráerősített m tömeggel ellentétes végén befogunk; megnyújtjuk bizonyos hosszúságra és szabadon hagyjuk. Sűrűlódás és egyéb energiafogyasztó körülményektől eltekintünk! Ez esetben a kitéréssel arányos és azzal ellenkező irányú erő, az ún. visszatérítő erő ébred. Írható tehát, hogy

$$P = -r y.$$

Itt az r arányossági tényező az ún. rugóállandó (az egységnyi kitérésre — megnyúlásra vagy megrövidülésre — eső erő. Megjegyezzük, hogy szokás rugóállandónak az itt szereplő r reciprokát is nevezni:

$$c = \frac{1}{r},$$

ez pedig az egységnyi visszatérítő erőhöz tartozó kitérést jelenti).

Ezzel a kérdéses mozgás differenciálegyenlete:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -r y,$$

vagy

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{r}{m} y = 0.$$

Oldjuk meg ezt a differenciálegyenletet és válasszuk ki a $t = 0$, $y = l$, $\frac{dy}{dt} = 0$ kezdeti feltételekhez tartozó partikuláris megoldást. (Megjegyezzük, hogy az adott differenciálegyenlet az itt tárgyalttól különböző, más, egyszerűbb módszerrel is megoldható, éspedig mint állandó együtthatójú másodrendű homogén lineáris differenciálegyenlet. — L. a IV. fejezetet.)

A differenciálegyenlet elsőrendűre redukálható $\frac{dy}{dt} = v$ bevezetésével.

Lesz

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dy} \frac{dy}{dt} = \frac{dv}{dy} v.$$

Ezt behelyettesítve:

$$\frac{dv}{dy} v + \frac{r}{m} y = 0.$$

A változókat szétválasztva és integrálva:

$$\int v dv = -\frac{r}{m} \int y dy + C_1$$

$$\frac{v^2}{2} = C_1 - \frac{r}{m} \frac{y^2}{2}.$$

Fejezzük ki innen v -t:

$$v = \sqrt{2C_1 - \frac{r}{m} y^2}.$$

Egyszerűség kedvéért (és csupán a valós megoldásokra figyelemmel, az állandónak csak pozitív értéket engedve meg) legyen

$$2C_1 = C_2^2.$$

Akkor

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{C_2^2 - \left(\sqrt{\frac{r}{m}} y\right)^2}.$$

Ebből integrálással adódik:

$$\sqrt{\frac{m}{r}} \arcsin \left| \sqrt{\frac{r}{m}} \cdot \frac{y}{C_2} \right| = t + C_3,$$

vagy

$$\arcsin \left(\sqrt{\frac{r}{m}} \cdot \frac{y}{C_2} \right) = \sqrt{\frac{r}{m}} t + C_4.$$

Ebből a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = C_2 \sqrt{\frac{m}{r}} \sin \left(\sqrt{\frac{r}{m}} t + C_4 \right).$$

Az integrálási állandókat a kezdeti feltételek behelyettesítésével határozhatjuk meg:

$$l = C_2 \sqrt{\frac{m}{r}} \sin C_4;$$

és mivel

$$\frac{dy}{dt} = C_2 \cos \left(\sqrt{\frac{r}{m}} t + C_4 \right),$$

ezért

$$0 = C_2 \cos C_4.$$

A $C_2 = 0$ esetet ki kell zárunk, mert ekkor $y \equiv 0$ volna. Ezért kell, hogy

$$\cos C_4 = 0$$

legyen, azaz

$$C_4 = \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

Ezzel

$$l = C_2 \sqrt{\frac{m}{r}} \sin \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right),$$

és innen

$$C_2 = \pm \sqrt{\frac{r}{m}} l$$

$k = 2n + 1$ esetén a negatív, $k = 2n$ esetén pedig a pozitív előjel érvényes).

A kezdeti feltételekhez tartozó partikuláris megoldás tehát:

$$y = \pm l \sin \left| \sqrt{\frac{r}{m}} t + \frac{\pi}{2} + k\pi \right|.$$

vagy felhasználva a $\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{2} + k\pi \right) = \mp \cos \alpha$ összefüggést, ez így is írható:

$$y = l \cos \sqrt{\frac{r}{m}} t.$$

A rezgőmozgás körfrekvenciája:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{r}{m}}.$$

A teljes rezgés ideje:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{r}}.$$

A másodpercenkénti rezgésszám:

$$\nu_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{r}{m}}.$$

A nyugalmi helyzetből (középhezletből) egyszer kitérített tömeg tehát — a tömeg és a visszatérítő erő (illetve rugóállandó) nagyságától függő frekvenciával — lineáris (egyenes menti) harmonikus rezgőmozgást fog végezni. A kilengés (amplitudó) nagysága a kezdeti kitérítéstől függ és állandó, vagyis az egyszer elindított mozgás periodikusan ismétlődve, állandóan fennmarad (csillapítástól eltekintettünk!).

10. Ha a hosszú egyenes rudat a két végén nyomó erők terhelik, akkor — bizonyos körülmények között — a *rúd kihajlik* (kerületi feltételek: $y(0) = y(l) = 0$).

Az A ponttól x távolságban a hajlító nyomaték

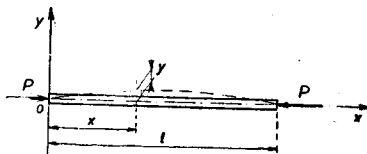
$$M = P y \quad (64. \text{ ábra}).$$

Igy a rugalmas szál differenciálegyenlete (l. 6. példát):

$$y'' = -\frac{P}{I E} y,$$

vagy az $\alpha^2 = \frac{P}{I E}$ jelöléssel:

$$y'' + \alpha^2 y = 0.$$



64. ábra

Ennek a differenciálegyenletnek az általános megoldása:

$$y = C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x.$$

A mi esetünkben általában az adódik, hogy

$$C_1 = C_2 = 0,$$

vagyis

$$y \equiv 0,$$

a rúd nem hajlik ki.

Ha azonban

$$\sin \alpha l = 0,$$

vagyis

$$\alpha l = k \pi, \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

azaz

$$P = P_k = k^2 \pi^2 \frac{I E}{l^2} \quad (\text{kritikus terhelés}),$$

akkor

$$y = C_1 \sin \alpha x,$$

bármilyen C_1 értékkel is megoldás. Ilyen terhelésnél a rúd egyensúlya közömbös (indifferens), a rúdnak számtalan sok lehetséges egyensúlyi alakja lehetséges. A rúd a legkisebb keresztirányú erőhatásra kihajlik.

11. A fizikai ingának a függőlegestől való eltérési szöge: φ a következő differenciálegyenletnek tesz eleget:

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -l m g \sin \varphi.$$

Itt t jelenti az időt, I az ingának a forgástengelyre vonatkozó tehetetlenségnyomatékát, l a súlypontnak a forgástengelytől való távolságát, m az inga tömegét. végiül g a nehézségi gyorsulást.

E hiányos differenciálegyenlet megoldására alkalmazzuk a

$$\frac{d\varphi}{dt} = p(\varphi)$$

helyettesítést. Ezzel

$$I p \frac{dp}{d\varphi} = -l m g \sin \varphi.$$

Ebből — a változókat szétválasztva — és integrálva:

$$I \frac{p^2}{2} = l m g \cos \varphi + C_1.$$

Legyen $\varphi = 0$ esetén $p = p_0$, akkor

$$I \frac{p_0^2}{2} = l m g + C_1,$$

vagyis

$$I (p^2 - p_0^2) = 2 l m g (\cos \varphi - 1).$$

Ebből pedig

$$p = \sqrt{p_0^2 + \frac{2 l m g}{I} (\cos \varphi - 1)}.$$

vagyis

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{p^2 + \frac{2 l m g}{I} (\cos \varphi - 1)}.$$

A továbbiakban csak azzal az esettel foglalkozunk, amikor van olyan $\varphi = \alpha$ kitérés, melyre $\frac{d\varphi}{dt} = 0$; kizárjuk tehát az „átforduló inga” esetét. α értéke akkor φ szélsőértékét, tehát a maximális kilengés szögét jelöli. A $\varphi = \alpha$ helyen tehát

$$0 = \sqrt{p_0^2 + \frac{2 l m g}{I} (\cos \alpha - 1)},$$

s innen

$$p_0^2 = -\frac{2 l m g}{I} (\cos \alpha - 1).$$

Ezzel a φ -re talált elsőrendű differenciálegyenlet így módosul:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2 l m g}{I} [(\cos \varphi - 1) - (\cos \alpha - 1)]},$$

vagy

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2 l m g}{I} \left(2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)},$$

végül

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{4 l m g}{I} \left(\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)}.$$

Szétválasztva a változókat:

$$dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{I}{lmg}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}.$$

Ha feltesszük, hogy $t = 0$ időpontban $\varphi = 0$, akkor ebből integrálással:

$$t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{I}{lmg}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}.$$

Itt a jobb oldalon fellépő integrál nem fejezhető ki elemi függvényekkel, csak az ún. elliptikus függvények segítségével.

Megjegyzés. Kis szögkitérések esetén, amikor a $\sin \varphi \approx \varphi$ közelítés megengedett, a megoldandó differenciálegyenlet így módosul:

$$I \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -lmg\varphi.$$

Ennek a megoldása pl. a 9. példa mintájára határozható meg.

12. Az (x, y) síkban egy m tömegpont mozog egy, az origótól mért távolságával arányos erő hatására. Induljon a $t = 0$ időpillanatban az $(a, 0)$ pontból, az x tengelyre merőleges v_0 kezdősebességgel. Határozzuk meg a *pontmozgás pályagörbéjét* (65. ábra).

Legyen a tömegpont a t időpontban a $P(x, y)$ pontban. A ráható erő \vec{PO} irányú, és abszolút értéke kr , ahol r jelenti az OP távolságot, és k arányossági tényező.

A tömegpontra ható erő x és y irányú összetevője:

$$P_x = -kr \cos \varphi = -kx,$$

illetve

$$P_y = -kr \sin \varphi = -ky.$$

A mozgásegyenletek:

$$m\ddot{x} = -kx,$$

illetve

$$m\ddot{y} = -ky.$$

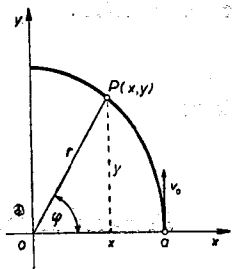
Mindkét differenciálegyenlet hiányos másodrendű differenciálegyenlet.

A

$$\frac{dx}{dt} = u,$$

illetve

$$\frac{dy}{dt} = v$$



65. ábra

helyettesítéssel:

$$m u \frac{du}{dx} = -k x,$$

illetve

$$m v \frac{dv}{dy} = -k y.$$

Ezekből

$$u^2 + \frac{k}{m} x^2 = C_1,$$

illetve

$$v^2 + \frac{k}{m} y^2 = C_2.$$

Az integrálási állandókat megkapjuk, ha az $u = 0$, $v = v_0$, $x = a$, $y = 0$ értékeket behelyettesítjük. Ekkor lesz

$$u^2 + \frac{k}{m} x^2 = \frac{k}{m} a^2,$$

illetve

$$v^2 + \frac{k}{m} y^2 = v_0^2.$$

Visszaírva az eredeti változókat, lesz:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

illetve

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{\frac{v_0^2 m}{k} - y^2}.$$

Ezekből a differenciálegyenletekből — az $x = a$, $y = 0$, $t = 0$ kezdeti feltételek figyelembevételével — kapjuk:

$$x = a \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t,$$

illetve

$$y = v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t.$$

Ez a két egyenlet a pályagörbe paraméteres egyenletrendszerét alkotja. A t paramétert kiküszöbölve, kapjuk az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\frac{v_0^2 m}{k}} = 1$$

egyenletű ellipszist.

Feladatok

a) Gyakorló feladatok

1. $y'' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

2. $y'' = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$

3. $y'' + \frac{1+2x}{(x+x^2)^2} = 0.$

4. $(1 + \sin x)^2 y'' + \cos x = 0.$

5. $(x^2 + 4x + 3)^{\frac{3}{2}} y'' + x + 2 = 0.$

6. $y' = \sin \frac{xy''}{\sqrt{1-y'^2}}.$

7. $(1-x^2)y'' + xy' = 0.$

8. $2xy''' + y' = 0.$

9. $y'' = y' - x^2 + 2x.$

10. $y'' = y' + e^x.$

11. $y'' + 2y' = e^x.$

12. $y'' = \frac{1}{x} y' + x \sin x.$

13. $x^2 y'' = 2xy' - 3.$

14. $x \ln x \cdot y'' = y' + x \ln^2 x.$

15. $y'' + y' = e^{-x}.$

16. $xy'' - y' = x^3.$

17. $y^3 y'' = 1.$

18. $2y'' + y'^3 = 0.$

19. $yy'' = 1 + y'^2.$

20. $yy'' + 1 + y'^2 = 0.$

21. $y'' = \frac{yy'^2}{1+y^2}.$

22. $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)y'^2 = 0.$

23. $y'^2 = y'.$

24. $y'' = (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}.$

25. $2y'^2 = (y-1)y''.$

26. $6y''(2y'^2 - y') = 1.$

27. $y'(y'^2 + 1)(y' - 2) + y''(3y'^2 - 4y' + 1) = 0.$

28. $y'(1 + y'^2) - 3y'' = 0.$

29. $yy'' - y'^2 = y^2 \ln y.$

30. $y'' + y'^2 = 1.$

31. $y'' + (x-a)y'^3 = 0.$ Itt $a = \text{állandó}.$

32. $2yy'' = y'^2.$

33. $yy'' = y'^2 - y'^3.$

34. $yy'' + y'^2 + 2a^2 y^2 = 0.$ Itt $a = \text{állandó}.$

35. $y''(y-1) = 2y'^2.$

36. $y'' = x y'^3.$

37. $yy'' = 2y'^2.$

38. $yy'' = y'^2 + yy'^3.$

39. $y'' - \frac{1}{x} y' + y'^2 = 0.$

40. $yy'^2 = 1.$

b) Geometriai és fizikai feladatok

1. Határozzuk meg annak a görbének az egyenletét, amelynél a normális hossza a görbe pontjától az x tengelyig egyenlő a görbületi sugárral.
2. Határozzuk meg annak a görbének az egyenletét, amelynél a normális hossza fele akkora, mint a görbületi sugár.
3. Az m tömegpont síkmozgást végez egy, az origóból feléje irányuló $\frac{mk^2}{r^3}$ vonzóerő hatására. Itt m a tömeg, r a távolság, k arányossági tényező. A $t = 0$ időpontban az $(a, 0)$ pontból $v_0 > \frac{k}{a}$ sebességgel az x tengelyre merőleges irányban indul. Határozzuk meg a pályagörbe egyenletét.

Alkalmazzunk polárkoordinátákat és vegyük figyelembe, hogy a gyorsulásnak rádiuszvektor-irányú és erre merőleges összetevői:

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left| \frac{d\varphi}{dt} \right|^2,$$

$$a_\varphi = 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + r \frac{d^2 \varphi}{dt^2}.$$

4. Az m tömegpont az x tengely mentén mozog, miközben az origó felé irányuló, $m k^2 x$ nagyságú erő hat rá. Határozzuk meg az $x = x(t)$ függvényt az $x(0) = a, \dot{x}(0) = 0$ kezdeti feltételek figyelembevételével.

5. Egy hengeres rúd csavaró lengéseit az

$$I_m \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - \frac{G I_p}{l} \varphi$$

differenciálegyenlet határozza meg. Itt I_m jelenti a lengési középvonalra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatékot, φ a kitérés szögét, t az időt, G a torziómoduluszt (csúsztató rugalmassági tényezőt), I_p a keresztmetszet poláris másodrendű nyomatékát (d átmérőjű kör-keresztmetszetenél $I_p = \frac{d^4 \pi}{32}$) és l a rúd hosszát.

Oldjuk meg ezt a differenciálegyenletet a $t = 0, \varphi = \varphi_0, \frac{d\varphi}{dt} = 0$ kezdeti feltételek figyelembevételével.

6. Az l hosszúságú, állandó keresztmetszetű, homogén, vízszintes, egyik végén befogott rúdon p kg/m egyenletesen megoszló, függőleges terhelés van. Határozzuk meg a rúd legnagyobb lehajlását.

7. Az l hosszúságú, állandó keresztmetszetű, homogén, vízszintes, egyik végén befogott rúdra a szabad végén M mkg hajtító nyomaték hat. Határozzuk meg a rúd vég lehajlását.

8. Az l hosszúságú, két végén alátámasztott, állandó keresztmetszetű, homogén, vízszintes rúdon p kg/m egyenletesen megoszló, függőleges terhelés van. Határozzuk meg a rúd legnagyobb lehajlását.

9. Az előző feladat, ha a terhelés a rúd közepén $\left(\frac{l}{2}\right)$ -nél P kg függőleges irányú, koncentrált erő.

10. Az előző feladat, ha a P koncentrált erő az egyik alátámasztástól a , a másiktól b távolságra van ($a + b = l$).

11. Az x tengelyen mozgó m tömegpontra egy az origó felé irányuló, $\frac{mk^2}{x^3}$ nagyságú visszatérítő erő hat (k az arányossági tényező). Ha a $t = 0$ időpillanatban $x = a$ és $\frac{dx}{dt} = \frac{k}{a}$, határozzuk meg az $x = x(t)$ függvényt.

12. Az előző feladat, ha a kezdősebesség $\frac{dx}{dt} = -\frac{k}{a}$.

13. Az x tengelyen mozgó m tömegpontra egy, az origóból a pont felé mutató $\frac{mk^2}{x^3}$ nagyságú taszító erő hat. Ha a $t = 0$ időpillanatban $x = a$ és $\frac{dx}{dt} = \frac{k}{a}$, határozzuk meg az $x = x(t)$ függvényt.

14. Az előző feladat, ha a kezdősebesség $\frac{dx}{dt} = -\frac{k}{a}$.

15. v_0 kezdősebességgel, függőleges irányban felfelé hajítunk egy m tömegű testet. Tételezzük fel, hogy a levegő ellenállásából származó erő a sebességnek (m)-szoros. Határozzuk meg a h_{\max} magasságot és az ennek eléréséhez szükséges t időt.

16. v_0 kezdősebességgel, függőleges irányban felfelé hajítunk egy m tömegű testet. Tételezzük fel, hogy a levegő ellenállásából származó erő a sebesség négyzetével arányos (k az arányossági tényező). Határozzuk meg azt a végsebességet, mellyel a test a földre visszaesik.

17. Egy lövedéket v_0 kezdősebességgel, a vízszinteshez képest α szög alatt lőnek ki. Tegyük fel, hogy a levegő ellenállása a sebességgel arányos. Határozzuk meg a pályagörbe egyenletét.

18. Az m tömegpontra egy az origótól mért távolsággal arányos taszító erő hat. A $t = 0$ időpillanatban az $(a, 0)$ pontból, az x tengelyre merőlegesen, v_0 kezdősebességgel indul. Határozzuk meg a pályagörbe egyenletét.

19. Az m tömegpont az (x, y) síkban mozog. Az origóból $\frac{mk^2}{r^2}$ nagyságú vonzóerő hat rá. Ha a $t = 0$ időpillanatban az $r = a$, $\varphi = 0$ pontból, $v_0 = k\sqrt{\frac{2}{a}}$ kezdősebességgel indul a $\varphi = 0$ egyenesre merőleges irányban, határozzuk meg a pályagörbe egyenletét polárkoordinátákban.

20. Az előző feladat, $v_0 = \frac{k}{\sqrt{a}}$ kezdősebességgel.

2. §. Hiányosra visszavezethető másodrendű differenciálegyenletek

a) Másodrendű
lineáris
differenciál-
egyenletek

A másodrendű lineáris differenciálegyenlet általános alakja:

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x).$$

Ha $f(x) \equiv 0$, akkor a differenciálegyenlet homogén lineáris egybként inhomogén lineáris. Feltesszük, hogy $a(x)$,

$b(x)$, $c(x)$ és $f(x)$ valamely $\alpha < x < \beta$ intervallumban folytonos függvények, és itt

$a(x) \neq 0$. Ez esetben — a differenciálegyenletet $a(x)$ -szel végigosztva — nyerjük az

$$y'' + f_1(x) y' + f_2(x) y = f_3(x)$$

differenciálegyenletet.

Anélkül, hogy részletekbe bocsátkoznánk (l. még a IV. fejezetet, továbbá a sorozat további kötetét), megemlítjük, hogy ennek a differenciálegyenletnek az általános megoldását általában nem tudjuk meghatározni. Ha azonban *ismeretes* az adott differenciálegyenlethez tartozó

$$Y'' + f_1(x) Y' + f_2(x) Y = 0$$

homogén lineáris differenciálegyenletnek *egy partikuláris megoldása*, Y_1 , akkor az adott differenciálegyenletet az

$$y = u(x) Y_1$$

helyettesítéssel hiányos másodrendűre lehet visszavezetni. Ha ugyanis ezt a helyettesítést végrehajtjuk, nyerjük az

$$Y_1 u'' + (2 Y_1' + f_1 Y_1) u' + (Y_1'' + f_1 Y_1' + f_2 Y_1) u = f_3$$

differenciálegyenletet, melyből — figyelembe véve azt, hogy Y_1 a homogén lineáris differenciálegyenletnek egyik megoldása — az $u = u(x)$ ismeretlen függvényre az

$$Y_1 u'' + (2 Y_1' + f_1 Y_1) u' = f_3$$

hiányos másodrendű differenciálegyenlet adódik.

b) Másodrendű
homogén
„dimenziójú”
differenciál-
egyenletek

Tulajdonítsunk az

$$F(y'', y', y, x) = 0$$

differenciálegyenletben (itt F az argumentumainak racionális egész függvénye legyen) a változóknak dimenziószámokat a következőképpen: Legyen x -nek és a dx differenciálnak a dimenziója 1 és így x^k dimenziója k . Legyen továbbá y -nak és a dy , d^2y differenciáloknak a dimenziója n és így y' dimenziója ln .

A dimenziószámoknak ilyen értelmezése alapján

$$y' = \frac{dy}{dx} \text{ dimenziója: } n - 1,$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} \text{ dimenziója: } n - 2.$$

Ha most az adott differenciálegyenletben mindegyik tag dimenziója, vagyis az egyes tagokban szereplő változók dimenzióinak összege megegyezik, akkor a differenciálegyenletet homogén dimenziójúnak nevezzük.

A homogén dimenziójú másodrendű differenciálegyenletet hiányos másodrendűre lehet visszavezetni, az

$$x = e^u,$$

$$y = v e^{nu}$$

transzformációval (l. még I. 2. § d)).

Példák

1. Oldjuk meg az

$$x^2 \ln x \cdot y'' - xy' + y = x^2 \ln^2 x$$

másodrendű inhomogén lineáris differenciálegyenletet, ismerve a hozzátartozó homogén lineáris differenciálegyenletnek egy partikuláris megoldását: $Y_1 = x$.

A differenciálegyenlet általános megoldását

$$y = u x$$

alakban keressük, ahol $u = u(x)$ egyelőre ismeretlen függvény.

Mivel

$$y' = u + u' x,$$

$$y'' = 2u' + u'' x,$$

ezért ezek behelyettesítésével:

$$u'' x^3 \ln x + (2 x^2 \ln x - x^2) u' = x^2 \ln^2 x,$$

vagy ($x \neq 0$ feltevéssel):

$$u'' x \ln x + (2 \ln x - 1) u' = \ln^2 x.$$

Ez pedig az $u' = p$, $u'' = p'$ helyettesítéssel a

$$p' x \ln x + (2 \ln x - 1) p = \ln^2 x$$

elsőrendű inhomogén lineáris differenciálegyenletre vezet.

Ennek az általános megoldása:

$$p = C_1 \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2} \ln x,$$

vagyis

$$u' = C_1 \frac{\ln x}{x^2} + \frac{1}{2} \ln x,$$

ahonnan

$$u = C_1 \left(-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{2} x \ln x - \frac{1}{2} x + C_2,$$

vagyis végeredményben:

$$y = C_2 x - C_1 (\ln x + 1) + \frac{x^2}{2} (\ln x - 1).$$

2. Oldjuk meg az

$$xy y'' + xy'^2 = yy'$$

differenciálegyenletet.

