

Rhéologie des matériaux

Hypothèses des petites perturbations
(HPP)

Comportement élastique,

la loi de Hooke :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{(1+\nu)} \left[\boldsymbol{\epsilon} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} (\text{tr } \boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{1} \right], \quad \sigma_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)} \left[\epsilon_{ij} + \frac{\nu}{(1-2\nu)} (\epsilon_{kk}) \delta_{ij} \right],$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\boldsymbol{\sigma} - \nu (\text{tr } \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1}]. \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu (\sigma_{kk}) \delta_{ij}].$$

$$\epsilon = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\boldsymbol{\sigma} - \nu (\text{tr } \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1}]. \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma_{ij} - \nu (\sigma_{kk}) \delta_{ij}].$$

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{11} - \nu (\sigma_{22} + \sigma_{33}) \right],$$

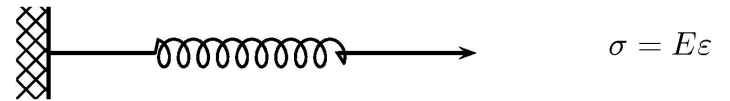
$$\epsilon_{22} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{22} - \nu (\sigma_{11} + \sigma_{33}) \right],$$

$$\epsilon_{33} = \frac{1}{E} \left[\sigma_{33} - \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \right],$$

$$\epsilon_{12} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{12},$$

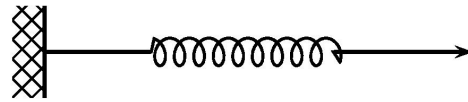
$$\epsilon_{13} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{13},$$

$$\epsilon_{23} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{23}.$$



*Essai de traction
exp*

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\sigma = E\varepsilon$$

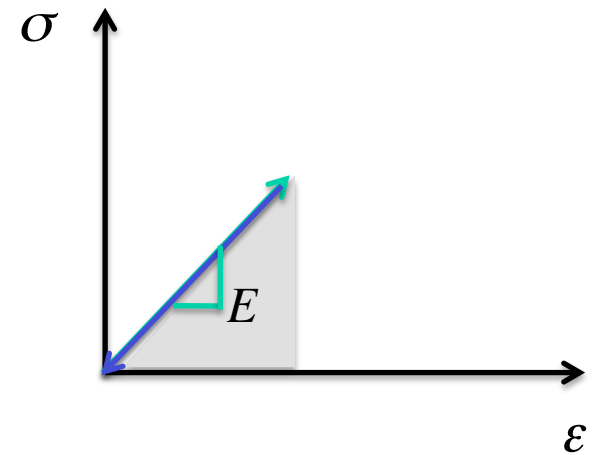
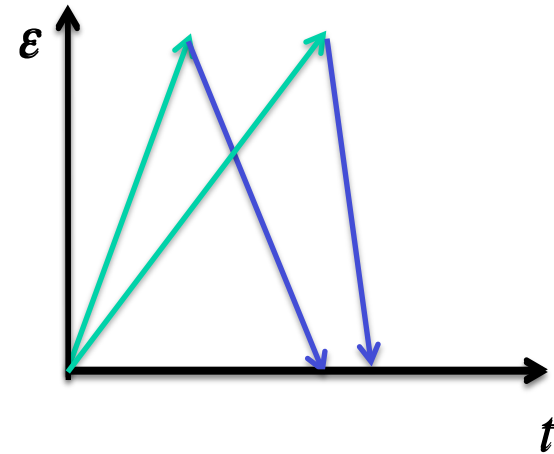
$$\varepsilon_{ing} = \frac{l - l_0}{l_0} \quad \varepsilon_v = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right)$$

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

HPP : Hypothèse de Petites Perturbations

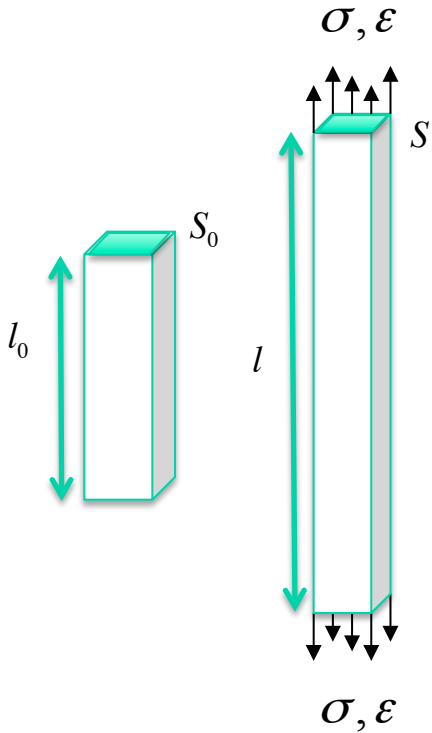
$$\sigma \approx \frac{F}{S_0} \quad \varepsilon_v \approx 1 + \varepsilon_{ing}$$