A differenciálegyenletben szereplő egyes tagokhoz hozzárendelhető dimenziószámok:

$$2n - 1, \quad 2n - 1, \quad 2n - 1.$$

Tehát, ha $n = 0$, akkor valamennyi tag dimenziója -1 , azaz a differenciálegyenlet homogén dimenziójú.

Alkalmazzuk az

$$x = e^u$$

transzformációt. Ekkor

$$y' = \frac{dy}{du} \cdot e^{-u}$$

$$y'' = \left(\frac{d^2y}{du^2} - \frac{dy}{du} \right) e^{-2u}$$

Ezeket behelyettesítve:

$$e^u y \left(\frac{d^2y}{du^2} - \frac{dy}{du} \right) e^{-2u} + e^u \left(\frac{dy}{du} e^{-u} \right)^2 = y \frac{dy}{du} e^{-u},$$

vagyis

$$e^{-u} \left\{ y \frac{d^2y}{du^2} + \left(\frac{dy}{du} \right)^2 \right\} = e^{-u} \left(2y \frac{dy}{du} \right),$$

vagy

$$y \frac{d^2y}{du^2} + \left(\frac{dy}{du} \right)^2 = 2y \frac{dy}{du}.$$

Ez pedig egy hiányos másodrendű differenciálegyenlet.

A szokásostól eltérő módon egyszerűbben is meg tudjuk oldani, mert a differenciálegyenletnek mindkét oldala teljes differenciál:

$$\frac{d}{du} \left(y \frac{dy}{du} \right) = \frac{d}{du} (y^2).$$

Mindkét oldalt integrálva:

$$y \frac{dy}{du} = y^2 + C_1.$$

Ebből viszont a változókat szétválasztva és integrálva:

$$y^2 + C_1 = C_2 e^{2u};$$

vagy visszatérve az eredeti változókra:

$$y^2 + C_1 = C_2 x^2.$$

Ez az adott differenciálegyenlet általános megoldása.

Feladatok

a) Lineáris differenciálegyenletek

Oldjuk meg az alábbi másodrendű lineáris differenciálegyenleteket, ismerve a megfelelő homogén lineáris differenciálegyenletek egy-egy partikuláris megoldását (Y_1):

1. $x^2 (\ln x - 1) y'' - xy' + y = (x \ln x - x)^2$; $Y_1 = x$.

2. $xy'' - (1+x)y' + y = x^2 e^x$; $Y_1 = e^x$.
3. $xy'' + 2y' + xy = 0$; $Y_1 = \frac{\sin x}{x}$.
4. $y'' \sin^2 x - y' \sin x \cos x + y = \sin x$; $Y_1 = \sin x$.
5. $(x^2 - 2x + 2)y'' - x^2 y' + (2x - 2)y = 0$; $Y_1 = e^x$.
6. $(2x - x^2)y'' + (x^2 - 2)y' + (1 - x)y = 4x^4 - 10x^3 + 12x^2$; $Y_1 = x^2$.
7. $y'' + (\operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x)y' + 2 \operatorname{ctg}^2 x \cdot y = 0$; $Y_1 = \sin x$.
8. $x^2(1 - 2 \ln x)y'' + x(1 + 2 \ln x)y' - 4y = 2x \ln x - 3x$; $Y_1 = x^2$.
9. $(x \cos x - \sin x)y'' + x \sin x \cdot y' - \sin x \cdot y = x \cos 2x$; $Y_1 = x$.
10. $\sin^2 2x \cdot y'' + \sin 4x \cdot y' - 4y = 0$; $Y_1 = \operatorname{tg} x$.

b) Homogén
„dimenziójú“
differenciál-
egyenletek

- | | |
|----|-----------------------------|
| 1. | $x^2 y'' = 2y$. |
| 2. | $x^2 y'' + xy' - y = 0$. |
| 3. | $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x$. |
-
- | | | | |
|----|--------------------------|----|---------------------------|
| 4. | $xy y'' = xy'^2 + y^2$. | 5. | $x^4 y'' = (y - xy')^2$. |
|----|--------------------------|----|---------------------------|

IV. ÁLLANDÓ EGYÜTTHATÓJÚ ÉS ILYENRE VISSZAVEZETHETŐ LINEÁRIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

a) **Inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása**

Az n -ed rendű lineáris differenciálegyenlet általános alakja:

$$a_n(x) y^{(n)} + a_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \dots + a_2(x) y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = f(x),$$

ahol az $a_i(x)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) együtthatók és $f(x)$ az $\alpha < x < \beta$ intervallumban folytonos függvények és $a_n(x) \not\equiv 0$. Ha $f(x) \equiv 0$, az egyenlet *homogén*, különben *inhomogén*.

Az inhomogén lineáris differenciálegyenlet megoldása szorosan összefügg az ugyanazon bal oldallal bíró

$$a_n(x) Y^{(n)} + a_{n-1}(x) Y^{(n-1)} + \dots + a_2(x) Y'' + a_1(x) Y' + a_0(x) Y = 0$$

homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásával. Ennek az általános megoldása, ha Y_1, Y_2, \dots, Y_n egymástól lineárisan független n darab partikuláris megoldás, a következő:

$$Y = C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \dots + C_n Y_n.$$

Az inhomogén lineáris differenciálegyenlet y általános megoldása mármost egy y_0 partikuláris megoldásnak és a homogén egyenlet Y általános megoldásának összege:

$$y = y_0 + Y = y_0 + C_1 Y_1 + C_2 Y_2 + \dots + C_n Y_n.$$

Az Y_1, Y_2, \dots, Y_n megoldásokat általában nem tudjuk előállítani, ha azonban ezeket ismerjük, akkor y_0 meghatározható az *állandók variálásának módszerével*. E célból keressük y_0 -t az

$$y_0 = C_1(x) Y_1 + C_2(x) Y_2 + \dots + C_n(x) Y_n$$

alakban. A $C_k(x)$ függvények deriváltjai a következő lineáris egyenletrendszerből számíthatók ki:

$$C'_1 Y_1 + C'_2 Y_2 + \dots + C'_n Y_n = 0$$

$$C'_1 Y'_1 + C'_2 Y'_2 + \dots + C'_n Y'_n = 0$$

$$\dots \dots \dots$$

$$C'_1 Y_1^{(n-2)} + C'_2 Y_2^{(n-2)} + \dots + C'_n Y_n^{(n-2)} = 0$$

$$C'_1 Y_1^{(n-1)} + C'_2 Y_2^{(n-1)} + \dots + C'_n Y_n^{(n-1)} = \frac{f(x)}{a_n(x)}.$$

Mivel az Y_i ($i = 1, 2, \dots, n$) függvények egymástól lineárisan függetlenek, ez az egyenletrendszer egyértelműen megoldható az ismeretlen $C_k(x)$ függvények deriváltjaira. Ezekből pedig integrálással kapjuk a $C_k(x)$ függvényeket.

b) Állandó együtt-
hatóú homogén
lineáris diffe-
renciálegyenlet

Az

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

$$(a_n \neq 0)$$

állandó együttthatóú homogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x},$$

ahol

$$\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$$

az

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

karaktisztikus egyenlet gyökei. ($\lambda_i \neq \lambda_k$, ha $i \neq k$.)

Ha azonban $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m$ ($m \leq n$), akkor a megoldás megfelelő része:

$$(C_1 + C_2 x + \dots + C_m x^{m-1}) e^{\lambda_1 x}.$$

A komplex gyökpároknak megfelelő rész valós alakban írható a következő mintára:

Ha

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta,$$

$$\lambda_2 = \alpha - i\beta,$$

akkor az általános megoldásban szereplő

$$C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

tagok helyett — az Euler-féle összefüggések alapján — írható:

$$e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Ha a komplex gyökpárok is többszörösek ($m \leq \frac{n}{2}$), azaz pl.

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = \alpha + i\beta,$$

és

$$\lambda_{m+1} = \lambda_{m+2} = \dots = \lambda_{2m} = \alpha - i\beta,$$

akkor a megoldás megfelelő része helyett, valós alakban írhatjuk:

$$e^{\alpha x} \{(C_1 + C_2 x + \dots + C_m x^{m-1}) \cos \beta x + (C_{m+1} + C_{m+2} x + \dots + C_{2m} x^{m-1}) \sin \beta x\}.$$

c) Állandó együtt-
hatóú inhomogén
lineáris differenciál-
egyenlet meg-
oldása kísérle-
tező feltevessel

Ha az állandó együttthatóú

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlet jobb oldalán álló $f(x)$ függvény csak olyan tagokból áll, melyeknek csak véges számú lineárisan független deriváltjaik vannak, akkor az állandók variálásának hosszadalmas módszere helyett az

inhomogén egyenlet y_0 partikuláris megoldását kísérletező feltevessel (próba-függvénnyel, Ansatz) határozhatjuk meg. Ilyen függvények az alábbiak:

$$\alpha e^{\beta x}, \alpha \cos \beta x, \alpha \sin \beta x; \alpha_k x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0,$$

vagy ezek tetszőleges lineáris kombinációja.

α) Mindenekelőtt összeírjuk az $f(x)$ függvényben szereplő tagokat és különböző deriváltjaikat (az állandó együtthatók nélkül). Ha ezek közül egyik sem szerepel az adott differenciálegyenlethez tartozó homogén egyenlet megoldásai között, akkor ezeknek lineáris kombinációja alakjában kereshetjük az y_0 megoldást.

Pl. ha

$$f(x) = x^2 e^{2x} + \sin 3x,$$

akkor, mivel a jobb oldalon szereplő tagok és deriváltjaik (az állandó együtthatók nélkül):

$$x^2 e^{2x}, x e^{2x}, e^{2x}, \sin 3x, \cos 3x,$$

ha ezek egyike sem megoldása a homogén differenciálegyenletnek, akkor feltesszük, hogy

$$y_0 = (A x^2 + B x + C) e^{2x} + D \sin 3x + E \cos 3x,$$

ahol A, B, C, D és E egyelőre ismeretlen állandókat jelentenek.

β) Ha az előbb említett függvények közül némelyek szerepelnek a homogén rész megoldásai között, akkor mindenekelőtt úgy osztjuk csoportokba az előbb említett függvényeket, hogy egy-egy csoportban az egymásból deriválással származtatott tagok legyenek. Ha ezen csoportok valamelyikének egyik tagja a homogén rész megoldása, akkor ennek a csoportnak mindegyik tagját megszorozzuk x -nek azzal a legkisebb kitevőjű hatványával, mellyel megszorozva, már e csoport valamennyi tagja különbözni fog a homogén rész megoldásaitól. A próbafüggvényben azután ezekkel a tagokkal helyettesítjük a szóban forgó csoport eredeti tagjait.

Pl. ha $f(x)$ ugyanaz, mint előbb, két csoportunk van:

$$x^2 e^{2x}, x e^{2x}, e^{2x}$$

és

$$\sin 3x, \cos 3x.$$

Tegyük fel, hogy a homogén rész megoldása:

$$(C_1 + C_2 x) e^{2x} + C_3 e^x.$$

Mivel az első csoportból e^{2x} és $x e^{2x}$ megoldásai a homogén differenciálegyenletnek, ezért a próbafüggvény:

$$y = x^2 (A x^2 + B x + C) e^{2x} + D \sin 3x + E \cos 3x.$$

Megjegyzés. A lengéstanból vett analógia alapján a β) esetben azt mondjuk, hogy rezonancia esete áll fenn. x -nek az a kitevője, amellyel képezett x hatványt szorozóként alkalmazzuk, rezonancia esetében jelzi a rezonancia többszörösségének számát. Így a felhozott példában kétszeres rezonancia áll fenn.

d) Euler-féle
lineáris
differenciál-
egyenlet

Az

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 x^2 y'' + \\ + a_1 x y' + a_0 y = f(x),$$

ún. Euler-féle differenciálegyenlet — melyben az a_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) együtthatók — az

$$x = e$$

helyettesítéssel állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenletre redukálható. (Hasonlítsuk össze ezt az eljárást a III. 2. § b)-ben mondottakkal!)

Az Euler-féle homogén lineáris differenciálegyenletet meg lehet oldani az $Y = x^\lambda$ kísérletező feltevessel is.

Példák

1. Az

$$x^2 \ln x \cdot y'' - xy' + y = x^2 \ln^2 x$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlethez tartozó

$$x^2 \ln x Y'' - x Y' + Y = 0$$

homogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása:

$$Y = C_1 x + C_2 (\ln x + 1) \quad (\text{I. III. 2. § 1. példát}).$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását az állandók variálásának módszerével keressük:

$$y_0 = C_1(x) x + C_2(x) (\ln x + 1).$$

Ekkor

$$C_1' x + C' (\ln x + 1) = 0$$

$$C_1' + C' \frac{1}{x} = \ln x.$$

Ebből

$$C_1' = \ln x + 1,$$

$$C_2' = -x,$$

és innen

$$C_1 = x \ln x,$$

$$C_2 = -\frac{x^2}{2}$$

Tehát

$$y_0 = \frac{x^2}{2} (\ln x - 1).$$

Végeredményben az adott differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = y_0 + Y = \frac{x^2}{2} (\ln x - 1) + C_1 x + C_2 (\ln x + 1).$$

2. Az

$$y''' - 2y'' - 3y' + 10y = 0$$

homogén lineáris differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda + 10 = 0.$$

Ennek gyökei

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 2 + i, \lambda_3 = 2 - i$$

Így az általános megoldás:

$$y = C_1 e^{-2x} + e^{2x} (C_2 \cos x + C_3 \sin x).$$

3. Az

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^x}$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlethez tartozó homogén egyenlet:

$$Y'' + 3Y' + 2Y = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0.$$

Ennek a gyökei:

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1.$$

A homogén egyenlet általános megoldása tehát:

$$Y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}.$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását az állandók variálásának módszerével keressük.

$$y_0 = C_1(x) e^{-2x} + C_2(x) e^{-x}$$

alakban. Ekkor

$$C_1' e^{-2x} + C_2' e^{-x} = 0,$$

$$-2C_1' e^{-2x} - C_2' e^{-x} = \frac{1}{1 + e^x}.$$

Innen

$$C_1' = -\frac{e^{2x}}{1 + e^x} \quad \text{és} \quad C_2' = \frac{e^x}{1 + e^x},$$

s ebből integrálással:

$$C_1 = \ln(e^x + 1) - e^x,$$

$$C_2 = \ln(e^x + 1).$$

Ezekkel

$$y_0 = e^{-2x} \{ \ln(e^x + 1) - e^x \} + e^{-x} \ln(e^x + 1).$$

Az adott differenciálegyenlet általános megoldása tehát:

$$y = e^{-2x} \{ \ln(e^x + 1) - e^x \} + e^{-x} \ln(e^x + 1) + C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x}.$$

4. Az

$$y''' + y'' - 5y' + 3y = 6x^2 - 11x - 14$$

differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 3 = (\lambda - 1)^2 (\lambda + 3) = 0.$$

Ennek gyökei:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1,$$

$$\lambda_3 = -3.$$

Így a homogén egyenlet általános megoldása:

$$Y = (C_1 + C_2 x) e^x + C_3 e^{-3x}.$$

A jobb oldalon álló x^2 , x és deriváltjaik alapján feltesszük, hogy

$$y_0 = \underline{A x^2 + B x + C}.$$

Ha ezt behelyettesítjük az eredeti differenciálegyenletbe:

$$3A x^2 + (-10A + 3B)x + (2A - 5B + 3C) \equiv 6x^2 - 11x - 14.$$

Ha a kísérletező feltevés valóban megoldást ad, akkor ennek az egyenletnek fenn kell állnia minden x -re, vagyis

$$3A = 6$$

$$-10A + 3B = -11$$

$$2A - 5B + 3C = -14,$$

azaz

$$A = 2, B = 3, C = -1.$$

Tehát

$$y_0 = 2x^2 + 3x - 1.$$

Végeredményben

$$y = (C_1 + C_2 x) e^x + C_3 e^{-3x} + 2x^2 + 3x - 1.$$

5. Az

$$y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$$

homogén lineáris differenciálegyenlethez tartozó karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = (\lambda^2 + 4)^2 = 0,$$

s ennek gyökei:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2i, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = -2i.$$

Így az általános megoldás, mindjárt valós alakban:

$$y = (C_1 + C_2 x) \cos 2x + (C_3 + C_4 x) \sin 2x.$$

6. Az

$$y''' + y'' = x^2 + 2x + e^x$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlethez tartozó homogén egyenlet:

$$Y''' + Y'' = 0.$$

A karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^3 + \lambda^2 = \lambda^2 (\lambda + 1) = 0.$$

Ennek gyökei:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = -1.$$

A homogén rész általános megoldása:

$$Y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x}.$$

Az inhomogén egyenlet jobb oldalán álló függvényekből és deriváltjaikból

$$A x^2 + B x + C + D e^x$$

adódnék próbafüggvénynek, azonban figyelemmel arra, hogy $B x$ és C szerepel a homogén rész megoldásai között, az első három tagot x^2 -tel kell szoroznunk:

$$y_0 = x^2 (A x^2 + B x + C) + D e^x = A x^4 + B x^3 + C x^2 + D e^x.$$

Ha ezt behelyettesítjük a differenciálegyenletbe:

$$12A x^2 + (24A + 6B) x + 6B + 2C + 2D e^x \equiv x^2 + 2x + e^x.$$

Az együtthatók összehasonlításából kapjuk:

$$12A = 1,$$

$$24A + 6B = 2,$$

$$6B + 2C = 0,$$

$$2D = 1,$$

s innen

$$A = \frac{1}{12}, \quad B = C = 0. \quad D = \frac{1}{2}.$$

Így az adott differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + \frac{1}{12} x^2 + \frac{1}{2} e^x.$$

7. Az

$$y'' + 4y = 3x \cos x$$

differenciálegyenlethez tartozó

$$Y'' + 4Y = 0$$

homogén egyenlet megoldása:

$$Y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x.$$

Az adott egyenlet jobb oldalán álló $x \cos x$ függvény és deriváltjai a következő tagokat adják (állandó szorzókat elhagyva):

$$x \cos x, \quad x \sin x, \quad \cos x, \quad \sin x.$$

Mivel ezek közül egyik sem szerepel a homogén rész megoldásai között, ezért a próbafüggvény:

$$y_0 = A x \cos x + B x \sin x + C \cos x + D \sin x.$$

Ha ezt behelyettesítjük az adott egyenletbe, kapjuk

$$3A x \cos x + 3B x \sin x + (2B + 3C) \cos x + (3D - 2A) \sin x \equiv 3x \cos x,$$

és ebből

$$A = 1, \quad B = C = 0, \quad D = \frac{2}{3}.$$

Így a keresett általános megoldás:

$$y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + x \cos x + \frac{2}{3} \sin x.$$

8. Oldjuk meg az

$$x^2 y'' + 2xy' - 2y = 1 + x^2$$

Euler-féle differenciálegyenletet.

Alkalmazzuk az

$$x = e^t$$

helyettesítést. Ekkor

$$y' = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{1}{x},$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dt^2} \frac{1}{x^2} - \frac{dy}{dt} \frac{1}{x^2},$$

azaz

$$xy' = \frac{dy}{dt},$$

$$x^2 y'' = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}.$$

Ezeket behelyettesítve, lesz

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} - 2y = 1 + e^{2t}.$$

Ez már egy állandó együtthatójú lineáris differenciálegyenlet.

Ennek az általános megoldása:

$$y = C_1 e^t + C_2 e^{-2t} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{2t}.$$

Visszaírva az eredeti változókat:

$$y = C_1 x + \frac{C_2}{x^2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} x^2.$$

9. Egy *mechanikai lengőrendszer* saját lengéseit (önlengéseit) leíró differenciálegyenlet — ha feltesszük, hogy a sebességgel arányos csillapítás működik —:

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + s \frac{dy}{dt} + r y = 0.$$

Itt m a tömeg, s a csillapítás tényezője, r a rugóállandó, y a nyugalmi helyzettől mért kitérés (kilengés) és t az idő.

Ez a differenciálegyenlet állandó együtthatójú homogén lineáris. Karakterisztikus egyenlete:

$$\lambda^2 + \frac{s}{m}\lambda + \frac{r}{m} = 0,$$

amely a következő megoldást adja:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{s}{2m} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{s^2}{m^2} - 4\frac{r}{m}}.$$

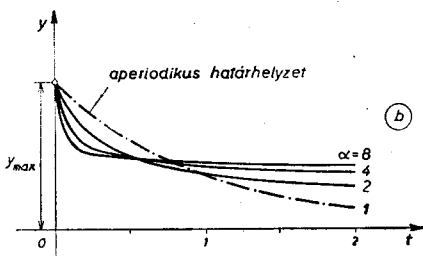
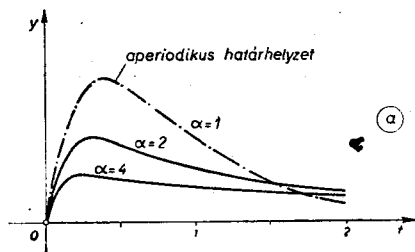
A következő jelöléseket bevezetve:

$$\frac{s}{2m} = \sigma \quad \text{és} \quad \frac{1}{2} \sqrt{\frac{s^2}{m^2} - 4\frac{r}{m}} = \omega_c,$$

a differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y = e^{-\sigma t} (A e^{\omega_c t} + B e^{-\omega_c t}),$$

hol A és B az integrálási állandók.



66. ábra

Aszerint, amint az ω_c valós, zérus vagy komplex, három jellegzetes eset adódik:

a) *Aperiodikus mozgás.* Ha

$$\omega_c = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{s^2}{m^2} - 4\frac{r}{m}}$$

valós, azaz

$$\frac{s^2}{4m^2} > \frac{r}{m},$$

akkor lengés nincs. Az aperiodikus mozgás a $(t=0)$ kezdő időpontnak megfelelő mozgásállapot szerint (maximum elérése után vagy anélkül) aszimptotikusan megszűnik; éspedig annál gyorsabban, minél nagyobb az s állandó. Ez esetben a mozgásegyenlet hiperbolikus függvényekkel így írható:

$$y = e^{-\sigma t} (C_1 \operatorname{sh} \omega_c t + C_2 \operatorname{ch} \omega_c t).$$

A mozgás lefolyását a $t=0$, $y=0$, illetve $t=0$, $y=y_0$ kezdeti feltételek esetére, különböző nagyságú csillapítás mellett a mellékelt görbék szemléltetik (66. ábra).

A gyakorlat számára annak az esetnek van jelentősége, amelynél a mozgás $t=0$ időben a kezdőpontból indul. Ez esetben:

$$y = C e^{-\sigma t} \operatorname{sh} \omega_c t.$$

A maximum a

$$t = \frac{1}{2\omega_c} \ln \frac{\sigma + \omega_c}{\sigma - \omega_c}$$

időpontban jön létre. A maximális kitérés pedig, ha a $t = 0$ időpontban a sebesség

$$\left[\frac{dy}{dt} \right]_{t=0} = v_0, \text{ az } \omega_0 = \sqrt{\frac{r}{m}} \text{ jelöléssel:}$$

$$y_{\max} = \frac{v_0}{\omega_0} \left(\frac{\sigma + \omega_c}{\sigma - \omega_c} \right)^{-\frac{\sigma}{2\omega_c}}$$

A maximális kitérés annál kisebb, és a kitértett tömeg annál lassabban közeledik a nyugalmi helyzetéhez, minél nagyobb a csillapítás tényezője (s).

b) **Csillapított lengés.** Ha

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{s^2}{m^2} - 4 \frac{r}{m}} = i \omega_c$$

képzetes, akkor

$$\lambda_{1,2} = -\sigma \pm i \omega_c,$$

és ezzel a megoldás:

$$y = e^{-\sigma t} (A \sin \omega_c t + B \cos \omega_c t) = C e^{-\sigma t} \sin (\omega_c t + \varphi).$$

A mozgás most az ω_c körfrekvenciával végbemenő, csökkenő amplitudójú csillapított lengés. Az A és B , illetve C és φ állandók értéke itt is a $t = 0$ időnek megfelelő mozgásállapottól függ. A mozgást ábrázoló görbe az

$$\eta = \pm C e^{-\sigma t}$$

határgörbék által határolt területsávon belül halad (67. ábra).

Ha a $t = 0$ időpontban $y = 0$, akkor az

$$y = C e^{-\sigma t} \sin \omega_c t$$

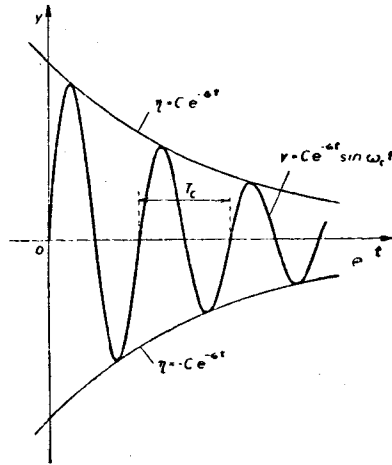
függvény maximumainak helyét a

$$\sin \omega_c t = \sin \psi = \frac{\omega_c}{\sqrt{\omega_c^2 + \sigma^2}} = \frac{\omega_c}{\omega_0}$$

összefüggés határozza meg, ahol $\omega_0 = \sqrt{\frac{r}{m}}$ a rendszer csillapítatlan önlengési frekvenciáját jelenti.

A csillapított lengés lengési ideje:

$$T_c = \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{r}{m} - \frac{s^2}{4m^2}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \sigma^2}},$$



67. ábra

vagy bevezetve a $\sigma = \alpha \omega_0$ és $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ jelöléseket:

$$T_c = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\alpha^2}} = T_0 \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}$$

és

$$\omega_c = \omega_0 \sqrt{1-\alpha^2}.$$

E képletekből láthatóan, ha az α (tehát a csillapítás) növekszik, a rendszer lengési ideje nő, a csillapított önlengési frekvencia pedig csökken. Az $\alpha \rightarrow 1$ esetben $T_c \rightarrow \infty$ és $\omega_c \rightarrow 0$, azaz a mozgás aperiodikussá válik (68. ábra).

A csillapított lengőmozgásnál két egymásután következő egy irányú kitérés viszonya a következő módon határozható meg:

Legyen t_1 időben az n -edik maximum y_n , akkor a $t_1 + T_c$ időben y_{n+2} az $(n+2)$ -ik maximum. Írható:

$$y_n = C e^{-\sigma t_1} \sin(\omega_c t_1 + \varphi)$$

és

$$y_{n+2} = C e^{-\sigma(t_1 + T_c)} \sin[\omega_c(t_1 + T_c) + \varphi].$$

Minthogy azonban T_c a lengési idő, ezért

$$\sin(\omega_c t_1 + \varphi) = \sin[\omega_c(t_1 + T_c) + \varphi],$$

és ezzel

$$\frac{y_n}{y_{n+2}} = e^{\sigma T_c} = e^{\frac{s}{2m} T_c}.$$

Ezen arány logaritmus az ún. logaritmikus dekrementum:

$$\Lambda = \frac{s}{2m} T_c = \frac{2\pi s}{\sqrt{4mr - s^2}}.$$

c) *Aperiodikus határállapot.* Ez lényegében a két előző eset közötti határhelyzet. Ekkor

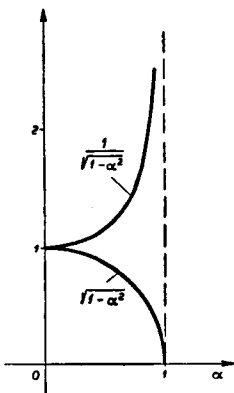
$$\frac{r}{m} = \frac{s^2}{4m^2}, \quad \text{illetve} \quad \omega_c = 0.$$

A karakterisztikus egyenletnek egy kétszeres gyöke van:

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -\sigma = -\frac{s}{2m}.$$

A differenciálegyenlet általános megoldása tehát:

$$y = e^{-\sigma t} (A + B t).$$



68. ábra

Az itt adódó mozgás ugyancsak nem periodikus. Lefolyása hasonlít a nagyobb csillapításoknál adódó mozgáshoz, csak gyorsabban csökken 0-ra. Bizonyítható, hogy e határhelyzetben, adott impulzus mellett a legnagyobb a (lengés nélküli) kitérés és a leggyorsabb a kitérés lecsökkenése. A rugós visszatérítő erővel ellátott mutatók műszerekben éppen ezért kívánatos az aperiodikus határhelyzetet megvalósítani vagy legalábbis megközelíteni.

10. *Kényszerített (gerjesztett) lengések.* Szabadlengésekre képes rendszerben kényszerített lengéseket gerjeszteni kétféle módon lehet.

Az egyik mód az, hogy a tömegre közvetlenül a

$$P = P_0 \sin \omega_k t$$

gerjesztő erő hat.

A másik lehetőség pedig az, hogy a rugó befogási helyét mozgatjuk az

$$x = a_0 \sin \omega_k t$$

törvényszerűség szerint.

Az első esetben a differenciálegyenlet:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + s \frac{dy}{dt} + r y = P_0 \sin \omega_k t,$$

a másik esetben pedig:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + s \frac{dy}{dt} + r y = a_0 r \sin \omega_k t.$$

A két eset matematikai szempontból egyenértékű, csak az

$$a_0 r = P_0$$

helyettesítés szükséges ahhoz, hogy az egyik esetről a másikra áttérjünk.

A megoldandó differenciálegyenlet inhomogén lineáris, állandó együtthatókkal és periodikus gerjesztéssel. A differenciálegyenlethez tartozó homogén egyenlet a rendszer önlengését határozza meg ($y_{\text{önl}}$). Az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y = y_{\text{önl}} + y_{\text{kénysz}}$$

a) A csillapítás nélküli állapotban ($s = 0$) a megoldások a következők:

$$y_{\text{önl}} = C \sin (\omega_0 t + \varphi).$$

Itt $\omega_0 = \sqrt{\frac{r}{m}}$, C és φ pedig az integrálási állandók.

Az $y_{\text{kénysz}}$ -re egy partikuláris megoldás lehet például:

$$y_{\text{kénysz}} = A \sin \omega_k t + B \cos \omega_k t.$$

Az A és B állandókat a differenciálegyenletbe való behelyettesítés útján határozhatjuk meg. Ez úton adódik, hogy $B = 0$ és

$$A = \frac{P_0}{r - m \omega_k^2}.$$

Az adott differenciálegyenlet általános megoldása tehát:

$$y = C \sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{P_0}{r - m \omega_k^2} \sin \omega_k t.$$

A létrejövő mozgás tehát két állandó amplitudójú, de eltérő frekvenciájú lengőmozgás eredője. Az egyik frekvencia $\left(\omega_0 = \sqrt{\frac{r}{m}}\right)$ a rendszer önlengési frekvenciája,

a másiké pedig azonos a gerjesztő periodikus erő frekvenciájával. Ez a kényszerített lengés.

Az önlengés amplitudóját és fázisszögét a kezdeti feltételek szabják meg. A kényszerített lengés amplitudója a fentiek szerint az egyenlet állandóiból meghatározható; fázisszöge pedig (amikor $s = 0$!) zérus. Csillapítatlan állapotban tehát a kényszerített lengés elmaradás nélkül követi a gerjesztő erőt.

Minthogy e csillapítatlan esetben az egyszer felkeltett önlengés is állandóan fennmarad, tehát a két lengőmozgás eredője: vagy interferencia, vagy modulált lengés.

A kényszerített lengés amplitudója (A) a gerjesztő erő frekvenciájától is függ. Ha bevezetjük a

$$\nu = \frac{\omega_k}{\omega_0}$$

paramétert, akkor

$$A = \frac{P_0}{r - m \omega_k^2} = \frac{P_0}{m \omega_k^2} \cdot \frac{1}{1 - \nu^2} = a_0 \frac{1}{1 - \nu^2}.$$

Az $\frac{1}{1 - \nu^2} = V$ tényező az ún. nagyítótényező (69. ábra).

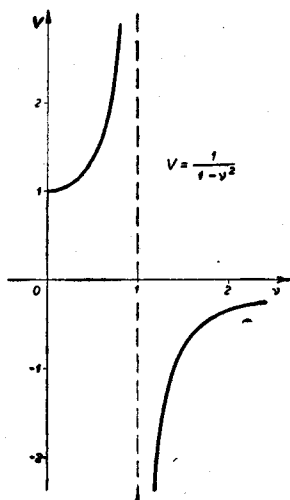
Az önlengéshez viszonyítva, igen kis gerjesztő frekvencia ($\omega_k \ll \omega_0$) esetén kényszerített lengés amplitudója gyakorlatilag:

$$\frac{P_0}{m \omega_0^2} \approx \frac{P_0}{r}; \quad \text{azaz} \quad A = a_0.$$

Növekedő ν -vel V is növekszik. Ha $\omega_k \rightarrow \omega_0$, azaz $\nu \rightarrow 1$, akkor $V \rightarrow \infty$. Ezért az $\omega_k = \omega_0$ esetben rezonancia áll fenn.

ν további növekedésével a V és ezzel együtt A előjele is megváltozik, nagysága fokozatosan csökken és aszimptotikusan eltűnik. (Ha $\nu \rightarrow \infty$, akkor $A \rightarrow 0$.)

Megjegyezzük, hogy az ábrázolt diagram (69. ábra) a különböző $\nu = \frac{\omega_k}{\omega_0}$ értékekhez tartozó stacionárius állapotok V amplitudótényezőit tünteti fel. Időben is változó szaporaságú kényszerített lengésekre a diagram nem vonatkozik. A differenciálegyenlet, illetve annak felírt megoldása ugyanis csak stacionárius mozgási állapotokat jellemez, a kényszerített lengés begerjedési folyamatára felvilágosítást tehát szintén nem ad.



69. ábra

A diagram azt is mutatja, hogy rezonanciánál ($\omega_k = \omega_0$) a kényszerített lengés kitérése végtelen nagy. A valóságban ez nem következik be azonnal, hanem csak bizonyos begerjedési idő után, amely azonban a fenti egyenletekből nem számítható ki.

b) *Csillapítás jelenlétében* (amikor $s \neq 0$), a fenti differenciálegyenletek megoldása csak abban tér el, hogy az önlengés hosszabb vagy rövidebb idő után lecsillapodik, az állandóan fennmaradó kényszerített lengés pedig a gerjesztő erőhöz képest egy meghatározott fázisszöggel elmarad. Eszerint:

$$y_{\text{önl}} = C e^{-\sigma t} \sin(\omega_c t + \varphi),$$

ahol

$$\sigma = \frac{s}{2m} \quad \text{és} \quad \omega_c = \sqrt{\frac{r}{m} - \frac{s^2}{4m^2}},$$

C és φ pedig az integrálási állandók.

A kényszerített lengésre itt célszerűbb, ha a következő alakú próbafüggvénnyel kísérletezünk:

$$y_{\text{kénysz}} = K \sin(\omega_k t - \eta),$$

ahol a K és η állandók a differenciálegyenletbe való visszahelyettesítés útján adódnak:

$$K = \frac{P_0}{\sqrt{(r - m\omega_k^2)^2 + s^2\omega_k^2}},$$

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{s\omega_k}{r - m\omega_k^2}.$$

Az $r = m\omega_0^2$ összefüggésnek és az aperiódikus határhelyzetet jellemző

$$s_h = 2\sqrt{mr}$$

csillapítási tényezőnek a figyelembevételével, valamint a $\nu = \frac{\omega_k}{\omega_0}$ és az $\alpha =$

$= \frac{s}{s_h}$ paraméterek bevezetésével:

$$K = \frac{P_0}{m\omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{(1 - \nu^2)^2 + 4\alpha^2\nu^2}} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} \eta = \frac{2\alpha\nu}{1 - \nu^2} \quad (1. \text{ 70. és 71. ábrát}).$$

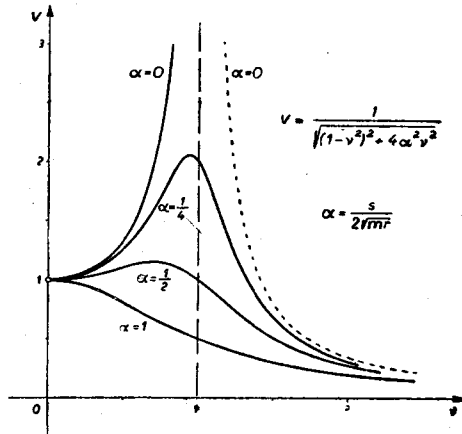
Itt a

$$V = \frac{1}{\sqrt{(1 - \nu^2)^2 + 4\alpha^2\nu^2}}$$

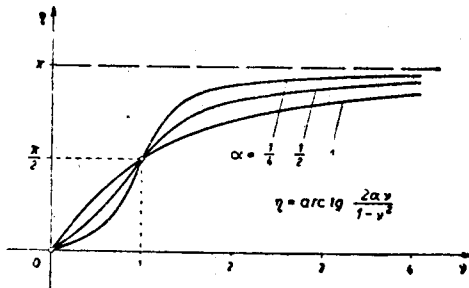
tényezőt ismét nagytényezőnek nevezzük.

ν -nek minden $\alpha =$ állandóhoz tartozó görbéje egy maximumig emelkedik. Ennek helye:

$$\nu = \sqrt{1 - 2\alpha^2},$$



70. ábra



71. ábra

azaz

$$[\omega_k]_{V_{\max}} = \sqrt{\frac{r}{m} - \frac{s^2}{2m^2}}.$$

A maximum értéke:

$$V_{\max} = \frac{1}{2\alpha \sqrt{1-\alpha^2}} = \frac{1}{s} \sqrt{\frac{4m^2 r^2}{4mr - s^2}}.$$

Ez az összefüggés minden zérustól különböző α értéknél véges V_{\max} -ot, tehát véges amplitudót ad. (Ha $\alpha \rightarrow 0$, $V_{\max} \rightarrow \infty$.)

A V_{\max} -hoz tartozó fázisszög tangense:

$$[\operatorname{tg} \eta]_{V_{\max}} = \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - 2} = \sqrt{\frac{4mr - 2s^2}{s^2}}.$$

Ebből kiadódik az is, hogy csillapítatlan lengésnél:

$$\alpha \rightarrow 0, \quad \operatorname{tg} \eta \rightarrow \infty, \quad \eta \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

Ha egy bizonyos α , illetve s értékhez kiszámítjuk a rendszer csillapított önlen-
gési frekvenciáját, akkor írható:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{r}{m} - \frac{s^2}{4m^2}}.$$

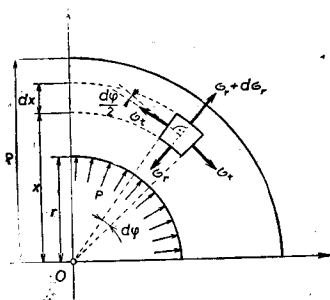
Az összehasonlításból megállapítható, hogy a maximális kilengést adó kényszeri-
tett frekvencia $[\omega_k]_{V_{\max}}$ csillapítás esetén nem esik össze a csillapított rendszer ω_c
önlengetési frekvenciájával, hanem annál kisebb:

$$[\omega_k]_{V_{\max}} < \omega_c.$$

Emiatt csillapítás jelenlétében tulajdonképpen rezonanciáról már nem is lehet szó. Kis csillapításoknál azonban a két frekvenciaérték nagyon közel esik egymáshoz.

Megjegyezzük még, hogy a V tényező $\nu > 1$ esetben a zérust annál jobban megközelíti, minél nagyobb a ν ; más szóval nagyon gyors gerjesztésnél a tömeg gyakorlatilag nyugalomban marad. Az η fázisszög pedig növekvő ν -vel annál gyorsabban közelíti meg a π értéket, minél kisebb a csillapítás.

11. Vastag falú cső falában keletkező feszültségek belső túlnyomás esetén (72. ábra):



72. ábra

Az egyensúly feltétele:

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(x + dx)d\varphi - \sigma_r x d\varphi - 2\sigma_t \sin \frac{d\varphi}{2} dx = 0.$$

A

$$\sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}$$

közelítéssel ez így írható:

$$\frac{d(\sigma_r, x)}{dx} - \sigma_t = 0.$$

A feszültségek kifejezhetők a Hooke-törvény alapján a fajlagos megnyúlások és az E rugalmassági modulusz segítségével.

Az x sugár megnyúlik u -val, így az érintőirányú fajlagos nyúlás:

$$\varepsilon_t = \frac{2\pi (x + u) - 2\pi x}{2\pi x} = \frac{u}{x}.$$

Az eredetileg dx hosszúságú él megnyúlik du -val, így a sugárirányú fajlagos nyúlás:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dx}.$$

Az érintő irányában ébredő σ_t feszültség $\frac{\sigma_t}{E}$ -vel nyújtja az élet, σ_r pedig $\frac{\sigma_r}{mE}$ -vel rövidíti $\left(\text{itt } \frac{1}{m} \text{ az ún. Poisson-féle szám} \right)$.
Így

$$E \varepsilon_t = \sigma_t - \frac{\sigma_r}{m};$$

és hasonlóan

$$E \varepsilon_r = \sigma_r - \frac{\sigma_t}{m}.$$

Így a feszültségek

$$\sigma_t = \frac{Em}{m^2 - 1} (m \varepsilon_t + \varepsilon_r),$$

$$\sigma_r = \frac{Em}{m^2 - 1} (\varepsilon_t + m \varepsilon_r),$$

vagy más alakban

$$\sigma_t = \frac{Em}{m^2 - 1} \left(m \frac{u}{x} + \frac{du}{dx} \right),$$

$$\sigma_r = \frac{Em}{m^2 - 1} \left(\frac{u}{x} + m \frac{du}{dx} \right).$$

Visszahelyettesítve ezeket az egyensúlyi egyenletbe, és $\frac{Em}{m^2 - 1}$ -gyel egyszerűsítve:

$$\frac{d}{dx} \left(u + m \frac{du}{dx} x \right) - \left(m \frac{u}{x} + \frac{du}{dx} \right) = 0.$$

A differenciálást elvégezve, és m -mel egyszerűsítve:

$$x^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + x \frac{du}{dx} - u = 0.$$

Ez egy Euler-féle homogén lineáris differenciálegyenlet. Ennek az általános megoldása:

$$u = A x + B \frac{1}{x}.$$

Az integrálási állandókat a következőképpen határozzuk meg:

A belső hengerpaláston, ha $x = r$, $\sigma_r = -p$ (azért negatív, mert összenyomás!).

A külső hengerpaláston, ha $x = R$, $\sigma_r = 0$.

Mivel pedig

$$\frac{u}{x} = A + \frac{B}{x^2}$$

és

$$\frac{du}{dx} = A - \frac{B}{x^2},$$

azért

$$\sigma_r = \frac{E m}{m^2 - 1} \left\{ A (m + 1) - \frac{B}{x^2} (m - 1) \right\},$$

vagy rövidebb frászmóddal, ha

$$A \frac{m E}{m - 1} = A_1 \quad \text{és} \quad B \frac{m E}{m + 1} = B_1,$$

akkor

$$\sigma_r = A_1 - \frac{B_1}{x^2}.$$

Így ha $x = r$, akkor

$$-p = A_1 - \frac{B_1}{r^2},$$

és ha $x = R$, akkor

$$0 = A_1 - \frac{B_1}{R^2}.$$

Ezekből

$$A_1 = \frac{p r^2}{R^2 - r^2},$$

$$B_1 = \frac{p r^2 R^2}{R^2 - r^2}.$$

Ezzel egyrészt

$$\sigma_r = \frac{p r^2}{R^2 - r^2} \left(1 - \frac{R^2}{x^2} \right)$$

és

$$\sigma_t = \frac{p r^2}{R^2 - r^2} \left(1 + \frac{R^2}{x^2} \right).$$

másrészt

$$u = \frac{p r^2}{m E (R^2 - r^2)} \left\{ (m-1)x + (m+1) \frac{R^2}{x^2} \right\}.$$

A feszültségek kifejezéseiből látható, hogy mindkét főfeszültség legnagyobb abszolút értékű a cső belső palástján ($x = r$).

A Mohr–Guest-féle elmélet szerint a megengedhető feszültség pl. folytvas csöveknél:

$$\sigma = \sigma_t - \sigma_r = \frac{p r^2}{R^2 - r^2} \left(\frac{r^2 + R^2}{r^2} - \frac{r^2 - R^2}{r^2} \right) = p \frac{2 R^2}{R^2 - r^2}.$$

Innen pedig

$$\frac{R}{r} = \sqrt{\frac{\sigma}{\sigma - 2p}}$$

választandó, ahol σ jelenti a megengedhető húzó feszültséget, p a folyadéknymást.

Feladatok

a) Gyakorló feladatok

- | | |
|-----|--|
| 1. | $y''' - 2y'' - y' + 2y = \operatorname{ch} 2x.$ |
| 2. | $4y'' - 4y' + 17y = 3x^2.$ |
| 3. | $y''' + 3y'' + 3y' + y = x e^{-x}.$ |
| 4. | $y'' - 6y' + 13y = 39.$ |
| 5. | $y'' - 4y' + 7y = 14.$ |
| 6. | $y'' - 2y' - 3y = 2x + 1.$ |
| 7. | $y'' + 9y = x^2.$ |
| 8. | $y'' - 10y' + 25y = 25x^2 + 5x + 17.$ |
| 9. | $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}.$ |
| 10. | $y'' + 9y = 9e^{3x}.$ |
| 11. | $y'' - 2y' + y = 6e^x.$ |
| 12. | $y'' - 9y = 6 \cos 3x.$ |
| 13. | $y'' + 6y' + 13y = 30 \sin x.$ |
| 14. | $4y'' + y = 4 \sin \frac{x}{2}.$ |
| 15. | $y'' - 5y' + 6y = 2x e^x.$ |
| 16. | $y'' + 2y' + 5y = x \sin x.$ |
| 17. | $y'' - 6y' + 9y = 3x^2 e^{3x}.$ |
| 18. | $36y'' + 24y' + 13y = e^{\frac{x}{2}} \sin \frac{x}{2}.$ |
| 19. | $y'' + 2y' + 5y = x e^{-x} \cos 2x.$ |
| 20. | $y''' + y'' + 4y' + 4y = 10e^x.$ |
| 21. | $y^{(4)} + 2y'' + y = x^5 + 20x^3 + 120x.$ |
| 22. | $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0.$ |
| 23. | $y''' - 2y'' + 5y' = 3.$ |
| 24. | $y^{(4)} - 8y''' + 16y'' = 2x - 1.$ |
| 25. | $y^{(4)} - y = \operatorname{sh} x.$ |
| 26. | $x^2 y'' - 3x y' + 3y = x^2.$ |
| 27. | $x^2 y'' + 3xy' + 5y = 2 \cos \ln x.$ |
| 28. | $x^2 y'' - 2x y' + 2y = x^3.$ |
| 29. | $x^2 y'' + 7xy' + 13y = x \ln x.$ |

30. $x^2 y'' + xy' + 4y = \ln^2 x.$ 31. $x^3 y''' + 3x^2 y'' + xy' = x^2.$
 32. $x^3 y''' + 2x^2 y'' + xy' - y = \frac{1}{x}.$
 33. $x^3 y''' + 3x^2 y'' - 3xy' = \frac{\ln x^3}{x}.$ 34. $x^2 y'' - 6y = 3x^3.$
 35. $x^2 y'' - xy' + y = x \ln^2 x.$ 36. $x^2 y'' + 4xy' + 2y = -\cos x.$
 37. $x^2 y'' + 4xy' + 2y = \sqrt{1-x^2}.$ 38. $x^2 y'' + xy' - y = \sqrt{x^2-1}.$
 39. $2x^2 y'' + 3xy' - 3y = \frac{1}{1+x}.$ 40. $4x^2 y'' - 2xy' + 2y = \sqrt{x}.$

b) Fizikai feladatok

1. Egy tömegpont mozgását a következő differenciálegyenlet határozza meg:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 962x = 500.$$

Határozzuk meg a lengésidőt. Mennyi idő alatt csökken az amplitúdó a kezdeti értéknek a felére?

2. Egy rugóra erősített egységnyi tömegű test másodpercenkénti rezgésszáma 250. A kezdeti amplitúdó 2 sec alatt a felére csökken. Feltételezve azt, hogy a csillapításból eredő erő a sebességgel arányos, határozzuk meg a mozgás differenciálegyenletét.

3. Egy inga egy l hosszúságú, egyik végén felfüggesztett, állandó keresztmetszetű homogén rúdból áll. Elhanyagolva a csillapítást, határozzuk meg a lengésidőt kis kilengések esetén.