$$\sigma = E\varepsilon$$



$W_{elas} = \text{énergie restituée}$

$$W = \int \sigma d\varepsilon$$

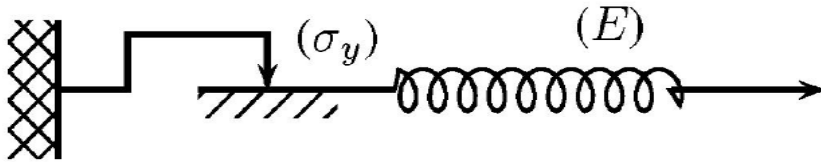


	μ	κ	E	ν
μ, E		$\frac{\mu E}{3(3\mu - E)}$		$\frac{E - 2\mu}{2\mu}$
μ, ν		$\frac{2\mu(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)}$	$2\mu(1 + \nu)$	
μ, κ			$\frac{9\kappa\mu}{3\kappa + \mu}$	$\frac{1}{2} \left[\frac{3\kappa - 2\mu}{3\kappa + \mu} \right]$
E, ν	$\frac{E}{2(1 + \nu)}$	$\frac{E}{3(1 - 2\nu)}$		
E, κ	$\frac{3E\kappa}{9\kappa - E}$			$\frac{1}{2} \left[\frac{3\kappa - E}{3\kappa} \right]$
ν, κ	$\frac{3\kappa(1 - 2\nu)}{2(1 + \nu)}$		$3\kappa(1 - 2\nu)$	

$$\sigma = \mathbb{C}\epsilon = 2\mu\epsilon + \lambda(\text{tr}\epsilon)\mathbf{1},$$

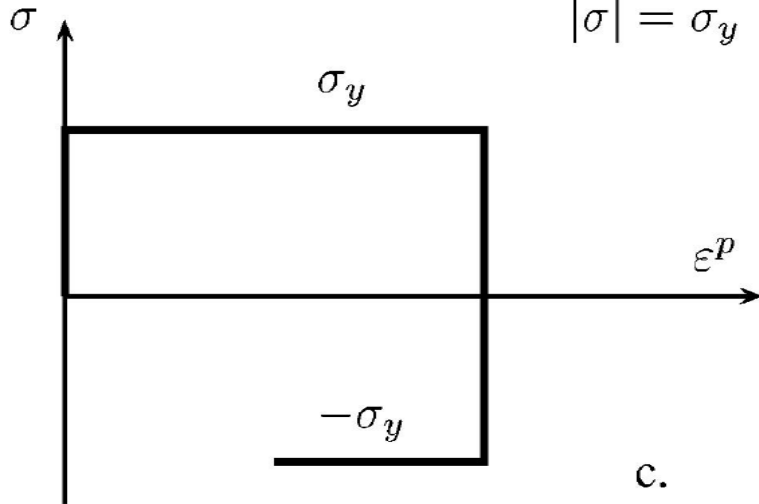
Plasticité Parfaite indépendance du temps