4. Egy R sugarú, m tömegű, vízszintes helyzetű tárcsa fel van ékelve egy függőleges helyzetű rögzített tengelyre. Ha a tárcsát a függőleges tengely körül φ szöggel elforgatjuk, a tengelyben

$$M = k\varphi$$

csavaró nyomaték ébred. Ha a tárcsát elengedjük, a tengely — rugalmassága folytán — torziólengéseket fog végezni. Tegyük fel, hogy a másodpercenkénti lengésszám: n . Határozzuk meg a k arányossági tényezőt.

5. Egy m tömegpont egy az origón keresztülmenő egyenes mentén mozog úgy, hogy az origótól mért távolság c -szeresével egyenlő nagyságú, és az origó felé irányuló erő hat rá, s a csillapító erő a sebesség b -szerese. Határozzuk meg azt az m értéket, amelynél a mozgás aperiodikus lesz.

6. Egy $2l$ hosszúságú, állandó keresztmetszetű, vízszintes rúd a két végén meg van támasztva. A közepén P függőleges erő terheli. Tegyük fel, hogy a rúd tömege elhanyagolható a P erőhöz képest. A P erő hatására a rúd lehajlik. Szüntessük meg a P terhelést, akkor a rúd transzverzális rezgéseket fog végezni. Mekkora a másodpercenkénti rezgésszám.

7. Az L önindukció-tényezőjű tekercsben előálló feszültségesés $L \frac{di}{dt}$, az R

ohmikus ellenállásban R és a C kapacitású kondenzátorban $\frac{1}{C} \int_0^t i \, dt$, ahol i az áram-

erősség pillanatnyi értéke. Kapcsoljuk sorba az L önindukciójú tekercset, az R ohmikus ellenállást és a C kapacitású kondenzátort. Kapcsoljuk le az áramkörbe beiktatott külső elektromotoros erőt és határozzuk meg a rezgőkör frekvenciáját. Mi a feltétele annak, hogy rezgések jöjjenek létre?

8. Egy gerenda az x tengely mentén a $(0, 0)$ és az $(l, 0)$ pontok között helyezkedik el. Kihajlása az x abszcisszájú pontban egyenlő y -nal, amely kielégíti az

$$y^{(4)} = a f(x)$$

differentiálegyenletet, ahol $f(x)$ a terhelés, a pedig egy a gerenda anyagától és a keresztmetszettől függő állandó. Határozzuk meg a gerenda alakját, ha $f(x) = 1$, és a gerenda végei be vannak fogva.

MEGOLDÁSOK

BEVEZETÉS

c) Differenciál-
egyenletek
jelentősége és
származtatása

1. $y' = 2x$.

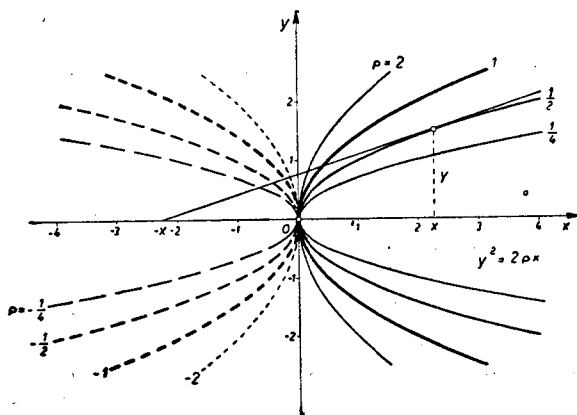
2. $y' = 2\frac{y}{x}$.

3. $y'' = 0$.

4. $y' = \frac{y}{x}$.

5. $x + yy' = 0$.

6. $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0$.



73. ábra

7. $y = xy' + y'^2$.

8. $2\frac{x + yy'}{x^2 + y^2} = \frac{x - yy'}{x^2 - y^2}$.

9. $xy' = y \ln y'$.

10. $y'' + y = 0$.

11. $y'' - 2y' + y = 0$.

12. $y'''(1 + y'^2) - 3y'y''^2 = 0$.

13. $y'^2 + \frac{x^2 - y^2 - a^2 + b^2}{xy} y' - 1 = 0$.

14. $\frac{y}{y'} = 2x$.

Ebből a differenciálegyenletből kiolvasható az, hogy az adott parabolasereg $\frac{y}{y'}$ szubtangense egyenlő az érintési pont abszcisszájának kétszeresével (73. ábra).

15. $y^2 + y^2 y'^2 = R^2$. Az $y = \pm R$ függvények a differenciálegyenlet szinguláris megoldásai (az adott körsereg burkoló egyenesei; 74. ábra).

16. $\frac{(1 + y'^2)^3}{y'^2} = R^2$ vagy

$\frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = \pm R$. Ez a diffe-

renciálegyenlet azt a nyilvánvaló tényt fejezi ki, hogy az adott görbesereg összes görbéinek görbületi sugara mindenütt állandó: $\rho = R$.

17. $\left(y'' - \frac{2}{3}\right)'' = 0$
vagy $3y''y^{(4)} - 5y'''' = 0$.

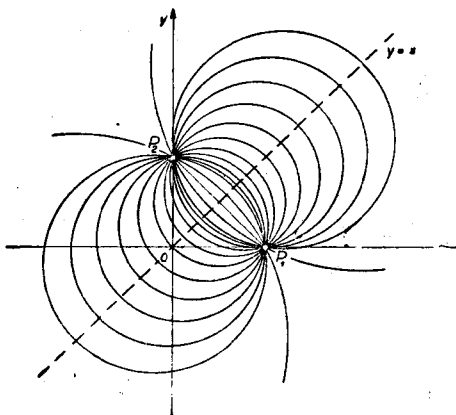
18. $\left(y'' - \frac{2}{3}\right)''' = 0$ vagy $-9y''y^{(5)} + 45y''y'''y^{(4)} - 40y''''^3 = 0$.

19. A körsereg egyenlete:

$$(x - C)^2 + (y - C)^2 = (q - C)^2 + C^2. \quad (75. \text{ ábra}).$$

A keresett differenciálegyenlet pedig:

$$y' [(y - q)^2 + x(2y - x)] + (x - q)^2 + y(2x - y) = 0.$$



75. ábra

20. A körsereg egyenlete:

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = r^2.$$

A keresett differenciálegyenlet:

$$y''(x - y) - 1 - y' - y'^2 - y'^3 = 0.$$

21. A körsereg egyenlete:

$$(x - C)^2 + y^2 = (a - C)^2 \sin^2 \alpha \quad (76. \text{ ábra}).$$

A keresett differenciálegyenlet:

$$y'^2 y^2 \cos^2 \alpha + 2yy'(a - x) \sin^2 \alpha + y^2 - \sin^2 \alpha (a - x)^2 = 0.$$

22. Az

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = R^2$$

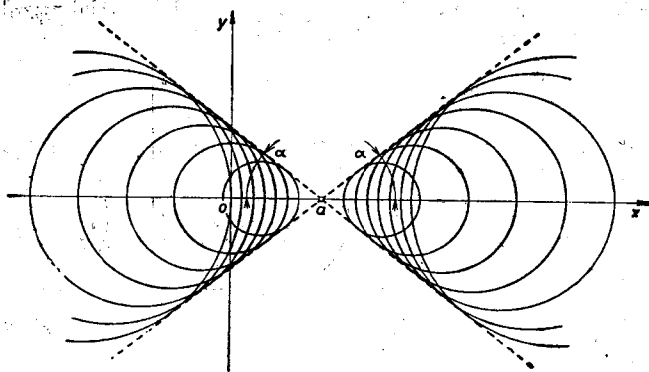
$$f(C_1, C_2) = 0$$

$$C_1 = x + \frac{R}{\sqrt{1 + y'^2}} y',$$

$$C_2 = y - \frac{R}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

és

egyenletből:

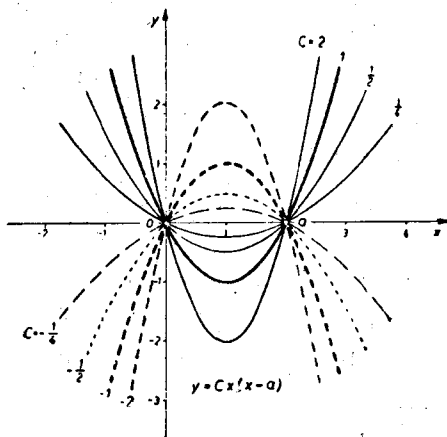


76. ábra

és így a keresett differenciálegyenlet:

$$f\left(x + \frac{R}{\sqrt{1+y'^2}}y', y - \frac{R}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0.$$

23. A görbesereg egyenlete:



77. ábra

$$y - C_1 = C_2 (x - C_1)^3.$$

A keresett differenciálegyenlet:

$$2y''(y - x) - y'^2 + 2y' = 0.$$

24. A görbesereg egyenlete:

$$y = Cx(x - a)$$

(77. ábra)

A keresett differenciálegyenlet:

$$y'x(x - a) - y(2x - a) = 0.$$

25. A görbesereg egyenlete:

$$y = \frac{C_1 + C_2 x}{C_3 + x};$$

$$C_1 - C_2 C_3 \neq 0.$$

A keresett differenciálegyenlet

$$2y'y''' - 2y''^2 = 0.$$

26. $x y y'' + x y'^2 - y y' = 0.$

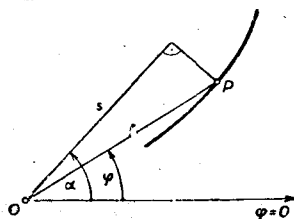
27. $y'' + 2 \kappa y' + (\kappa^2 + \omega^2) y = 0.$

28. A 78. ábrából:

$$s = r \cos(\alpha - \varphi) = e^{a\varphi} \cos(\alpha - \varphi).$$

Ebből a keresett differenciálegyenlet:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} - 2a\omega \frac{ds}{dt} + \omega^2(1 + a^2)s = 0.$$



78. ábra

29. $y [(1 + y'^2) \arctan y' - y'] = x.$ 30. $y(1 + y'^2) = 2a.$

I. ELSŐRENDŰ, AZ ISMERETLEN FÜGGVÉNY DERIVÁLTJÁBAN ELSŐFOKÚ KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

1. §. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

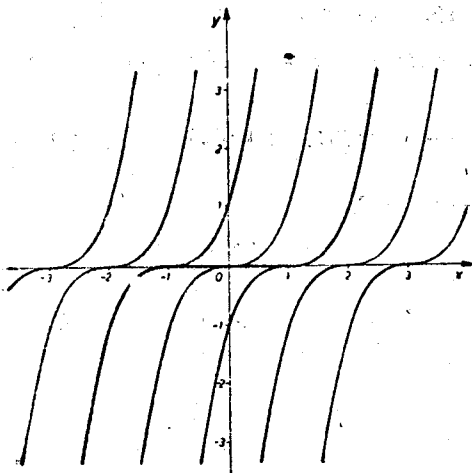
a) Gyakorló
feladatok

1. Ha $x \neq -1$ és $y \neq 2$, akkor $y - 2 = C(x + 1)$;
 $y = 2$ közösleges (reguláris) megoldás.
2. Ha $x \neq -\frac{1}{2}$ és $y \neq 0$, akkor $y^2 = C(2x + 1)^3$; $y = 0$ közösleges (reguláris) megoldás.
3. Ha $x \neq -2$ és $|y| \neq 1$, akkor $y^2 - 1 = C(x + 2)^2$; $y = \pm 1$ közösleges (reguláris) megoldások.
4. Ha $|y| \neq 1$, akkor $(y^2 - 1)(x^2 + 6) = C$; $y = \pm 1$ közösleges (reguláris) megoldások.
5. Ha $x \neq 0$ és $y \neq 0$, akkor $\ln |xy| + y = C$; $y = 0$ közösleges (reguláris) megoldás.
6. Ha $|y| \neq 1$, akkor $(1 - y^2) = C(1 + x^2)$; $y = \pm 1$ közösleges (reguláris) megoldások.
7. Ha $x \neq 0$ és $y \neq 1$, akkor $y = \frac{C}{x + C}$; $y = 1$ közösleges (reguláris) megoldás.
8. Ha $x \neq 0$, $y \neq 0$ és $y \neq -\frac{3}{2}$, akkor $x(2y + 3) = Cy$; $y = 0$ és $y = -\frac{3}{2}$ közösleges (reguláris) megoldások.
9. Ha $x \neq 0$, $x \neq 2$ és $y \neq -1$, akkor $x(x - 2) = C(y + 1)$; $y = -1$ közösleges (reguláris) megoldás.
10. $x + y = C(1 - xy)$.
11. Ha $|x| \neq 1$ és $|y| \neq 1$, akkor $x + y = C(1 + xy)$; $y = \pm 1$ közösleges (reguláris) megoldások.
12. Ha $|x| < a$, akkor $x = a \sin(y + C)$.
13. Ha $\varphi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (ahol k tetszőleges egész szám) és $r \neq 0$, akkor $r \cos \varphi = C$;
 $r = 0$ közösleges (reguláris) megoldás.

14. $r = C \cos^2 \varphi$.
15. $r^2 + \frac{1}{\cos \varphi} = C$.
16. Ha $|r| < |a|$, akkor $r^2 = a^2 \sin(2x + C)$.
17. Ha $|r| > |a|$, akkor $r = \frac{a}{\cos(\varphi + C)}$.
18. $e^{-y} = e^{-x} + C$.
19. $e^{2x} + e^{2y} = C$.
20. Ha $x \neq 0$, $x \neq 1$ és $y \neq -1$, akkor $xy = C(x \mp 1)(y + 1)$; $y = -1$ közösleges (reguláris) megoldás.
21. Ha $x \neq 0$ és $|y| \neq 1$, akkor $1 + y = Cx^2(1 - y)$; $y = 1$ közösleges (reguláris) megoldás.
22. Ha $y \neq 1$, akkor $x^3 + 3y + 6 \ln|1 - y| = C$.
23. Ha $y \neq 0$, $e^y = 1 + Ce^{-x}$; $y = 0$ közösleges (reguláris) megoldás.
24. Ha $x \neq 0$ és $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (k egész szám), akkor $e^x = Cx \cos y$; $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$ közösleges (reguláris) megoldások.
25. Ha $x \neq 0$ és $x \neq -1$, akkor $y^2 + 1 = \frac{Cx}{x + 1}$.
26. Ha $|x| > 1$ és $|y| > 1$, akkor $\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{y^2 - 1} = C$; $y = \pm 1$ szinguláris megoldások.
27. Ha $|x| < 1$, akkor $y = \operatorname{tg}(C + \operatorname{Arc} \sin x) = \frac{C_1 \sqrt{1 - x^2} + x}{\sqrt{1 - x^2} - C_1 x}$.
28. Ha $|y| \neq 1$, akkor $y = \frac{C \cos^2 x - 1}{C \cos^2 x + 1}$; $y = \pm 1$ közösleges (reguláris) megoldások.
29. Ha $x \neq 0$ és $|x| \neq 1$, akkor $y = \frac{C(x^2 - x)}{(x^2 - 1)^{1/2}}$.
30. Ha $x \neq 0$, akkor $x^2 + y^2 = \ln[Cx^2(1 + y^2)]$.
31. $y + b = C(x^2 + a^2 + x\sqrt{x^2 + a^2})$.
32. Ha $x \neq 0$, akkor $y + a \ln(y^2 + a^2) = C + x - \frac{1}{x}$.
33. $y^4 + y^2 = x^4 + x^2 + C$.
34. $x \sin y = C$.
35. $y = Ce^{x(\sin \ln x + a)}$.
36. $y = \pm 1$; $y = \operatorname{th}(x + C)$; $y = \operatorname{cth}(x + C)$.
37. $y = \frac{C - 4e^{5x}}{C + e^{5x}}$.

$$38. \quad y = \begin{cases} \operatorname{tg}\left(\frac{a}{n+1} x^{n+1} + c\right), & \text{ha } n \neq -1 \\ \operatorname{tg}(a \ln C x), & \text{ha } n = -1. \end{cases}$$

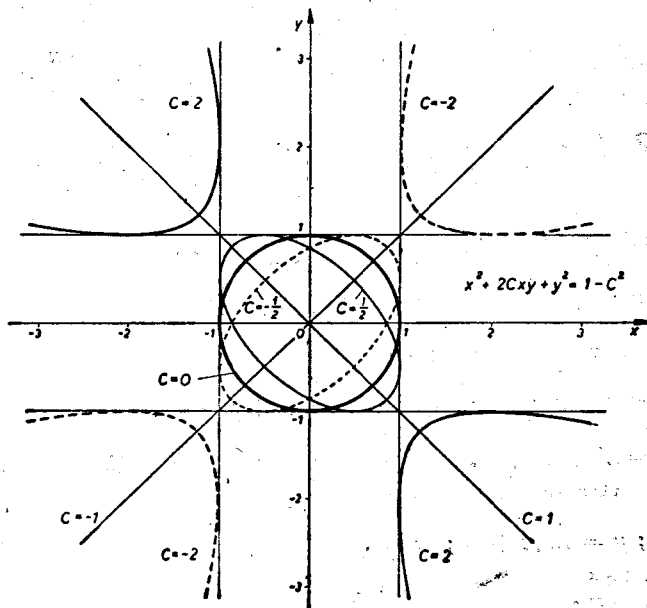
$$39. \quad y = 0; y = \operatorname{sgn}(x+C) \cdot \frac{(x+C)^2}{4}.$$



79. ábra

(A 79. ábrán pl. vastag vonallal berajzolt görbe is integrálgörbe!)

40. Ha $|x| < 1$ és $|y| < 1$, akkor $\arcsin y = \pm \arcsin x + C$ (vagy más-képp írva: $y\sqrt{1-x^2} \mp x\sqrt{1-y^2} = C$); ha $|x| > 1$ és $|y| > 1$, akkor $y + \sqrt{y^2 - 1} = C(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$; megfelelő átalakítások után mind az $|x| < 1, |y| < 1$, mind az $|x| > 1, |y| > 1$ esetben kapott általános megoldás így is írható: $x^2 + 2Cxy + y^2 = 1 - C^2$. Ez pedig egy kúpszeletekből álló görbesereg: mind-egyiknek az origó a középpontja, $y = \pm x$ a főtengelyek, $|C| < 1$ esetén ellipszisek, $|C| > 1$ esetén hiperbolák. $y = \pm 1$, a görbesereg burkoló egyenesei: szinguláris megoldások. Ha y -t tekintjük független



80. ábra

változónak és x -et ismeretlen függvénynek, akkor $x = \pm 1$ szintén szinguláris megoldások (80. ábra).

$$41. \quad \text{Ha } |x| < 1, |y| < 1, \text{ akkor } \arcsin y + y \sqrt{1-y^2} = C \pm \arcsin x \pm x \sqrt{1-x^2}; \text{ ha } |x| > 1, |y| > 1, \text{ akkor } y \sqrt{y^2-1} - \ln |y + \sqrt{y^2-1}| = C \pm \pm [x \sqrt{x^2-1} - \ln |x + \sqrt{x^2-1}|].$$

$$42. \quad y = \ln(1 + C e^{-x}).$$

$$43. \quad \text{Ha } |y| \neq 1, \text{ akkor } y = \frac{1-Cx^2}{1+Cx^2}; y = -1 \text{ közösleges (reguláris) megoldás.}$$

$$44. \quad y = e^{Cx}, \quad 45. \quad y = C x e^{\frac{1}{x}}.$$

$$46. \quad y = e^{C(x^2-1)}.$$

$$47. \quad |x| < 1, |y| > 1 \text{ esetén } y = \pm 1; x \sqrt{y^2-1} \pm \sqrt{1-x^2} = C y.$$

$$48. \quad \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = C, \quad 49. \quad y = C x e^{y + \frac{1}{x}}.$$

$$50. \quad \cos x \cos y = C, \quad 51. \quad \frac{1}{\cos^2 y} = C - \frac{10}{3} \ln \sin x.$$

$$52. \quad \text{Ha } y \neq 0, |x| < 1, \text{ akkor } y = C e^{\sqrt{1-x^2}}; y = 0 \text{ közösleges (reguláris) megoldás.}$$

$$53. \quad 3y + y^3 - 9 \ln |x| = C.$$

$$54. \quad \text{Ha } |y| < 1, \text{ akkor } \ln |x + \sqrt{1+x^2}| = \arcsin y; y = \pm 1 \text{ szinguláris megoldások.}$$

$$55. \quad \text{Ha } |x| < 1, \text{ akkor } \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = C(y + \sqrt{1+y^2}); \text{ ha } |x| > 1, \text{ akkor } \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = C(y + \sqrt{1+y^2}).$$

$$56. \quad \text{Ha } y \neq k\pi \text{ (} k \text{ egész szám), akkor } e^{-x} = \ln C \operatorname{tg} \frac{y}{2}; y = k\pi \text{ (} k \text{ egész szám) közösleges (reguláris) megoldások.}$$

$$57. \quad \text{Ha } |y| < 1, \text{ akkor } \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{x+C}{1-Cx}; y = \pm 1 \text{ szinguláris megoldások.}$$

$$58. \quad \text{Ha } x \neq 0, y \neq 0, \text{ akkor } Cx = y e^{\frac{x+y}{xy}}; y = 0 \text{ közösleges (reguláris) megoldás.}$$

$$59. \quad \ln C \sqrt{1+x^2} + \arcsin y = 0.$$

$$60. \quad \text{Ha } x \neq 0, |y| \neq 1, \text{ akkor } y = \frac{\sqrt{C^2 x^2 - 1}}{Cx}; y = \pm 1 \text{ közösleges (reguláris) megoldások.}$$

$$61. \quad 3y^2 = \arcsin \frac{3x}{2} + C.$$

$$62. \quad y^2 = \ln C \frac{2x-3}{2x+3}, |x| \neq \frac{3}{2}.$$

63. Ha $y \neq 1$, akkor $y = 1 - \frac{1}{C\sqrt{x^2+1}}$; $y = 1$ közöséges (reguláris) megoldás.
64. Ha $y \neq 0$, $x \neq -\frac{1}{2}$, akkor $C e^{\frac{1}{y}} = \sqrt{2x+1}$; $y = 0$ közöséges (reguláris) megoldás.
65. Ha $y \neq -\frac{1}{2}$, akkor $(1+x^2)(1+2y) = C$; $y = -\frac{1}{2}$ közöséges (reguláris) megoldás.
66. Ha $x \neq -1$, akkor $y = -x + \ln C(x+1)^2$.
67. Ha $y \neq 0$, akkor $x = \frac{y^2}{2} + \ln C y$; $y = 0$ közöséges (reguláris) megoldás.
68. $y = C\sqrt{1+e^{2x}}$.
69. Ha $x \neq 0$, akkor $x^2(1+y^2) = C$.
70. Ha $x \neq 0$, akkor $(1+x^2)(1+y^2) = Cx^2$.
71. $\frac{x^2}{2a^2C} - \frac{y^2}{2b^2C} = 1$.
72. $\frac{x^2}{2a^2C} + \frac{y^2}{2b^2C} = 1$.
73. Ha $y \neq 0$, akkor $y = C e^{\frac{x}{m}}$; $y = 0$ közöséges (reguláris) megoldás.
74. Ha $|y| > |m|$, akkor $\operatorname{ar ch} \frac{y}{m} = \pm \frac{x+C}{m}$; $y = m$ szinguláris megoldás.
75. $y = x$; $2(x^3 - y^3) + 3(x^2 - y^2) + 5 = 0$.
76. $y = 1$.
77. $y^2 - 1 = 2 \ln(e^x + 1) - 2 \ln(e + 1)$.
78. $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = 1$.
79. $y = (x+1)^2$.
80. $y = 1$.

b) Geometriai feladatok

- | | | | |
|-----|---------------------------------------|-----|--------------------------------|
| 1. | $y = Cx^2$. | | |
| 2. | $y^2 = Cx$. | | |
| 3. | $y^2 + 2x^2 = C$. | 4. | $y^2 - x^2 = C$. |
| 5. | $x^2 + y^2 = C^2$. | 6. | $xy = 2$. |
| 7. | $y^2 = 7 - 2x$; $k = 1$. | 8. | $y = e^{\pm \frac{x-2}{k}}$. |
| 9. | $y^2 - x^2 = 5$. | 10. | $y(x+1) = 4$. |
| 11. | $y = x^3$. | 12. | $x^2 \pm y^2 = C$, $xy = C$. |
| 13. | $(x-C)^2 + y^2 = k^2$; $y = \pm k$. | 14. | $x^m y^n = C$. |
| 15. | $r = C e^{\frac{\varphi}{2}}$. | 16. | $r = C \sin \varphi$. |

17. $r^2 = C \sin 2\varphi$.
 18. $k \ln y = x + C$.
 19. $r(\varphi + C) + 2k = 0$.
 20. $r = k \sin(\varphi + C)$; $r = k$.
 21. $\ln r = \frac{k(\varphi + C)}{\sqrt{k^2 - 1}}$.
 22. $r = \frac{2k}{\cos(\varphi + C)}$; $r = 2k$.
 23. $y^2 = Cx$; $x^2 = Cy$.
 24. Gömb vagy körhenger.
 25. $y = 2k \operatorname{ch} \frac{x + \cdot}{2k}$.

c) Fizikai feladatok

1. $Q = Q_0 e^{-kt}$.
 2. $r = r_0 - kt$.
 3. 40 perc múlva.
 4. $t = \frac{1}{2kT_0^3} \left| \operatorname{ar} \operatorname{cth} \frac{T}{T_0} - \operatorname{arc} \operatorname{ctg} \frac{T}{T_0} \right|$.
 5. 6,58 nap.
 6. 14 perc.
 7. 5,6 perc.
 8. 15,1 sec.
 9. $T = \frac{2}{3}x$; 691 200 cal.
 10. $T = 591,9 - 187,6 \ln r$; 1 833 000 cal.
 11. 2 945 000 cal.
 12. $k = 0,00053 \text{ cal/cm sec } ^\circ\text{C}$.
 13. $c = \frac{as}{r}$.
 14. $I = \frac{2\pi \kappa E}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$.
 15. $x = 0,7 \sqrt{-t \cdot T}$, ahol $T < 0$.
 16. $Q = \frac{2\pi k a r_2 (T - T_0)}{k + a r_2 \ln \frac{r_2}{r_1}}$.
 17. $T = T_0 + C e^{-\alpha x}$, ahol C integrálási állandó és $\alpha = \frac{2k a r_2}{v r_1^2 \left(k + a r_2 \ln \frac{r_2}{r_1} \right)}$.
 18. $k l \left(P + \frac{1}{2} q \right)$.
 19. 0,00136-szorosa az eredeti fény mennyiségnek.
 20. $\ln \frac{P}{P_0} = 5343 \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right)$.
 21. $r = r_0 + k s$.
 22. 1,38 óra.
 23. 0,4 kg.
 24. $a \cdot \operatorname{th}(bt + c)$, ahol a , b és c állandók.
 25. $i = x + C$.
 26. Forgási hiperboloid vagy sík.
 27. $p = 1,033 e^{-kh} \text{ kg/cm}^2$.
 28. $r = C e^{\varphi}$ vagy $r = C e^{-\varphi}$.

29. $p = p_0 e^{\frac{R(R-r)}{kr}}$, ahol p_0 a levegő nyomása a Föld felszínén és k a $p = k \rho$ összefüggésben is szereplő állandó.

30. $p = p_0 + \frac{\rho \omega^2 a^2}{2g}$.

31. $p = p_0 e^{\frac{\omega^2 r^2}{2g}}$, ahol p_0 a tengelyre illeszkedő pontban a nyomás.

32. $T_2 - \frac{q v^2}{g} = \left(T_1 - \frac{q v^2}{g} \right) e^{\mu \alpha}$. 33. $F = k \sqrt{h}$.

34. Az eredő erőnek a vízszintessel bezárt szöge: α . $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{z'} = -\frac{mg}{m \omega^2 x}$. Innen $z = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + C$.

35. Gömb, melynek a középpontjában van a fényforrás, vagy pedig az $r^2 = a \sin 2\varphi$ görbének egy az origóra illeszkedő egyenes körüli megforgatásával származtatott felület.

d) Vegyes feladatok

1. $2^{3,5} \approx 11,3$ -szorososa.

2. 96 gramm.

3. 16,7 kg.

4. 4 óra 25 perc múlva.

5. 2,08 kg.

6. 99,5%.

7. 0,18%.

8. 65,2 perc.

9. 7,16 kg.

10. $x = \frac{ab(e^{akt} - e^{bkt})}{a e^{akt} - b e^{bkt}}$.

2. §. Szétválasztható változójúra visszavezethető differenciálegyenletek

a) Gyakorló feladatok

a) $y' = f(ax + by + c)$.

1. $\frac{y-x-1}{y-x+1} = C e^{2x}$.

2. $y = \frac{1}{8} \sqrt{3} \operatorname{tg} [2 \sqrt{3}(x+C)] - \frac{3}{4} x$.

3. $y = \frac{a}{2} \ln \left| \frac{x-y-a}{x-y+a} \right| + C$.

4. $\operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = x + C$.

5. $x^2 \sin y = x^3 + C$.

6. $y = x - \frac{1}{x+C}$.

7. $\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = 1 - \frac{2}{x+C}$.

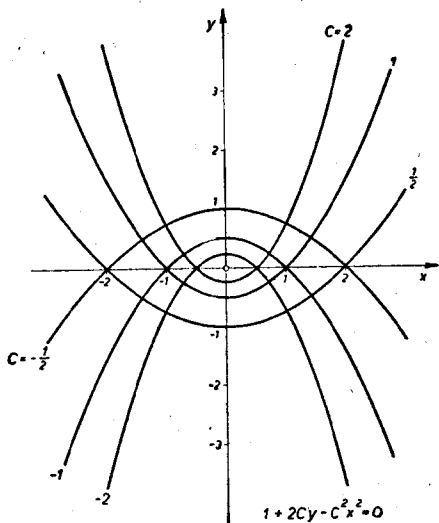
8. $y = -x + \operatorname{tg}(x+C)$.

9. $x = -\frac{1}{2} y - \frac{1}{4} + C e^{2y}$.

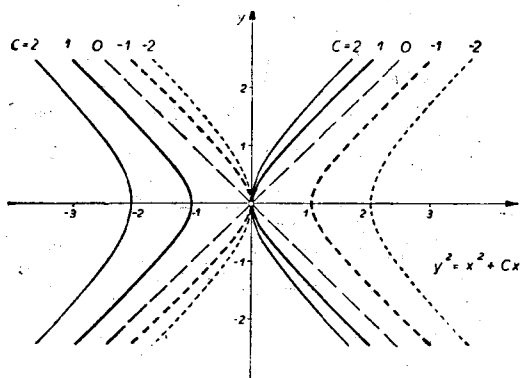
10. $2 \sqrt{y-2x+4} \ln |\sqrt{y-2x+4} - 2| = x + C$.

β) Homogén (fokszámú) differenciálegyenletek: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

1. $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \arctg \frac{y}{x} + C$; vagy ugyanez polárkoordinátákban: $r = C e^{\varphi}$.
2. $1 + 2C y - C^2 x^2 = 0$ (81. ábra).
3. $(x + y)^2 (2x + y)^3 = C$.
4. $y^2 = -x^2 \ln |C x|$.
5. $y^2 = x^2 + C x$ (82. ábra).
6. $x e^{\sqrt{\frac{y}{x}}} = C$.
7. $x e^{\frac{y}{x}} = C$.
8. $x e^{\sin \frac{y}{x}} = C$.
9. $xy \cdot \cos \frac{y}{x} = C$.
10. $y = \frac{x(x+C)}{x-C}$ (83. ábra).
11. $x(x-3y)^2 = C$.
12. $y(x+y)^3 = C$.

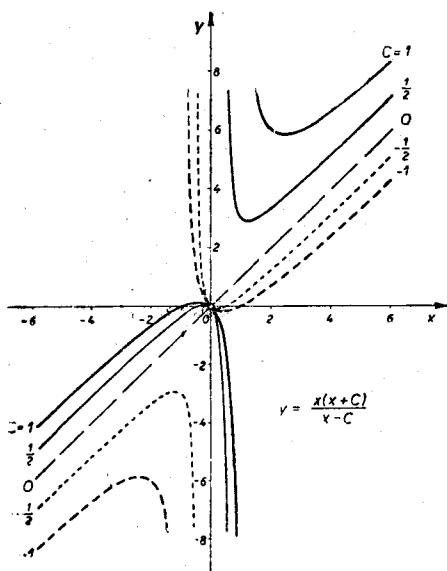


81. ábra



82. ábra

13. $y^2 + xy = C x$.
14. $x^2 + y^2 = C x$.
15. $x^2 (y - x) = C (y + x)$.
16. $y^2 (y - x) = C x^2$.
17. $xy^2 = C (x^2 + y^2)$.
18. $y^4 (x^2 + y^2) = C x^4$.
19. $\ln |xy| + \arctg \frac{y}{x} = C$.
20. $x^3 - y^3 - 6x^2 y - 3xy^2 = C$.
21. $y^2 (x - 2C) + C^2 x = 0$.



83. ábra

$$22. \quad y \sin \frac{x}{y} = C.$$

$$23. \quad \ln |x| + e^{-\frac{y}{x}} = C.$$

$$24. \quad 27y^3 - x^3 = Cx^5.$$

$$25. \quad y^2 + x^2 e^{-\frac{y}{x}} = C.$$

$$\gamma) \quad y' = f\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right)$$

$$1. \quad (y - x + 1)^2 (y + x - 1)^5 = C. \quad 2. \quad x + 2y + \ln |2x + y - 1| = C$$

$$3. \quad 4x - 8y = \ln |4x + 8y + 5| + C. \quad 4. \quad x + 5y + 2 = C(x - y + 2)^4.$$

$$5. \quad -\ln |x - 1| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{y-2}{x-1} - 1 - \sqrt{3} \right| + \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{y-2}{x-1} - 1 + \sqrt{3} \right| + C.$$

$$6. \quad \frac{y-1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{y-1}{y+2x-1} \right| = C - x.$$

$$7. \quad (x - y + 1)(x + y + 2)^2 = C. \quad 8. \quad (x + y - 1)^3 = C(x - y + 1)^2.$$

$$26. \quad x^2 = 2y^2 \ln |Cy|.$$

$$27. \quad x^2 + y^2 = C(x + y).$$

$$28. \quad y(y + 3x)^5 = Cx^3.$$

$$29. \quad x^4 + 6x^2y^2 = Cy.$$

$$30. \quad x^2 = C^2 - 2Cy.$$

$$31. \quad \ln |Cy| = \frac{x^3}{3ay^3}.$$

$$32. \quad (y - x)^{1-a} = Cxy.$$

$$33. \quad (x^2 + xy + y^2)^{1-a} = C(x - y)^{2+a}.$$

$$34. \quad e^{\frac{y}{x}}(x - y)^2 = Cx.$$

$$35. \quad y^a = Cx^b e^{\frac{x}{y} - \frac{y}{x}}.$$

$$36. \quad (x - y)^2 \ln |C(x - y)| = 4xy - 2x^2.$$

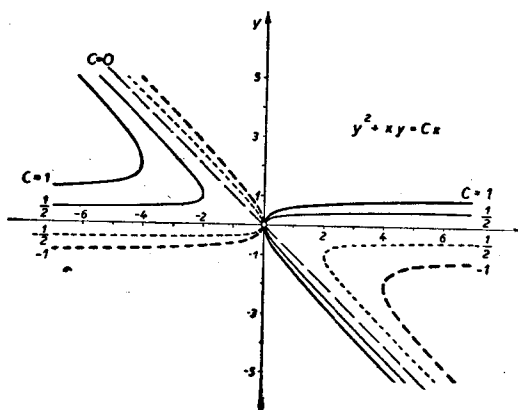
$$37. \quad \operatorname{tg} \frac{y}{x} = \ln \left| \frac{C}{x} \right|.$$

$$38. \quad y = x \arcsin(Cx).$$

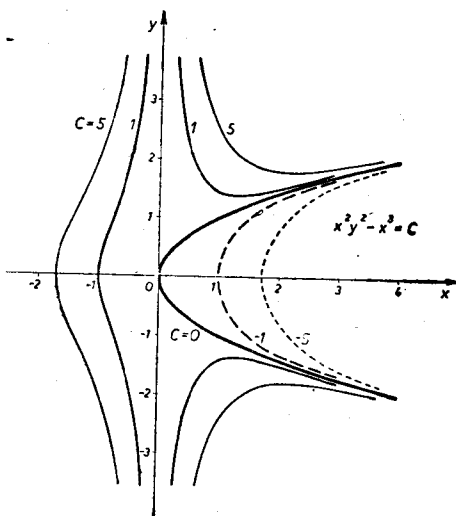
$$39. \quad e^{\frac{x}{y}} + \ln |x| = C.$$

$$40. \quad 2y = Cx^2 + \frac{1}{C}.$$

9. $(x - 2y + 11)^2 = C(2x + y + 2).$
10. $(x - 3y + 11)^4 (x + y + 3)^3 = C.$
11. $(x + 2y - 10)^5 (x - y + 11)^3 = C.$
12. $(x - 2y)^2 + 6x - 10y = C.$
13. $(a + 1)(y - x) + 2b \ln(a + 1)(y + ax) + b(a - 1) = C.$
14. $y - 4x - 1 = Cx^3(y - x - 1).$
15. $\ln|y + a| + 2 \arctg \frac{y + a}{x + b} = C.$
16. $(x - y)^2 + 3x + y + \frac{1}{2} \ln|2x - 2y + 1| = C.$
17. $x - y + \ln[(x + y)^2 + (x + y + 2)^2] = C.$
18. $(y - x - 1)(y + x - 3)^2 = C.$
19. $x + 2y + \ln|x + y - 2| = C.$
20. $(x + y + 2)^3 = C(x - y).$



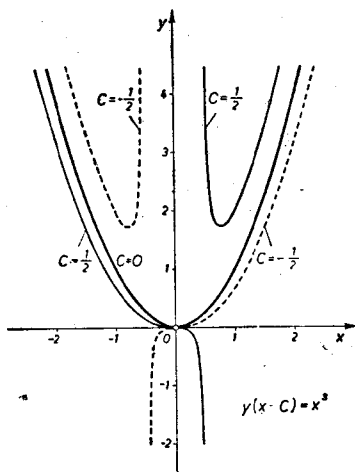
84. ábra



85. ábra

δ) Homogén „dimenziójú” differenciálegyenletek

1. $xy^2 = \ln x + C.$
2. $x^2 y^2 - x^3 = C$ (85. ábra).
3. $y(x - C) = x^3$ (86. ábra).
4. $1 - 2x^2 y = C y^2.$
5. $x^2 y(1 + xy) = C.$
6. $y^3 = x^2(C - \ln|x|).$
7. $3y^2 = 2ax + \frac{C}{x^2}.$
8. $y = \frac{1}{x} \arctg \ln|Cx|.$



86. ábra

$$9. \quad y' = \frac{x}{\sqrt{C-x}}.$$

$$10. \quad \ln Cx = \arctg \frac{y^2}{x}.$$

$$11. \quad y^2 = x^2(2x + C).$$

$$12. \quad y^2 = \frac{1}{3}x + Cx^{-\frac{1}{2}}.$$

$$13. \quad x^2 y - x = Cy.$$

$$14. \quad x^2 y = 2 \ln |y| + C.$$

$$15. \quad x^3 = 3xy + C.$$

b) Vegyes feladatok

1. $x^2 = -2Cy + C^2$. Tehát a keresett görbék parabólák, melyeknek közös gyújtópontja az origó, tengelye az y tengely (87. ábra).

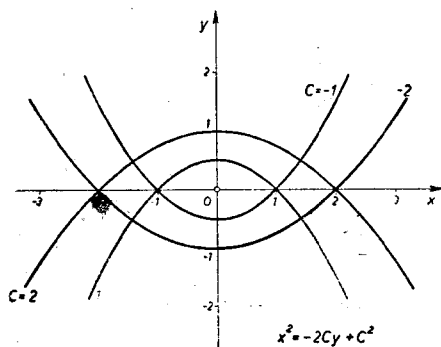
$$2. \quad y = \frac{x}{\ln Cx} \quad (88. \text{ ábra}).$$

$$3. \quad x^2 + y^2 = Cx; \quad x^2 = C^2 - 2Cy; \quad xy = C.$$

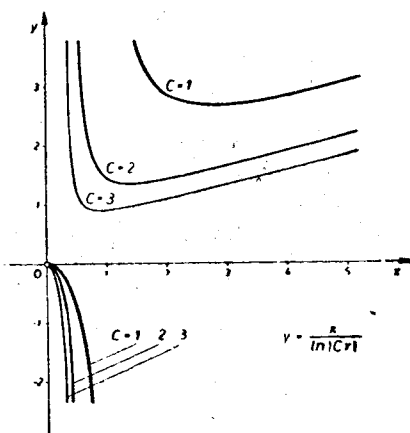
$$4. \quad \left|x - \frac{1}{2}C\right|^2 + y^2 = \frac{1}{4}C^2.$$

$$5. \quad y = x \sqrt{C - 2 \ln x} \quad (89. \text{ ábra}).$$

$$6. \quad y = y_0 + y'x + Cx^{\frac{n}{n-1}}.$$



87. ábra



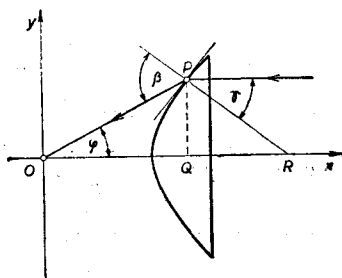
88. ábra

7. A megoldandó differenciálegyenlet:

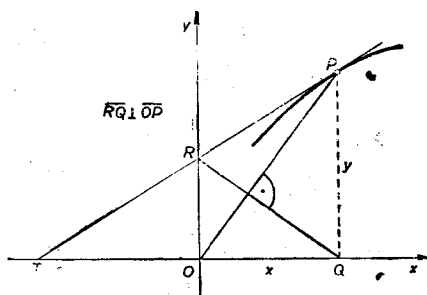
$$y' = \frac{-x + c \sqrt{x^2 + y^2}}{y}$$

ahol $c = \frac{1}{n} = \sin \beta : \sin \gamma > 1$. Az általános megoldás polárkoordinátákban

$$r = \frac{p}{1 - c \cdot \cos \varphi}.$$



89. ábra



90. ábra

Ez pedig egy olyan hiperbola egyenlete, melynek 0 az egyik fókusza és c a numerikus excentricitása. p az integrálási állandó (90. ábra).

3. §. Elsőrendű lineáris és erre visszavezethető differenciálegyenletek

a) Gyakorló feladatok

a) Lineár és differenciálegyenletek

1. $y = C e^{\frac{x}{2}} - (x^2 + 2).$

2. $y = \frac{1}{2} (x + 1)^4 + C (x + 1)^2.$

3. $y = C x^a + \frac{x}{1-a} - \frac{1}{a}.$

4. $y = a x + C x \sqrt{1-x^2}.$

5. $y = a x + C \sqrt{1+x^2}.$

6. $y = \sin x + C \cos x.$

7. $y = \sin x - 1 + C e^{-\sin x}.$

8. $y = x^n (e^x + C).$

9. $y = a x^{1-n} + C x^{-n}.$

10. $y = x e^{-x} + C e^{-x}.$

11. $y = x^2 (C e^{\frac{1}{x}} + 1).$

12. $y = C x e^x + x^2.$

13. $y = C x + \frac{1}{2} x^3 - 1.$

14. $y = \frac{C}{x} + \frac{1}{2} x \ln |x| - \frac{1}{4} x.$

15. $y = C (1+x) + x^4.$

16. $y = C \sqrt{x^2 + a} + x.$

17. $y \sqrt{1-x^2} = C + \arcsin x.$

18. $y \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = C + \arcsin x + \sqrt{1-x^2}.$

19. $y = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}} + x^2 - 2.$ 20. $y = \frac{C}{\sqrt{x}} + \sqrt{1+x}.$
21. $y(x + \sqrt{1+x^2}) = C + x^2 + x\sqrt{1+x^2} - \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$
22. $y\sqrt{x^2-x} = C + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}) + \frac{1}{2} \sqrt{x^2-x}.$
23. $y = \frac{C + \ln x}{x} + \frac{1}{2}x + 1.$ 24. $y = \frac{C}{\sqrt{x^2+x+1}} + 2x - 3.$
25. $y = \sqrt{x^2-1} [C + \ln(x + \sqrt{x^2-1})] - x.$
26. $y = C\sqrt{1-x^2} - x + x^3.$ 27. $(1+x^2)y = C - \ln |\cos x|.$
28. $y\sqrt{1-x} = C + \sqrt{1+x}.$ 29. $y\sqrt{1-x} = C + x^2.$
30. $y = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}} e^{-\arctan x} + \frac{x-1}{x^2+1}.$ 31. $y = \frac{C + \sin x}{x^2} - \frac{\cos x}{x}.$
32. $y = (C+x) \cos x.$ 33. $y = C \cos x - 2 \cos^2 x.$
34. $y = \frac{C}{\sin 2x} + \frac{1}{\cos^2 x}.$ 35. $y = C e^{-\sin x} + \sin x - 1.$
36. $y = (C + e^x) \sin x.$
37. $y = C e^x - x - 1 - \frac{1}{2}(\sin x + \cos x).$
38. $y = \frac{C + 2x + \sin 2x}{\cos 2x}.$
39. $y = C e^{-2x} + \frac{1}{2}(x^2 - x) + \frac{1}{4} + 2 \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x.$
40. $y = C \cos x + \sin x \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg} x\right).$ 41. $y \operatorname{ch} x = C + e^{3x} + 3 e^x.$
42. $y = C \operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos^2 x}.$ 43. $y = \frac{C + \ln \sin x}{\cos^3 x} + \frac{1}{2 \cos x}.$
44. $y \operatorname{tg} x = C + \ln \sin^2 x + \cos 2x.$
45. $y \sin x = C - \frac{1}{8} \cos 4x - \frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right|.$
46. $y \cos x = C + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{6} \cos 3x.$
47. $y = \sqrt{1-x^2} (C + \ln \sqrt{1-x^2}) + \operatorname{Arc} \sin x.$
48. $y = C e^x \left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 - x.$ 49. $x^2 y = \frac{1}{6} x^6 + C.$

50. $x = 1 + y^2 + C \sqrt{1 + y^2}$.
 51. $y = e^x (x + C)$.
 52. $x^2 y = x^3 + C$.
 53. $xy^2 = y^3 + C$.
 54. $x = y^2 (y^2 + C)$.
 55. $x^4 = 4xy + C$.
 56. $(x + 1)^3 y = (x + 1)^2 + C$.
 57. $y + a = C \sin^2 x$.
 58. $x^2 y e^x = e^x + C$.
 59. $x^3 y = 2x^2 - x^3 + C$.
 60. $(xy - 1) \sin x = C$.
 61. $x(y - 1) = y^2 + C y$.
 62. $xy^2 = 3y + C$.
 63. $\frac{x + x \sin y}{\cos y} = y + C$.
 64. $x(y^2 - 1) = y + C$.
 65. $y^2 - 2x = C y^3$.
 66. $x = y^2 \left(1 + C e^{\frac{1}{y}}\right)$.
 67. $y = x$.
 68. $y = 2 e^{-\sin x} + \sin x - 1$.
 69. $y = x + \sqrt{1 - x^2}$.
 70. $y = 1$.
 71. $y = e^x \left| \frac{1}{x} - 1 \right|$.
 72. $y = C e^{-x} + x e^{-x}$.
 73. $y = C e^{4x} - \frac{4}{17} x \sin x - \frac{15}{289} \sin x - \frac{1}{17} x \cos x - \frac{8}{289} \cos x$.
 74. $y = C e^{-2x} + \left(\frac{1}{3} x^2 - \frac{2}{9} x + \frac{2}{27} \right) e^x$.
 75. $y = C e^{-3x} - e^{-3x} \cos x$.
 76. $y = C e^{2x} + e^{2x} (\sin x + \cos x)$.
 77. $y = C e^{4x} - \frac{1}{4} x^3 - \frac{3}{16} x^2 + \frac{5}{32} x + \frac{5}{128}$.
 78. $y = C e^{5x} + x^2 e^{5x}$.
 79. $y = C e^{-3x} + \frac{1}{n+1} x^{n+1} e^{-3x}$.
 80. $y = C e^x + 2x e^x \cos x + x^2 e^x \sin x - 2 e^x \sin x$.