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$$

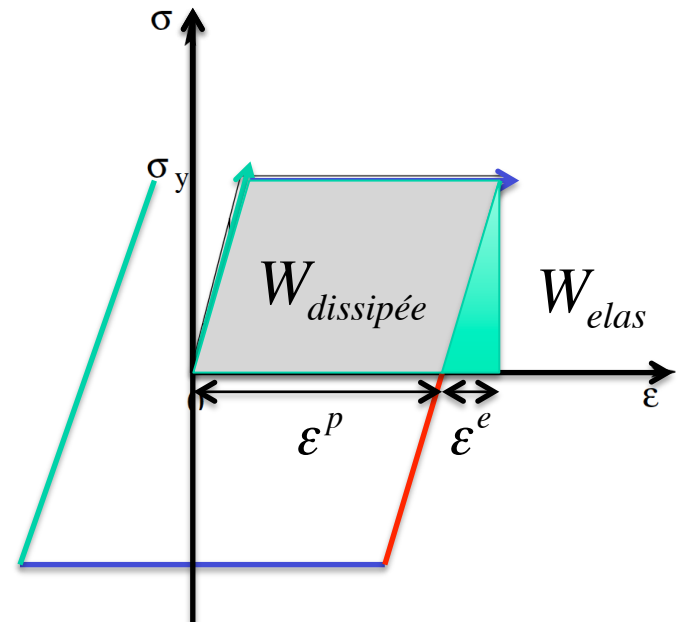
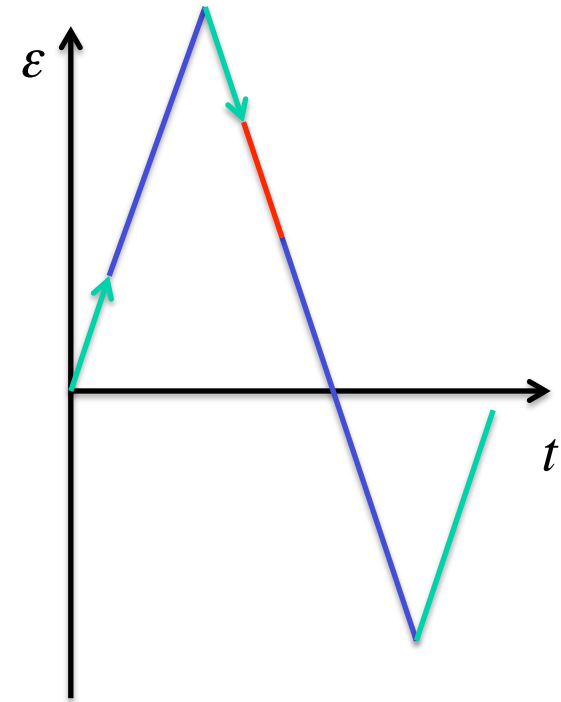


a.

$$|\sigma| = \sigma_y$$



c.



- Le comportement de nombreux matériaux subissant des « petites » déformations sont raisonnablement bien décrits par une relation linéaire élastique entre les contraintes-déformations .

$$\sigma(t) = E\epsilon(t), \quad \epsilon(t) = J\sigma(t), \quad J \stackrel{\text{def}}{=} 1/E$$

Où E est le module de Young, J est la complaisance élastique et t le temps. Cependant **pour un matériau élastique, la déformation et la contrainte sont indépendants du temps**, indépendants de la vitesse.

- Par oppositon, le comportement liquide visqueux linéaire obéit à la loi d'équation constitutive :

$$\sigma(t) = \eta \dot{\epsilon}(t)$$

Où η est la viscosité (habituellement défini en cisaillement, mais ici on l'a définit en traction) et pour les fluides la contrainte est linéaire avec le taux de déformation..



$$\sigma = \eta \dot{\epsilon}$$



$$\sigma = \eta \dot{\epsilon}^{1/N}$$

- *En réalité les équations constitutives pour la plupart des matériaux solides diffèrent du comportement élastique linéaire :*
- *Lorsque le matériau a un comportement à la fois élastique et visqueux : on parle alors de **visco-élasticité***