$\beta)$ Bernoulli-féle differenciálegyenletek

1. $y = x \sqrt{\frac{7}{3(x^7 + C)}}$.
 2. $xy [a \ln^2 x + C] + 2 = 0$.
 3. $y^{-2} = x^2 + 1 + C e^{x^3}$.
 4. $y = \frac{1}{C \sqrt{1 - x^2 - a}}$.
 5. $y^3 = C e^{ax} - \frac{x+1}{a} - \frac{1}{a^2}$.
 6. $y = \frac{1}{Cx + \ln x + 1}$.
 7. $y = \frac{\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}}{\sin x + C}$.
 8. $y = \frac{1}{\sqrt[4]{C x^{-2} - 4 x^3}}$.

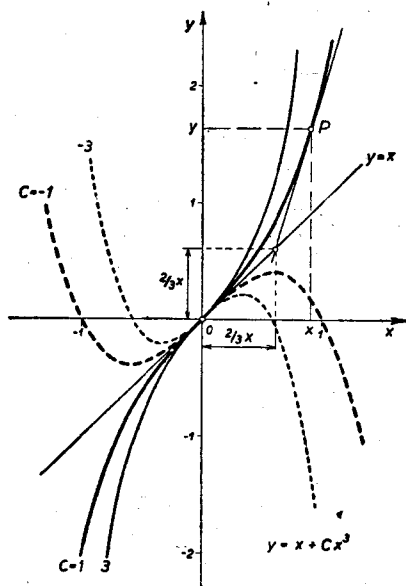
9. $y = (C x^2 + 1)^2.$ 10. $y^2 = x^3 + C x + 1.$
11. $y = \frac{x}{C - x^2}.$ 12. $y = \frac{1}{C \sqrt{1 + x^2} + 1}.$
13. $y = \frac{x^2}{\sqrt{C - x^2}}.$ 14. $y = \frac{1}{C x + 1 + \ln |x|}.$
15. $y = \frac{1}{\sqrt{C x^2 + 2x}}.$ 16. $y x^2 = (C \sqrt{x + 1})^2.$
17. $y^3 (x^3 + C) + 3 x^2 = 0.$ 18. $y = \left(\frac{C}{\cos^2 x} + \frac{2 \sin x}{\cos^2 x} \right)^{-\frac{1}{2}}$
19. $y = (C e^x + x + 1)^{-2}.$ 20. $y^2 (x + 1) = C + x^3 - x^2.$
21. $x = y (1 + C e^x).$ 22. $x^2 + x y = C y.$
23. $7 y^3 = x (y^7 + C).$ 24. $x y (\ln y + C) + 1 = 0.$
25. $x = y (\ln x + C).$ 26. $x = y^2 (x^2 + C).$
27. $x^2 - 1 = y (3 x + C).$ 28. $\frac{1}{\cos y} = x^2 (C + \operatorname{tg} y).$
29. $y = \frac{3 x}{x^3 + C}.$ 30. $(1 + C x + \ln x) y = 1.$

γ) Jacobi-féle differenciálegyenletek

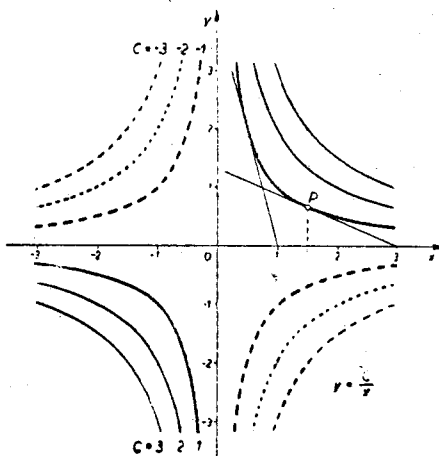
1. $x + 2y + a x (x + y) = C (x + y)^2.$ 2. $x - 1 = C (y - 1).$
3. $x - y + 1 + x y + \frac{1}{2} y^2 = C (1 + x)^2.$
4. $y (x + y) = 1 + x + y + C (x + y)^2.$
5. $y + 2 = C (x - 1).$
6. $(2x - 3y + 1) (x + y + 1) = C (x + y - 1)^2.$
7. $(x + y + 1)^2 = C (x^2 + y^2 + 1).$

b) Vegyes feladatok

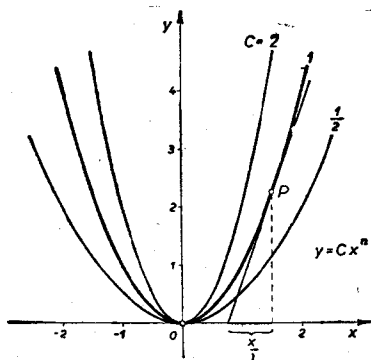
1. $y = C x^2.$ 2. $y = \frac{1}{2} x^3.$
3. $y = x + C x^3$ (91. ábra).
4. $y = \frac{C}{x}$ (92. ábra).
5. $y = C x^n$ (93. ábra).
6. $y = C e^{-\frac{x}{a^2}}$ (94. ábra).
7. $y^2 = 4a x + 4a^2 + C e^{\frac{x}{a^2}}.$ 8. $y = C x^2 + \frac{2a^2}{3x}.$



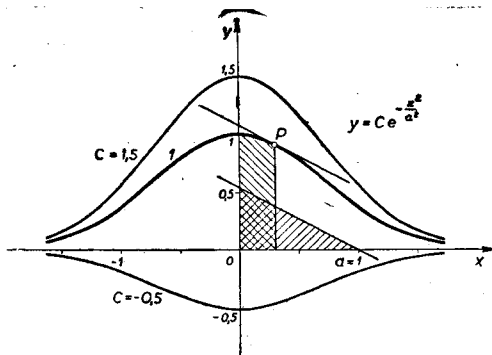
91. ábra



92. ábra



93. ábra



94. ábra

9. $y^{1-n} = \frac{k(n-1)}{m+n-1} x^m + C x^{1-n}$, ha $m+n+1 \neq 0$,
 $y^{1-n} = x^{1-n} [k(n-1) \ln x + C]$, ha $m+n+1 = 0$.
10. $(y-1)^2 + x^2 = C y^2 e^{-2 \arctg \frac{x}{y-1}}$. 11. $Q = CU \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$.
12. $Q = \frac{CU_0}{1 + R^2 C^2 \omega^2} (\sin \omega t - RC \omega \cos \omega t + RC \omega e^{-\frac{t}{RC}})$.
 $i = \frac{dQ}{dt} = \frac{CU_0 \omega}{1 + R^2 C^2 \omega^2} (\cos \omega t + RC \omega \sin \omega t - e^{-\frac{t}{RC}})$.
13. 417 573. Az emanáció bomlási sebessége nagyobb, mint a rádiumé, ezért csökken az emanáció mennyisége.
14. 835 145. 15. Egy sem.

4. §. Riccati-féle differenciálegyenlet

1. $y = \frac{2x^3 - C}{x^4 + Cx}$. 2. $xy = 2 + \frac{4}{C + \ln x}$.
3. $y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{Cx - x \ln x}$. 4. $(x^4 + Cx)y = 4x^3 + C$.
5. $y = \frac{1}{x \left\{ -1 + \operatorname{tg} \left(C - \frac{1}{2} \ln x \right) \right\}}$.
6. $y = \frac{3(Ce^{6x^{1/3}} + 1)}{(3x^{2/3} - x^{1/3})Ce^{6x^{1/3}} - (3x^{2/3} + x^{1/3})}$.
7. $y = \frac{-2Cx^{\frac{3}{4}} - 1}{Cx^{\frac{3}{4}} + x}$. 8. $y = \frac{2x^4 - 2C}{x^5 + Cx}$.
9. $y = \frac{\operatorname{ctg} \left(\frac{1}{x} + C \right)}{x^2} - \frac{1}{x}$. 10. $y = x \frac{Cx + e^x}{Cx - e^x}$.
11. $y = 1 + \frac{1}{Ce^x + x}$. 12. $x^2 y = x + 1 + \frac{1}{Ce^{-2/x} - \frac{1}{2}}$.
13. $y = x + \frac{1}{Cx + ax^m}$. 14. $y = x + \frac{1}{Ce^{-x} + x - 1}$.

$$15. \quad y = x + \frac{a}{C \sqrt{x^2 + a} + 2x}.$$

$$16. \quad y = \frac{x(Cx + \sin x)}{Cx - \sin x}.$$

$$17. \quad y = \frac{x^2 + C}{x + C}.$$

$$18. \quad y = \frac{1}{\cos x} + \frac{3 \cos^2 x}{C - \cos^3 x}$$

$$19. \quad y = -x^2 + \frac{x^3 - 1}{x + C}.$$

$$20. \quad y = \frac{C + 2 \sqrt{(x^2 - 1)^3}}{C - \sqrt{(x^2 - 1)^3}}$$

5. §. Egzakt differenciálegyenletek. Integráló tényező (Euler-féle multiplikátor)

a) Gyakorló
feladatok

α) Egzakt differenciálegyenletek

1. $2x + 3y + 4 e^{xy} = C.$

2. $\sin x + e^{-x} \sin y = C.$

3. $x^3 - 3x^2y + y^3 = C.$

4. $\sqrt{x^2 + y^2} + \sin x \sin y = C.$

5. $y \sin x + \cos(x - y) = C.$

6. $x^2y - 2xy - y^2 - x = C.$

7. $\sin(x + y) + \cos(x - y) = C.$

8. $\ln(x^2 + y^2) = C$, vagy $x^2 + y^2 = C_1.$

9. $x^2 + y^2 - 2xy = C$, vagy $x - y = C_1.$

10. $ax^2 + 2bxy + Cy^2 = k.$ Itt k az integrálási állandó.

11. $x^3 - y^2(2a - x) = C.$ Ha $C = 0$, akkor ez a Diokles-féle cisszoisznak az egyenlete (95. ábra).

12. $x^3 + y^3 - axy = C.$ Ha $C = 0$, akkor ez a Descartes-féle levél egyenlete (96. ábra).

13. $\frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2 - \frac{1}{2}a^2(x^2 - y^2) = C.$ Cassini-féle görbék egyenlete. Ha speciálisan $C = 0$, akkor ez egy lemniszkáta egyenlete (97. ábra).

14. $x^2y^2 + y^2(y + b)^2 - a^2(y + b)^2 = C.$ Konchoisok egyenlete (98. ábra).

15. $\frac{xy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} = C.$

16. $(x - 1) \ln(y^2 + 1) = C.$

17. $x^3 + y^3 + 2x^2y = C.$

18. $(x + y)(ax^2 + 2hxy + by^2) = C.$

19. $2x^3y^2 - 4x^2y^3 + 5x^2y + 3xy = C.$

20. $x^2 \ln|y| = C.$

21. $y \cos x - x \sin y = C.$

22. $y + b = C(x + a)^2.$

23. $1 + xy = C(x + y).$

24. $xe^y - y^2 = C.$

25. $x^3 + 3xy^2 = C.$

26. $x^2y - y^2x = C.$

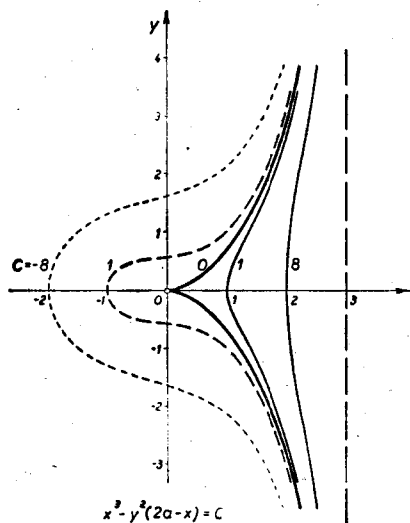
27. $x^3 + x^2y - y^2x - y^3 = C.$

28. $y^2 \cos^2 x - 2y \sin x = C.$

29. $xe^x y^3 + e^x - 6y^3 = C.$

30. $x + y \sin x - x \cos y + 2y = C.$

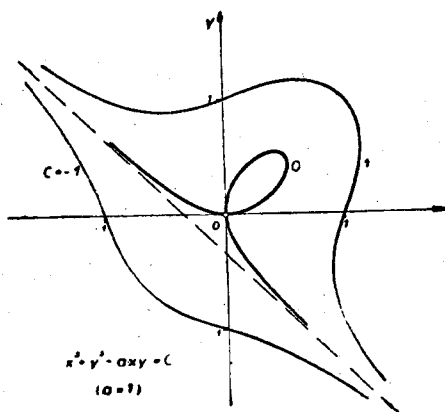
31. $y^3 + 3x(y^2 + 1)^{\frac{3}{2}} = C.$



$$x^2 - y^2(2a - x) = C$$

$$(a = \frac{3}{2})$$

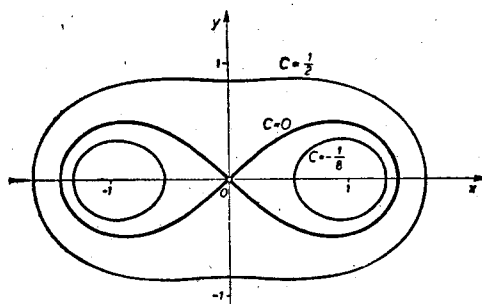
95. ábra



$$x^2 + y^2 - axy = C$$

$$(a = 1)$$

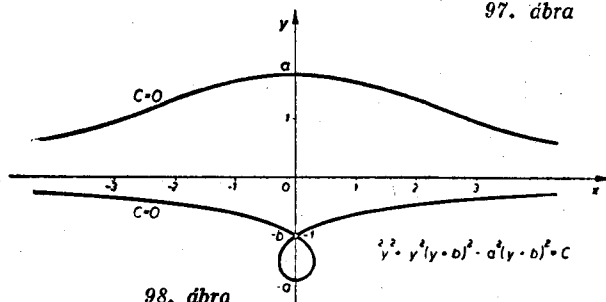
96. ábra



$$\frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2 - \frac{1}{2}a^2(x^2 - y^2) = C$$

$$(a = 1)$$

97. ábra



$$y^2 + y^4(y + b)^2 - a^4(y + b)^2 = C$$

98. ábra

32. $x(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} = C.$ 33. $x^2 - 3xy + 4y^2 = C y.$
 34. $x = y \operatorname{tg}(x + C).$ 35. $x^2(x^2 + y^2) = C.$

β) Integráló tényező (Euler-féle multiplikátor).

1. $\frac{x}{y} + \frac{1}{2} x^2 = C.$ 2. $\frac{x^2}{y^2} + xy = C.$
 3. $y = x \operatorname{th}(x + C).$ 4. $x = y(C + \ln |y|).$
 5. $y = Cx + x^2.$ 6. $y(1 + Cx) = 1.$
 7. $y^2 - xy = Cx.$ 8. $x^3 y - x^2 y^2 = C.$
 9. $x^2 y^2 + x y^3 = C.$ 10. $\ln(x^2 + y^2) + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} = C.$
 11. $\frac{y}{\cos x} = \operatorname{tg} x + C.$ 12. $y \cos x = C - x.$
 13. $y^2 - 2y e^{-x} = C.$ 14. $y e^{-x} = x e^{-y} + C.$
 15. $x^2 y^3 - a x^5 = C.$
 16. $xy \sqrt{x+y} = C.$ Ugyanis $\mu_1 = \frac{1}{\sqrt{x+y}}, \mu_2 = xy.$
 17. $\frac{x-y}{(x+y)^2} = C.$ Ugyanis $\mu_1 = (x+y)^{-4}, \mu_2 = (x-y)^{-2}.$
 18. $\frac{x^2 + y^2}{x^4 y^4} = C.$ Ugyanis $\mu_1 = (x^2 + y^2)^{-\frac{5}{4}}, \mu_2 = (xy)^{-5}.$
 19. $x^6(x^2 + y^2) = C.$ Ugyanis $\mu_1 = x^5, \mu_2 = (x^2 + y^2)^{-\frac{5}{6}}.$
 20. $\ln |x| - xy + \frac{1}{2} y^2 = C.$ 21. $e^{xy} \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} \right) = C.$
 22. $(x + y - 1) e^x = C.$ 23. $(x^3 + 7y^4) \sqrt{x} = C.$
 24. $x^2 y^2 = \ln C y^2.$ 25. $\operatorname{arc} \sin x + y \sqrt{1-x^2} = C.$
 26. $y e^{xy} = C.$ 27. $\frac{x+y}{\cos y} = C.$
 28. $x^3 + y^3 + 3xy = C x^2.$ 29. $(x-y) e^{\frac{1}{2}(x+y)^2} = C.$
 30. $y(x+y) \sqrt{x^2 + a^2} = C.$ 31. $2x^3 y^5 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = C.$
 32. $e^y(x+y) = C(y+1).$ 33. $(x^3 + y)(x+y)^4 = C.$
 34. $y e^x \left(x^2 + \frac{y^2}{3} \right) = C.$ 35. $\ln |x| + \frac{y^2}{x} = C.$

b) Fizikai feladatok

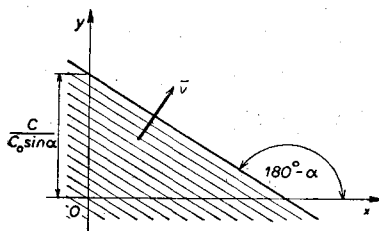
1. A sebességi potenciál:

$$F(x, y) = c_0 x \cos \alpha + c_0 y \sin \alpha.$$

Tehát az ekvipotenciális vonalak egyenlete:

$$c_0 x \cos \alpha + c_0 y \sin \alpha = C.$$

Ezek a sebességvektorra merőleges, párhuzamos egyenesek (99. ábra).



99. ábra

2. A sebességi potenciál:

$$F(x, y) = c_0 \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Az ekvipotenciális vonalak egyenlete:

$$\frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} = C.$$

Ezek az origó (forrás, illetve nyelő) mint középpont körül rajzolt koncentrikus körök (100. ábra).

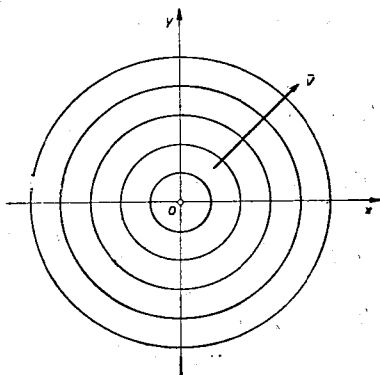
3. A sebességi potenciál:

$$F(x, y) = \frac{c_0}{2} (x^2 - y^2).$$

Az ekvipotenciális vonalak egyenlete:

$$\frac{c_0}{2} (x^2 - y^2) = C.$$

Ezek egyenlőszárú hiperbolák (101. ábra).



100. ábra

4. A sebességi potenciál:

$$F(x, y) = c_0 x + \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Az ekvipotenciális vonalak egyenlete:

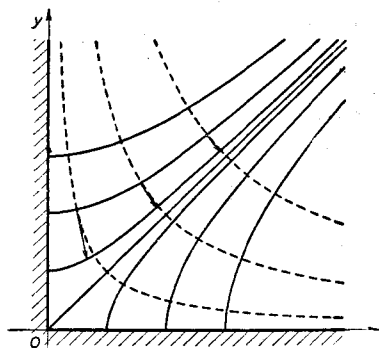
$$c_0 x + \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} = C.$$

5. A sebességi potenciál:

$$F(x, y) = M \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Az ekvipotenciális vonalak egyenlete:

$$M \frac{x}{x^2 + y^2} = C,$$



101. ábra.

vagy ha $k = \frac{M}{2C}$, akkor

$$(x - k)^2 + y^2 = k^2.$$

Ezek olyan körök, melyek keresztül mennek az origón, középpontjaik pedig rajta vannak az x tengelyen.

6. A sebességi potenciál:

$$F(x, y) = c_0 x + M \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Az ekvipotenciális vonalak egyenlete:

$$c_0 x + M \frac{x}{x^2 + y^2} = C.$$

7. A sebességi potenciál:

$$F(x, y) = c_0 x + M \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \arctg \frac{x}{y}.$$

Az ekvipotenciális vonalak egyenlete:

$$c_0 x + M \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \arctg \frac{x}{y} = C.$$

6. §. Általános megoldási módszerek az ismeretlen függvény deriváltjára nézve explicit alakban megadott differenciálegyenleteknél

a) Az iránymező és az izoklinák megrajzolása

1. L. 102. ábra.

2. L. 103. ábra.

3. L. 104. ábra.

4. L. 105. ábra.

5. L. 106. ábra.

6. L. 107. ábra.

7. L. 108. ábra.

8. L. 109. ábra.

9. L. 110. ábra.

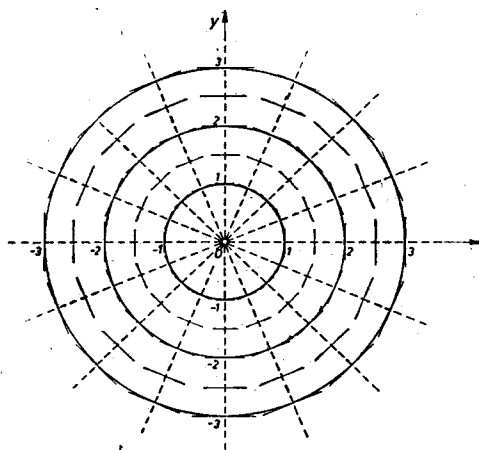
10. L. 111. ábra.

b) Közelítő megoldás sorozatos közelítéssel, illetve hatványsor alakjában

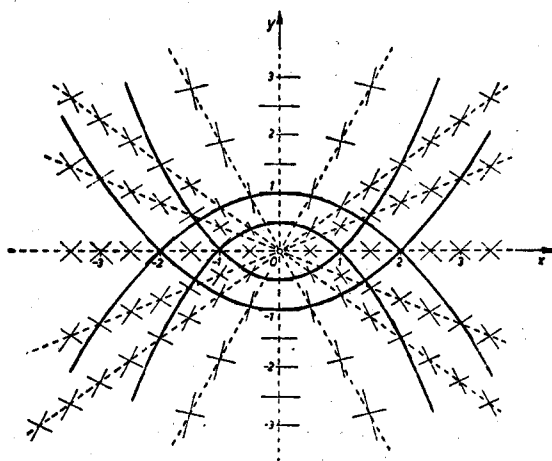
$$1. \quad y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \frac{3x^4}{4!} + \frac{2 \cdot 4 \cdot x^5}{5!} + \frac{3 \cdot 5 \cdot x^6}{6!} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 x^7}{7!} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 x^8}{8!} + \dots$$

$$2. \quad y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \dots = \sin x.$$

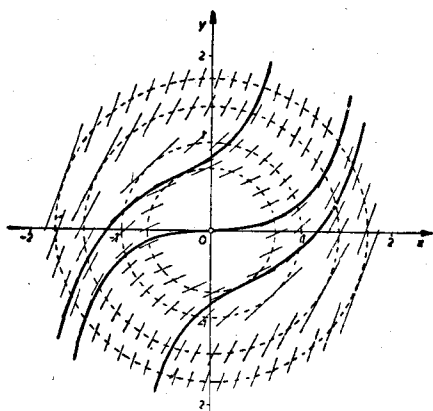
$$3. \quad y = 1 + x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^4 + \frac{6}{5}x^5 + \dots$$



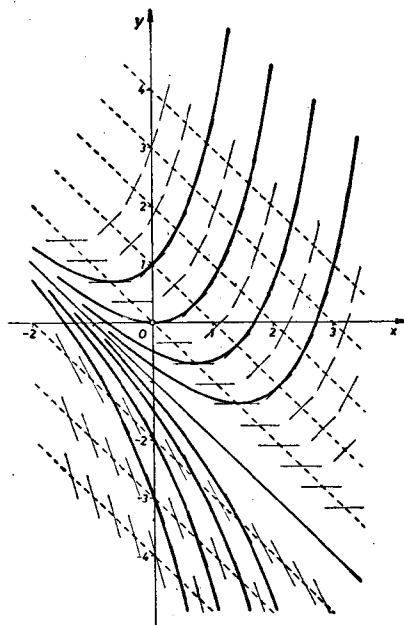
102. ábra



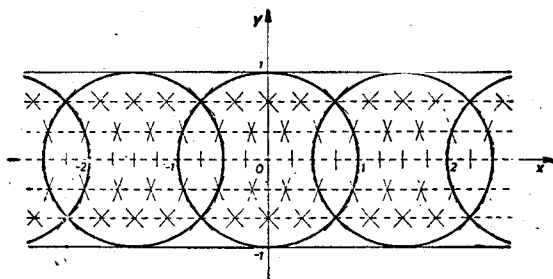
103. ábra



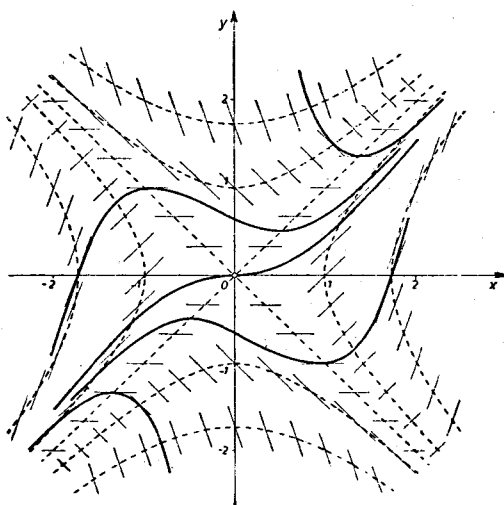
104. ábra



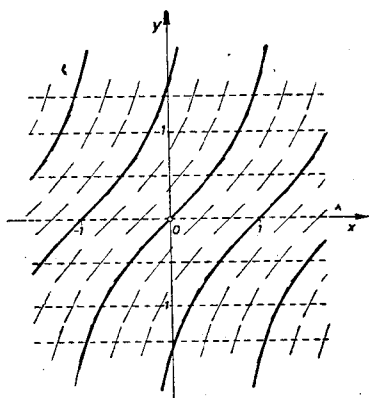
105. ábra



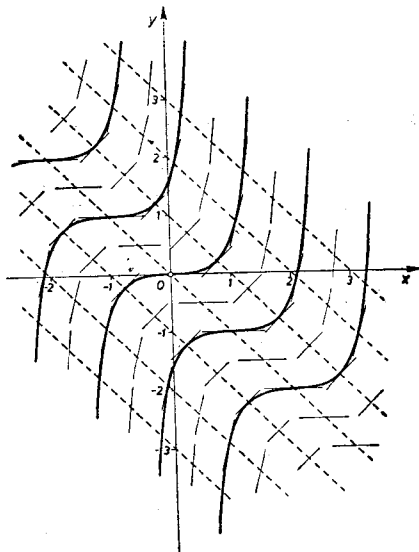
106. ábra



107. ábra

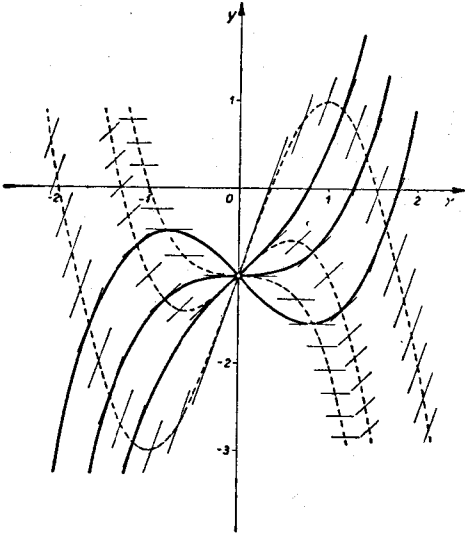


108. ábra

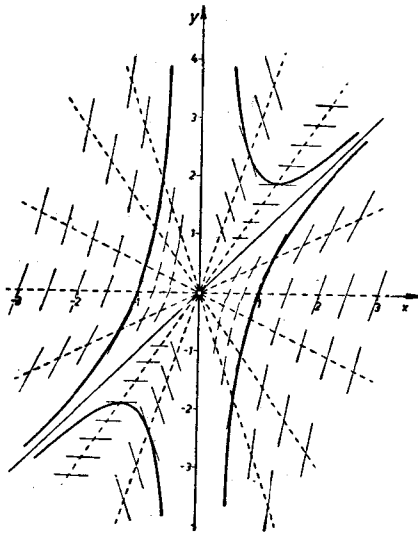


109. ábra

4. $y = (x-1) + (x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \frac{1}{24}(x-1)^4 - \frac{11}{120}(x-1)^5 + \dots$
5. $y = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{3 \cdot 5} + \dots$



110. ábra



111. ábra

7. §. Szinguláris pontok

1. $(x-y)^2 = C(x-2y)^2$, ha $C \neq 0$. Ezenkívül még van két megoldás: $y = x$ és $y = -\frac{1}{2}x$. Mivel $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$, az origó: csomópont.
2. $(3x-y)(x-2y)^4 = C$. Mivel $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1$, az origó: nyeregpont.
3. Az általános megoldás polárkoordinátákban: $r = C e^{-\varphi}$. Mivel $\lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i$, az origó: fókusz.
4. Az általános megoldás: $x^2 - 6xy + 13y^2 = C$, ahol $C > 0$. Mivel $\lambda_1 = 2i, \lambda_2 = -2i$, az origó: centrum.
5. Az általános megoldás: $3y = (x-y) \ln|x-y| + C(x-y)$. Ezenkívül $y = x$ is megoldás. Mivel $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, az origó: csomópont.

II. ELSŐRENDŰ, AZ ISMERETLEN FÜGGVÉNY DERIVÁLTJÁBAN IMPLICIT DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

1. §. Speciális alakú elsőrendű implicit differenciálegyenletek

a) Gyakorló
feladatok

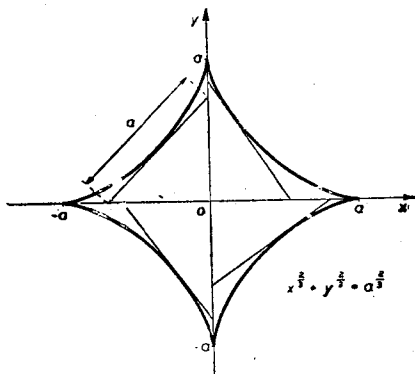
1. $\left(y - \frac{x^2}{2} + C\right)(y + C e^{-x} + x - 1) = 0.$
2. $x^2 = 2C(y - 2C)$; szinguláris megoldások: $y = 2x$, $y = -2x$.
3. $(y - x + C)(y - \sqrt{C^2 - x^2}) = 0.$ 4. $y = x \operatorname{sh}(x + C).$
5. $\left(y - \frac{1}{3}x^3 + C\right)\left|y - C e^{\frac{1}{2}x^2}\right|\left|y - \frac{1}{x - C}\right| = 0.$
6. $(y - C)^2 = 4x C.$ 7. $x^2 - 2C y = C^2.$
8. $e^{2y} - 2C e^y + C^2 \cos^2 y = 0.$
9. $144(2y - x^2 - x + C)^2 = (1 + 8x)^3.$
10. $y^2 - 2C y \sqrt{x \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} \ln x\right)} + C^2 x = 0.$
11. $(y^2 - x^2 + C)(xy + C) = 0.$
12. $(2y - x^2 + C)(y - C e^x) = 0.$
13. $(2y - 3x^2 + C)(2y + x^2 + C) = 0.$
14. $y^2 = C^2 + 2C x - 2x^2$; szinguláris megoldások: $y = \pm x$
15. $(y - C x)^2 = 4x.$
16. $y^2 = Cx - C^2$; szinguláris megoldások: $2y = \pm x.$
17. $x = C y^2 + C^2$; szinguláris megoldás: $y^4 + 4x = 0.$
18. $(x - C y)^2 = 4y$; szinguláris megoldás: $y = 0.$
19. $(2y + x^2 + C)(2 \ln y + x^2 + C) = 0.$
20. $(y - C x)^2 = C^3$; szinguláris megoldás: $4x^3 = 27y.$
21. $(xy + C)^2 = 4x^3.$
22. $(xy + C)^2 = 4C x^2$; szinguláris megoldás: $y = x.$
23. $2y = C(x^2 + C^2).$

24. $y = C^2 + C x^2$; szinguláris megoldás: $4y + x^4 = 0$.
25. $(3C x + 2)^2 = 4C y^3$; szinguláris megoldás: $y^3 = 6x$.
26. $y = C(x + C)^2$; szinguláris megoldás: $4x^3 + 27y = 0$.
27. $(3y - C)^2 = 2C x^3$; szinguláris megoldás: $x^3 + 6y = 0$.
28. $y + C = \sqrt{x - x^2} + \arcsin \sqrt{x}$.
29. $x^{\frac{2}{3}} + (y + C)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.
30. $x = ap + b p^2$, $6y = C + 3a p^2 + 4b p^3$.
31. $x^2 + (y - C)^2 = a^2$.
32. $x + C = 2p + 3 p^2$, $y = p^2 + 2 p^3$; szinguláris megoldás: $y = 0$.
33. $x + C = \cos \varphi + \ln \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$, $y = \sin \varphi$; szinguláris megoldás: $y = 0$.
34. $y = (\sqrt{C + 2x} - 1) e^{\sqrt{C + 2x} - 1}$.
35. $2y + C = x^2 \pm [x \sqrt{x^2 + 1} + \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})]$.
36. $x = e^p + p$, $y = e^p(p - 1) + \frac{p^2}{2} + C$.
37. $x = \ln p - \frac{1}{p} + C$, $y = p + \ln p$.
38. $x = t + \arcsin t + C$, $y = \frac{a t^3}{1 + t^2}$.
39. $x = t^3 + t^2$, $y = \frac{3}{2} t^2 + 2t + C$.
40. $x = \frac{1}{t} - t^2$, $y = \frac{1}{t} - \frac{t^2}{2} + \frac{2t^5}{5} + C$.
41. $y = \frac{3 t^2}{1 + t^3}$, $x = -t + \ln \frac{1 + t}{\sqrt{1 - t + t^2}} + \arcsin \frac{2t - 1}{\sqrt{3}} + C$.
42. $y = p^2 e^p$, $x = e^p(p + 1) + C$. 43. $y = x - C - \frac{1}{x - C}$.
44. $y = a(1 + \cos 2\varphi)$, $x = a(-2\varphi - \sin 2\varphi) + C$.
45. $y = \frac{x^2}{2} + Cx + C^2$.
46. $x = \frac{C}{p^2} - \frac{2p}{3}$, $y = \frac{2C}{p} - \frac{p^2}{3}$; szinguláris megoldás: $y = 0$.
47. $y = C^2(x - C)^2$; szinguláris megoldások: $y = 0$, $y = \frac{x^4}{16}$.

48. $y = \frac{x^2}{4} + Cx + C^2$; szinguláris megoldás: $y = -\frac{x^2}{2}$.

49. $y = \frac{C + a \cdot \text{Arc sin } p}{\sqrt{1-p^2}} - ap, \quad x = p \cdot \frac{C + a \cdot \text{Arc sin } p}{\sqrt{1-p^2}}.$

50. $y = Cx + C - C^2$; szinguláris megoldás: $y = \frac{(x+1)^2}{4}.$



b) Geometriai feladatok

1. $xy = \frac{1}{2} a^2.$

2. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (112. ábra).

3. $(y - x - 2a)^2 = 8ax.$

4. $3axy = x^3 + 2a^3.$

112. ábra

2. §. Szinguláris megoldások. Burkoló görbék

1. $27y^2 + 4x^3 = 0.$

2. $(x+y)^2 + 2x - 2y + 1 = 0.$

3. $xy + a = 0.$

4. $y^2 = x^2 - 1.$

5. $y = \frac{1}{3} x^3 - x.$

6. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1.$

7. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$

8. $y = e^x.$

9. $y = \sin x.$

10. $y = \text{ch } x.$

3. §. Trajektóriák

a) Gyakorló feladatok

1. $x^2 + y^2 - 2C_1y = 0.$

2. $r = 2C_1 \sin \varphi.$

3. $y^3 - 3x^2y = C_1.$

4. $y^2 + 2x^2 = C_1.$

5. $x^2 + y^2 - 2a \ln |x| = C_1.$

6. $(x^2 + y^2)^2 = C_1 + 2a^2(x^2 - y^2).$

7. $y(3x^2 + y^2) = C_1(x^2 + y^2)^3.$

8. $x^{2b}(y^2 - b)^a = C_1(x^2 - a)^b y^{2a}.$

9. $y^2 + x^2 - 4x + \ln(x+1)^4 = C_1.$

10. $2y^2 + x^2(\ln x^2 - 1) = C_1.$

11. $x + a + 1 = C_1 e^{\frac{1}{2}y^2 + x}.$

12. $y = \text{ch } x + C_1.$

13. $\frac{x^2}{C_1} + y^2 = \frac{a^2}{C_1 - 1}.$

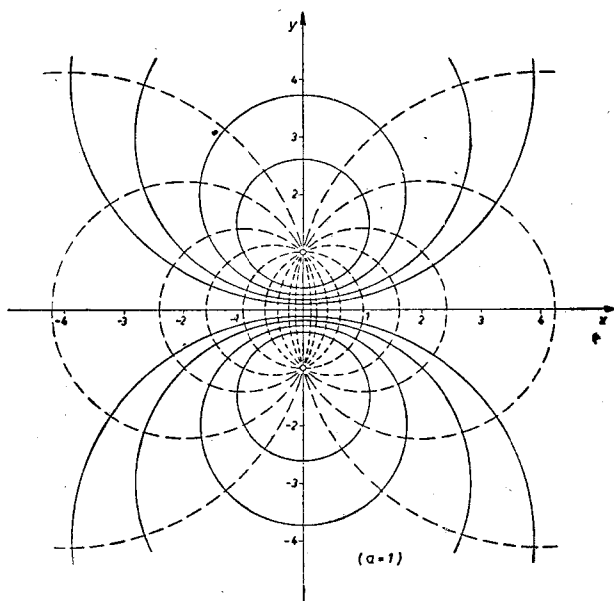
14. $r - \frac{1}{r} = C_1 - \varphi.$

15. $(r^2 - a^2) \cos \varphi + C_1 r = 0.$

16. $r^2 \left(\sin \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) = C_1.$

17. $r = C_1 \sqrt{\sin \varphi} \cdot \sin \frac{1}{2} \varphi.$

18. $x^2 + 2kxy - y^2 = C_1.$ Itt $k = \operatorname{tg} \omega.$



113. ábra

19. $x^2 + y^2 = 2 C_1 (x - k y).$ Itt $k = \operatorname{tg} \omega.$

20. $r^p = C_1 \cos (p \varphi + \omega).$

21. $y^2 - x^2 = C_1.$

22. $x^2 + y^2 = 2 \ln x + C_1.$

23. $r = C_1 (1 - \cos \varphi).$

24. $r = C_1 \sin (\varphi \pm \omega).$

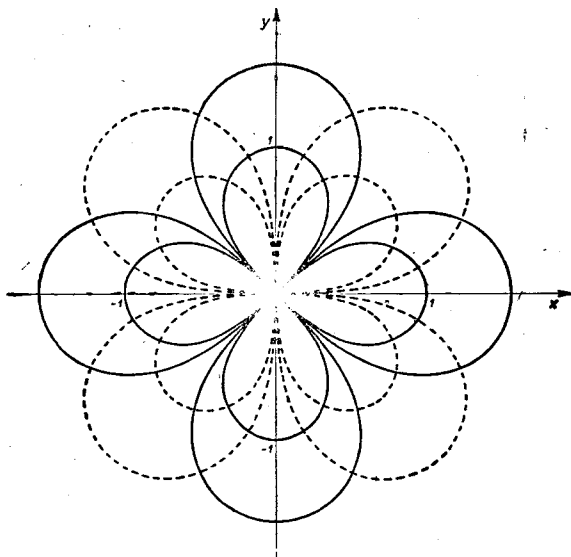
25. $-b x^2 + 2a xy + b y^2 = C_1.$ Ennek a görbeseregnek a görbái (egyenlő szárú hiperbolák serege) az eredeti görbékből úgy keletkeznek, hogy őket az origó körül $\frac{\pi}{4}$ szögnyire elforgatjuk.

26. $x^2 + y^2 - 2 C_1 y + a^2 = 0$ (113. ábra).

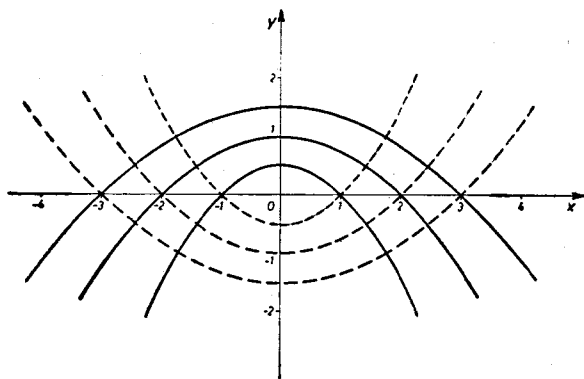
27. $y = C_1 - \frac{1}{3} (2x)^{\frac{3}{2}}.$

28. $y^3 = C_1 (y^2 - x^2).$

29. $(x^2 + y^2)^2 = C_1(x^2 - y^2)$. Ha a két görbesereg egyenletét átírjuk polárkoordinátákba, kapjuk a következő egyenleteket: $\sin 2\varphi = 2C r^2$, illetve: $r^2 =$



114. ábra



115. ábra

$= C_1 \cos 2\varphi$. Mindkét görbesereg lemniszkátákból áll. A második görbesereg egyes görbéit az elsőből nyerhetjük $\frac{\pi}{4}$ szögnyi elforgatással (114. ábra).

30. $x^2 = C_1(C_1 - 2y)$ (115. ábra).

b) Geometriai és fizikai feladatok

$$1. \quad x = \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}} \ln(p + \sqrt{1+p^2}) - C \frac{p}{\sqrt{1+p^2}},$$

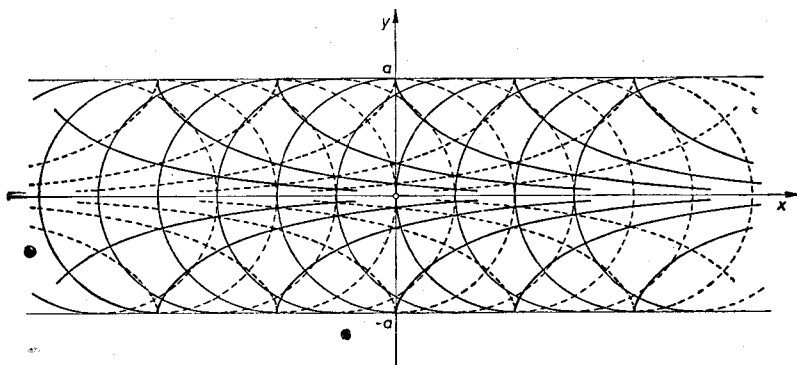
$$y = ap - \frac{a}{\sqrt{1+p^2}} \ln(p + \sqrt{1+p^2}) + C \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}.$$

$$2. \quad x = 2u \cos u + (u^2 - C) \sin u,$$

$$y = 2u \sin u - (u^2 - C) \cos u.$$

$$3. \quad x = 1 - \ln p + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \ln(p + \sqrt{1+p^2}) - \frac{Cp}{\sqrt{1+p^2}},$$

$$y = \frac{C}{\sqrt{1+p^2}} - \frac{\ln(p + \sqrt{1+p^2})}{\sqrt{1+p^2}}.$$



116. ábra

$$4. \quad x = a \operatorname{arcc} h \frac{a}{y} \pm \sqrt{a^2 - y^2} + C. \text{ (Traktrix) (l. 116. ábra),}$$

$$5. \quad 9p(y + C)^2 = 8x^3.$$

$$6. \quad (x^2 + y^2)^2 = C(y^2 + 2x^2).$$

$$7. \quad \text{A szintvonalak}$$

$$x(x^2 + y^2) = C^2(x^2 - y^2)$$

egyenletű sztrofoisok. Az esésvonalak pedig ezeknek ortogonális trajektóriái:

$$(x^2 + y^2)^3 = C_1 y(y^2 + 3x^2).$$

$$8. \quad \frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = C \text{ vagy } y = C_1 x. \text{ Tehát az áramvonalak origóból kiinduló fél-sugarak.}$$

$$9. \quad xy = C_1.$$

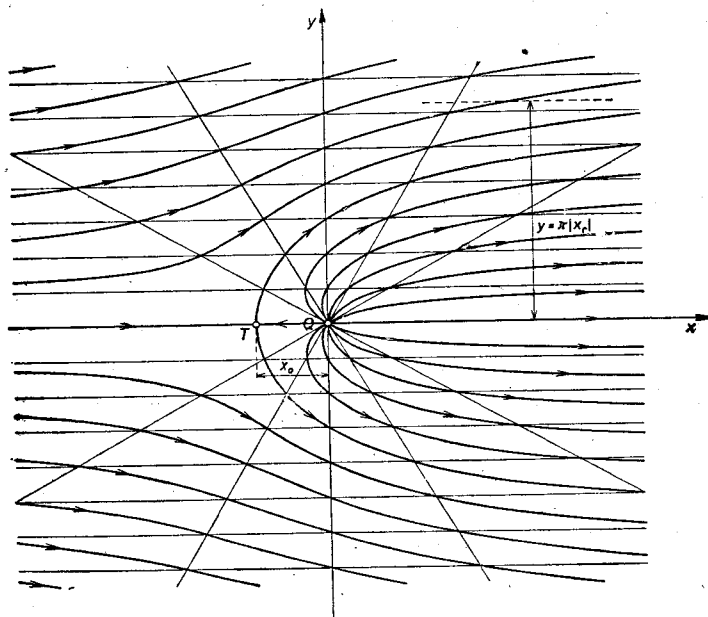
$$10. \quad \frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + c_0 y = C. \text{ Az áramlás úgy fogható fel, mint két egyszerű}$$

síkáramlás szuperpozíciója. Az egyik a c_0 sebességű, x tengellyel párhuzamos áramlás, melynek áramvonalai x tengellyel párhuzamos,

$$y = C_1$$

egyenletű egyenesek; a másik az origóban elhelyezett Q bőségű forrás által előidézett áramlás, melynek áramvonalai

$$y = C_2 x$$



117. ábra

egyenletű, origóból kiinduló félsugarak. Az eredő áramvonalakat szerkesztéssel úgy kapjuk, hogy a két áramlás áramvonalai által alkotott „elemi négyszögekbe” a sebességvektorok kezdőpontjából a végpontok felé átlókat húzunk (117. ábra).

Könnyen belátható, hogy az x tengely mentén kell egy olyan pontnak lennie, melyben a sebesség zérus, azaz a forrásból és a párhuzamos áramlásból származó sebesség egymással egyenlő nagyságú, de ellenkező értelmű. Ez a pont az ún. *torlópont*. A torlópont koordinátái:

$$x_0 = -\frac{Q}{2\pi c_0},$$

$$y_0 = 0.$$

A torlópontra átmenő áramvonal a síkot két részre osztja. Ennek az áramvonalnak a két ága között áramlik a forrásból eredő, kívül pedig a párhuzamos áramlással érkező folyadékmennyiség.

A torlóponton átmenő áramvonal — $x \rightarrow +\infty$ esetén — $y = \pi |x_0|$ egyenletű aszimptotájához tart.

$$11. \quad M \frac{y}{x^2 + y^2} = C. \text{ Vagy ha } k = \frac{M}{2C}, \text{ akkor}$$

$$x^2 + (y - k)^2 = k^2.$$

Ezek olyan körök, melyek keresztülmennek az origón, középpontjaik pedig rajta vannak az y tengelyen (118. ábra).

12. $c_0 y - M \frac{y}{x^2 + y^2} = C$. Az áramlás úgy fogható fel, mint két egyszerű sík-áramlás szuperpozíciója. Az egyik a c_0 sebességű, x tengellyel párhuzamos áramlás, melynek áramvonalai x tengellyel párhuzamos,

$$y = C_1$$

egyenletű egyenesek; a másik pedig az M momentumú dipólus által létesített áramlás, melynek áramvonalai az

$$x^2 + (y - C_2)^2 = C_2^2$$

egyenletű körök. Az eredő áramvonalakat szerkesztéssel úgy kapiuk, hogy a két áramlás áramvonalai által alkotott „elemi négyszögekbe” a sebességvektorok kezdőpontjából a végpontok felé átlókat húzunk (119. ábra).

Az x tengelyen van két olyan pont, melyekben a sebesség zérus. Ezek a torlópontok:

$$x = \pm \sqrt{\frac{M}{c_0}}, \quad y = 0.$$

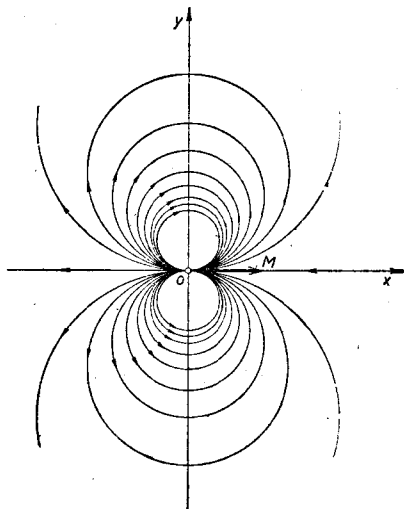
A $C = 0$ paraméterértékhez tartozó áramvonal az x tengely és egy origó köré

rajzolt $\left| \sqrt{\frac{M}{c_0}} \right|$ sugarú kör. Ez a kör a síkot két részre osztja: a kör belsejében áramlik dipólusból eredő, kívülre pedig a párhuzamos áramlással érkezett folyadékmennyiség.

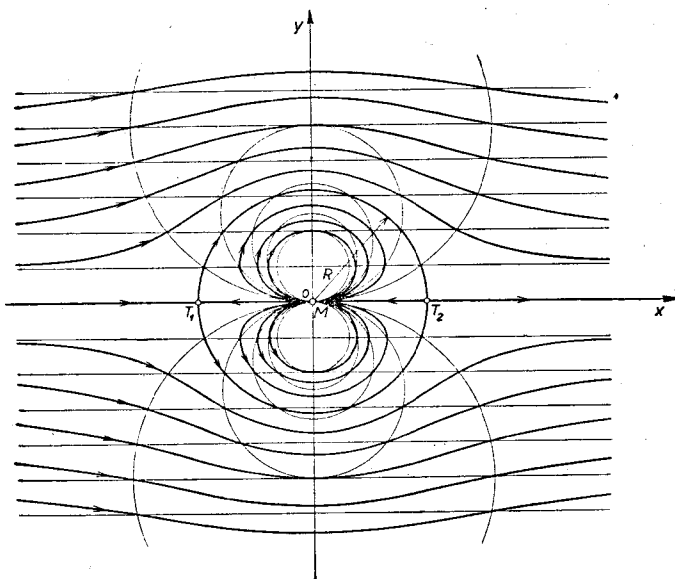
Az áramkép nem változik meg akkor, ha a $\left| \sqrt{\frac{M}{c_0}} \right|$ sugarú kör helyébe egy, az (x, y) síkra merőleges tengelyű, ugyanekkora sugarú, „végtelen hosszú” és a folyadék számára áthatolhatatlan, egyenes körhenger alakú testet helyezünk. Minthogy az áramlás szimmetrikus az x és y tengelyre, ezért az áramló folyadék nyomáseloszlása olyan, hogy az eredője zérus. Tehát a hengerre erő nem hat. (Súrlódásos folyadékokban természetesen a viszkozitások megváltoznak.)

13. Az áramvonalak egyenlete:

$$c_0 y - M \frac{y}{x^2 + y^2} + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2} = C.$$

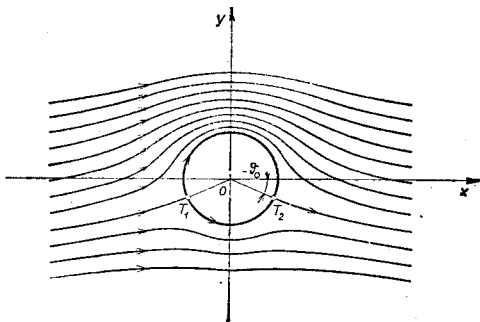


118. ábra



119. ábra

Az áramvonalak képét szerkesztéssel úgy kapjuk meg, hogy ha az előző feladat áramvonalai és a potenciális örvény áramvonalai (origó körül rajzolt koncentrikus körök) által alkotott „elemi négyszögekbe”, a sebességvektoroknak a szuperpozícióban szereplő két-két összetevője kezdőpontjából a végpontok felé átlókat húzunk (120. ábra).



120. ábra

Az előző feladatban is szereplő

$$x^2 + y^2 = \frac{M}{c_0}$$

egyenletű kör itt is áramvonal lesz. A gyakorlat szempontjából az áramvonal-képnek csak az a része érdekel bennünket, amelyik ezen a körön kívül van.

A torlópontok — az előző feladattól eltérően — nem az x tengelynek az $x^2 + y^2 = \frac{M}{c_0}$ egyenletű körön fekvő pontjaiban lesznek, hanem a c_0 , M és Γ állandóktól függetlenül eltolódnak.

Ha

$$\left| \frac{\Gamma}{4\pi \sqrt{M c_0}} \right| \leq 1,$$

akkor a torlópontok az

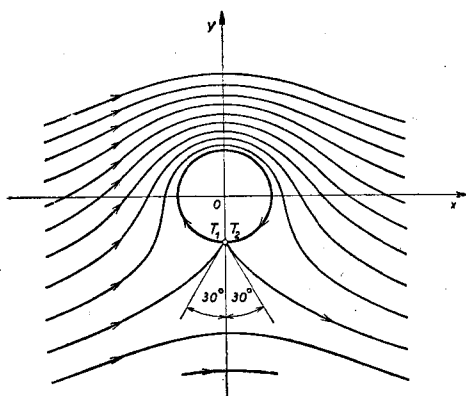
$$x^2 + y^2 = \frac{M}{c_0}$$

körön lesznek. Helyzetüket meghatározhatjuk, ha figyelembe vesszük, hogy a torlópontokban

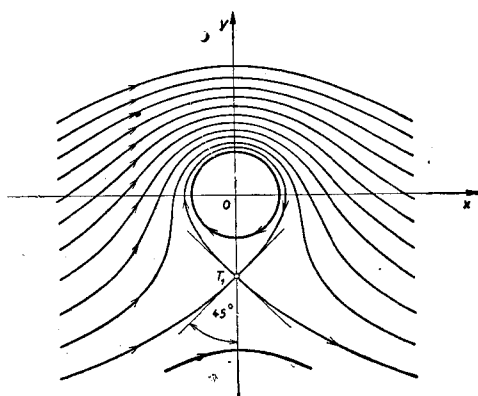
$$|\mathbf{v}| = 0.$$

Ha ebben az egyenletben polárkoordinátákat vezetünk be és r helyébe a $\sqrt{\frac{M}{c_0}}$ értéket írjuk, azt kapjuk, hogy

$$\sin \varphi = -\frac{\Gamma}{4\pi \sqrt{M c_0}}.$$



121. ábra



122. ábra

Ha itt a jobb oldal abszolút értéke 1-nél kisebb, akkor φ -re két érték adódik ($\pi < \varphi < 2\pi$). Ha pedig

$$\frac{\Gamma}{4\pi \sqrt{M c_0}} = 1 \quad (121. \text{ ábra}),$$

akkor $\varphi = -\frac{\pi}{2}.$

Ha

$$\left| \frac{\Gamma}{4\pi \sqrt{M c_0}} \right| > 1 \quad (122. \text{ ábra}),$$

akkor az egyik torlópont az y tengelyen lesz, a $\left| \sqrt{\frac{M}{c_0}} \right|$ sugarú körön kívül.

Az áramvonalkép az y tengelyre szimmetrikus, az x tengelyre viszont nem. Éppen ezért az y irányú nyomáskülönbségből egy $+y$ irányban ható felhajtó erő ébred, mely a $\left| \sqrt{\frac{M}{c_0}} \right|$ sugarú, végtelen hosszú körhengerre hat.

Az áramkép független a koordináta-rendszer megválasztásától, épp ezért ugyanilyen viszonyok adódnak akkor, ha a $c_0 =$ állandó sebesség az x tengellyel pl. α szöget zár be. Ez esetben nem kell mást tennünk, mint a koordináta-rendszert úgy elforgatnunk, hogy a c_0 sebesség az x tengellyel párhuzamos legyen.

III. SPECIÁLIS TÍPUSÚ MÁSODRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

1. §. Hiányos másodrendű differenciálegyenletek

a) Gyakorló
feladatok

$$1. \quad y = x \operatorname{Arc} \sin x + \sqrt{1-x^2} + C_1 x + C_2.$$

$$2. \quad y = \frac{\ln^2 x}{2} + C_1 x + C_2.$$

$$3. \quad y = \ln C_2 \frac{x}{1+x} + C_1 x.$$

$$4. \quad y = C_2 + C_1 x - \frac{2}{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}.$$

$$5. \quad y = \ln C_2 (x \pm \sqrt{x^2 + 4x + 3}) + C_1 x.$$

$$6. \quad y = C_2 - \frac{1}{C_1} \cos C_1 x.$$

$$7. \quad y = C_1 (\operatorname{Arc} \sin x + x \sqrt{1-x^2}) + C_2.$$

$$8. \quad y = C_1 \sqrt{x + C_2}.$$

$$9. \quad y = \frac{1}{3} x^3 + C_1 e^x + C_2.$$

$$10. \quad y = x e^x + C_1 e^x - e^x + C_2.$$

$$11. \quad y = \frac{1}{3} e^x + C_1 e^{-2x} + C_2.$$

$$12. \quad y = -\cos x - x \sin x + C_1 x^2 + C_2.$$

$$13. \quad y = \ln x + C_1 x^3 + C_2.$$

$$14. \quad y = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C_1 x (\ln x - 1) + C_2.$$

$$15. \quad y = e^{-x} (C_1 - x) + C_2.$$

$$16. \quad y = \frac{x^4}{8} + C_1 x^2 + C_2.$$

$$17. \quad C_1 y^2 = 1 + (C_1 x + C_2)^2.$$

$$18. \quad (y + C_2)^2 = 4(x + C_1).$$

$$19. \quad y = C_1 \operatorname{ch} (C_1 x - C_2).$$

$$20. \quad (x - C_1)^2 + y^2 = C_2.$$

$$21. \quad y = \operatorname{sh} (C_1 x - C_2).$$

$$22. \quad y = C; \quad \ln y = \frac{x + C_1}{x + C_2}.$$

$$23. \quad 12y = (x - C_1)^3 + C_2.$$

$$24. \quad (x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = 1.$$

25. $y(C_2 + x) = C_1 + x.$ 26. $x = 4p^3 - 3p^2 + C_1,$
 $y = 3p^4 - 2p^3 + C_2.$
27. $x = -\frac{1}{2} \ln(p-2) + \frac{1}{2} \ln p - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} p + C_1,$
 $y = -\ln(p-2) - \ln(p^2+1) + C_2.$
28. $y = C_1 + 3 \operatorname{Arc} \sin \left(C_2 e^{\frac{x}{3}} \right).$ 29. $\ln y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$
30. $y = \ln |C_1 e^x + C_2 e^{-x}|.$ 31. $x = C_1 e^y + C_2 e^{-y} + a.$
32. $y = (C_1 + C_2 x)^2.$ 33. $y + C_1 \ln |y| + C_2 = x.$
34. $y^2 = C_1 \cos 2ax + C_2 \sin 2ax.$ 35. $y = \frac{C_1 + x}{C_2 + x}.$
36. $x = C_1 \sin(y + C_2).$ 37. $y(C_1 x + C_2) = 1.$
38. $x = C_1 \ln y - \frac{1}{4} y^2 + C_2.$ 39. $y = \ln(C_1 + x^2) + C_2.$
40. $3x = 2(\sqrt{y-2C_1})\sqrt{\sqrt{y+C_1}+C_2} + C_2.$

b) Geometriai és
fizikai feladatok

1. $y = C_2 \operatorname{ch} \frac{x-C_1}{C_2}; \quad (x-C_1)^2 + y^2 = C_2^2.$
2. $y - C_2 = \frac{(x-C_1)^2}{4C_2}.$ 3. $\cos \left| \frac{\sqrt{a^2 v_0^2 - k^2}}{a v_0} \varphi \right| = a.$
4. $x = a \cos kt.$ (Lásd a 9. kidolgozott példát.)
5. $\varphi = \varphi_0 \cos \left| \sqrt{\frac{GI_p}{lI_m}} t \right|.$ (Lásd a 9. kidolgozott példát.)
6. $y_{\max} = \frac{p l^4}{8 IE}.$ A rúd szabad végén.
7. $y_{\max} = \frac{M l^2}{2 IE}.$ A rúd szabad végén.
8. $y_{\max} = \frac{5p l^4}{384 IE}.$ A rúd közepén.
9. $y_{\max} = \frac{P l^3}{48 IE}.$ A rúd közepén.
10. $y_{\max} = \frac{P a^2 b^2}{3 IE l}.$ A koncentrált erő helyén.
11. $x = \sqrt{2kt + a^2}.$
12. $x = \sqrt{a^2 - 2kt},$ ha $2kt < a^2;$ $x = -\sqrt{2kt - a^2},$ ha $2kt > a^2.$
13. $x = \sqrt{\frac{a^4 + (2kt + a^2)^2}{2a^2}}.$ 14. $x = \sqrt{\frac{a^4 + (a^2 - 2kt)^2}{2a^2}}.$

$$15. \quad h_{\max} = \frac{1}{k} \left| v_0 - \frac{g}{k} \ln \frac{k v_0 + g}{g} \right|; \quad t = \frac{1}{k} \ln \frac{g + k v_0}{g}.$$

$$16. \quad v_0 \sqrt{\frac{m g}{m g + k v_0^2}}.$$

$$17. \quad x = \frac{m v_0 \cos \alpha}{k} \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right),$$

$$y = \frac{m}{k^2} (k v_0 \sin \alpha + m g) \left(1 - e^{-\frac{kt}{m}} \right) - \frac{m g t}{k}.$$

$$18. \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{k y^2}{m v_0^2} = 1.$$

$$19. \quad r = \frac{2a}{1 + \cos \varphi}.$$

$$20. \quad r = a.$$

2. §. Hiányosra visszavezethető másodrendű differenciálegyenletek

a) Lineáris
differenciál-
egyenletek

$$1. \quad y = C_1 x + C_2 \ln x + \frac{x^2}{2} (\ln x - 2).$$

$$2. \quad y = C_1 e^x + C_2 (1 + x) + e^x \left(\frac{x^2}{2} - 1 \right).$$

$$3. \quad xy = C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

$$4. \quad y = C_1 \sin x + C_2 \sin x \cdot \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x \left(\ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right)^2.$$

$$5. \quad y = C_1 e^x + C_2 (x^2 + 2).$$

$$6. \quad y = C_1 x^2 + C_2 e^x + 2 x^3.$$

$$7. \quad y = C_1 \sin x + C_2 \sin^2 x.$$

$$8. \quad y = C_1 x^2 + C_2 \ln x + x.$$

$$9. \quad y = C_1 x + C_2 \sin x + \cos x.$$

$$10. \quad y = C_1 \operatorname{tg} x + C_2 \operatorname{ctg} x.$$

b) Homogén
„dimenziójú”
differenciál-
egyenletek

$$1. \quad y = C_1 x^2 + \frac{C_2}{x}.$$

$$2. \quad y = C_1 x + \frac{C_2}{x}.$$

$$3. \quad y = C_1 x + C_2 x^2 - x \ln x.$$

$$4. \quad \ln y = x \ln x + C_1 x + C_2.$$

$$5. \quad y = x \left(C_1 - \operatorname{Arc} \sin \frac{C_2}{x} \right).$$

IV. ÁLLANDÓ EGYÜTTTHATÓJÚ ÉS ILYENRE VISSZAVEZETHETŐ LINEÁRIS DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

a) Gyakorló
feladatok

1. $y = \frac{1}{6} x e^{2x} - \frac{1}{24} e^{-2x} + C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-x}.$
2. $y = \frac{3}{17} x^2 + \frac{24}{289} x - \frac{312}{4913} + C_1 e^{\frac{x}{2}} \cos 2x + C_2 e^{\frac{x}{2}} \sin 2x.$
3. $y = \frac{1}{24} x^4 e^{-x} + (C_1 + C_2 x + C_3 x^2) e^{-x}.$
4. $y = 3 + e^{3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$
5. $y = 2 + e^{2x} (C_1 \cos \sqrt{3} x + C_2 \sin \sqrt{3} x).$
6. $y = -\frac{2}{3} x + \frac{1}{9} + C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x}.$
7. $y = \frac{1}{9} x^2 - \frac{2}{81} + C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$
8. $y = x^2 + x + 1 + C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x}.$
9. $y = \frac{1}{3} x e^{2x} + C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}.$
10. $y = \frac{1}{2} e^{3x} + C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$
11. $y = 3 x^2 e^x + C_1 e^x + C_2 x e^x.$
12. $y = -\frac{1}{3} \cos 3x + C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}.$
13. $y = 2 \sin x - \cos x + e^{-3x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$
14. $y = -x \cos \frac{x}{2} + C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2}.$
15. $y = \left(x + \frac{3}{2} \right) e^x + C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$
16. $y = -\frac{1}{10} x \cos x + \frac{2}{5} x \sin x - \frac{1}{50} \cos x - \frac{13}{50} \sin x + e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$

$$17. \quad y = \frac{1}{4} x^4 e^{3x} + C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}.$$

$$18. \quad y = -\frac{3}{104} e^{\frac{x}{3}} \cos \frac{x}{2} + \frac{1}{52} e^{\frac{x}{3}} \sin \frac{x}{2} + C_1 e^{-\frac{x}{3}} \cos \frac{x}{2} + C_2 e^{-\frac{x}{3}} \sin \frac{x}{2}.$$

$$19. \quad y = \frac{x^2}{8} e^{-x} \sin 2x + \frac{x}{16} e^{-x} \cos 2x + e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

$$20. \quad y = e^x + C_1 e^{-x} + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x.$$

$$21. \quad y = x^5 + C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x \cos x + C_4 x \sin x.$$

$$22. \quad y = C_1 e^x + C_2 e^x \cos x + C_3 e^x \sin x.$$

$$23. \quad y = \frac{3}{5} x + C_1 + (C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x) e^x.$$

$$24. \quad y = \frac{x^3}{48} + C_1 + C_2 x + (C_3 + C_4 x) e^{4x}.$$

$$25. \quad y = \frac{1}{4} x \operatorname{ch} x + C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

$$26. \quad y = -x^2 + C_1 x^3 + C_2 x.$$

$$27. \quad y = \frac{2}{5} \cos \ln x + \frac{1}{5} \sin \ln x + C_1 \frac{\cos \ln x^2}{x} + C_2 \frac{\sin \ln x^2}{x}.$$

$$28. \quad y = \frac{1}{2} x^3 + C_1 x + C_2 x^2.$$

$$29. \quad y = \frac{1}{20} x \ln x - \frac{x}{50} + C_1 \frac{\cos \ln x^2}{x^3} + C_2 \frac{\sin \ln x^2}{x^3}.$$

$$30. \quad y = \frac{1}{4} \ln^2 x - \frac{1}{8} + C_1 \cos \ln x^2 + C_2 \sin \ln x^2.$$

$$31. \quad y = \frac{x^2}{8} + C_1 \ln^2 x + C_2 \ln x + C_3.$$

$$32. \quad y = -\frac{1}{4x} + C_1 x + C_2 \cos \ln x + C_3 \sin \ln x.$$

$$33. \quad y = -\frac{3}{8} \ln^2 x + C_1 + C_2 x^2 + \frac{C_3}{x^2}. \quad 34. \quad y = \frac{3}{5} x^3 \ln x + C_1 x^3 + \frac{C_2}{x^2}.$$

$$35. \quad y = \frac{x}{12} \ln^4 x + C_1 x + C_2 x \ln x. \quad 36. \quad y = \frac{\cos x}{x^2} + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2}.$$

$$37. \quad y = \frac{1}{3x^2} (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2x} \operatorname{Arc} \sin x + \frac{1}{2} \sqrt{1 - x^2} + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2}.$$

$$38. \quad y = -\frac{3}{4}\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2x}\right) \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C_1 x + \frac{C_2}{x}.$$

$$39. \quad y = \frac{x}{5} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{5} - \frac{2}{5x} + \frac{2}{5\sqrt{x^3}} \operatorname{Arc} \operatorname{tg} \sqrt{x} + C_1 x + \frac{C_2}{\sqrt{x^3}}.$$

$$40. \quad y = C_1 x + C_2 \sqrt{x} - \frac{1}{2} \sqrt{x} \ln x.$$

b) Fizikai
feladatok

1. $T = 0,203$. Az amplitudó felére csökken $0,693$ sec alatt.

$$2. \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 0,693 \frac{dx}{dt} + 2\,467\,000 x = 0. \quad 3. \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{2l}{3g}}.$$

$$4. \quad k = 2\pi^2 n^2 m R^2.$$

$$5. \quad m = \frac{b^2}{4c}.$$

6. A megoldandó differenciálegyenlet:

$$\frac{P}{g} \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{6EI}{l^3} y + P.$$

Ennek az általános megoldása:

$$y = \frac{P l^3}{6EI} + A \sin\left(\sqrt{\frac{6EIg}{Pl^3}} t + \varphi\right),$$

ahol A és φ az integrálási állandók.

A másodpercenkénti rezgésszám:

$$n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{6EIg}{Pl^3}}.$$

$$7. \quad \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}; \quad R^2 C < 4L. \quad 8. \quad y = \frac{a}{24} x^2 (l-x)^2.$$

IRODALOMJEGYZÉK

1. V. V. Sztyepanov: A differenciálegyenletek tankönyve. (Tankönyvkiadó, Budapest, 1952.)
2. I. G. Petrovszkij: Előadások a közönséges differenciálegyenletek elméletéről (Akadémiai Kiadó, Budapest, 1951.)
3. E. Kamke: Differentialgleichungen reeller Funktionen. (Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1952.)
4. E. Kamke: Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, Band 1. (Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1951.)
5. A. R. Forsyth—W. Jacobsthal: Lehrbuch der Differentialgleichungen. (Vieweg, Braunschweig, 1912.)
6. E. L. Ince: Integration of ordinary differential equations. (Oliver and Boyd, Edinburgh and London, 1952.)
7. H. B. Phillips: Differential equations. (New York, John Wiley & Sons, 1951.)
8. Sárközy Pál: A differenciálegyenletek elméletének elemei. (Pannonhalmi, 1932.)
9. K. H. Weise: Gewöhnliche Differentialgleichungen. (Wolfenbütteler Verlagsanstalt, 1948.)
10. M. Lindow: Gewöhnliche Differentialgleichungen. (Teubner, Leipzig, 1951.)
11. Egerváry Jenő: Differenciálegyenletek. (Mérnöki Továbbképző Intézet, Budapest, 1945.)
12. D. Leib: Applications du calcul différentiel et intégral. (Paris, A. Blanchard, 1930.)
13. R. Rothe: Höhere Mathematik. III., IV. 5/6. (Teubner, Leipzig, 1954.)
14. N. M. Gjunter—R. O. Kuzmin: Felsőbb matematikai példatár. II. (Tankönyvkiadó, Budapest, 1951.)
15. B. Baule: Die Mathematik des Naturforschers und Ingenieurs. Band IV. Gewöhnliche Differentialgleichungen. (Hirzel, Leipzig, 1951.)
16. Hort—Thoma: Die Differentialgleichungen der Technik und Physik. (J. A. Barth, Leipzig, 1950.)
17. A. F. Bermant: Matematikai analízis. II. (Tankönyvkiadó, Budapest, 1951.)
18. Stachó Tibor: Felsőbb mennyiségtan. (Budapest, 1944.)
19. R. Courant: Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung. II. (Springer, Berlin, 1931.)
20. v. Mangoldt—Knopp: Einführung in die höhere Mathematik. Dritter Band. (Hirzel, Leipzig, 1954.)
21. I. N. Bronstein—K. A. Szemengyajev: Matematikai zsebkönyv. (Művelt Nép, Budapest, 1955.)
22. Rados Gusztáv: Analízis és geometria, II. folyam. (Franklin, Budapest, 1920.)
23. Grosschmid Lajos: Mennyiségtani előadások. (Budapest, 1939.)