Exp silly putty

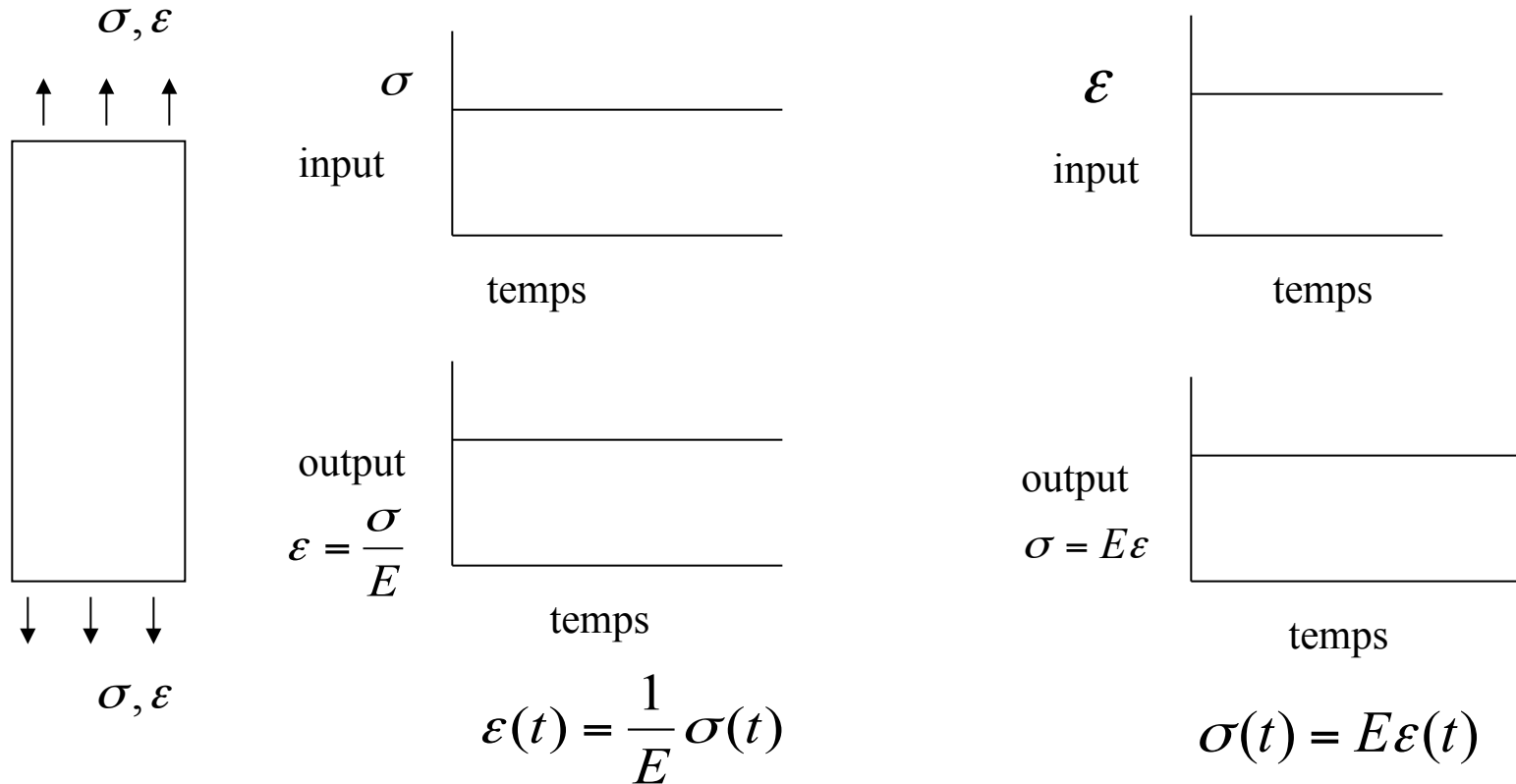
- *Lorsqu'une structure élastique est déformée, la déformation de charge/décharge est instantanée et réversible. Lorsque la charge est retirée, on retrouve l'état initial instantanément et sans déformation permanente.*
 - *Exemples : métaux soumis à des petites déformations et élastomères*
- *Les structures viscoélastiques ne permettent pas une telle réponse (excepté à très basse température)*

Exp silly putty + silicone

Comportement Visco-élastique,

(Réponse mécanique des Polymères)

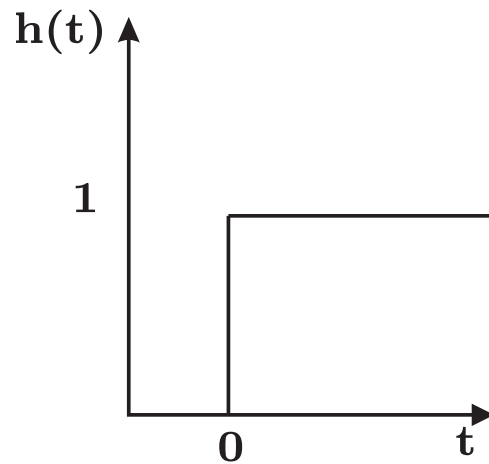
- Rappel du comportement mécanique d'un **matériau élastique linéaire** en traction uniaxiale.



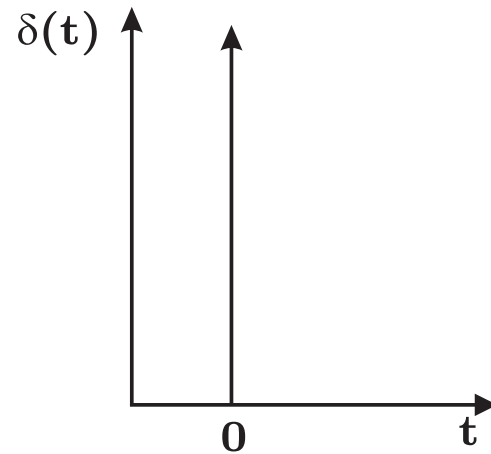
➤ Lorsqu'une structure élastique est déformée, la **déformation de charge/décharge est instantanée et réversible**. Lorsque la charge est retirée, on retrouve l'état initial instantanément et sans déformation permanente.

➤ Exemples : métaux soumis à des petites déformations et élastomères

Comportement viscoélastique linéaire



(a)



(b)

Figure: (a) *Fonction d'Heaviside* (b) *Fonction Dirac*

$$\delta(t) \stackrel{\text{def}}{=} \dot{\overline{h(t)}}$$

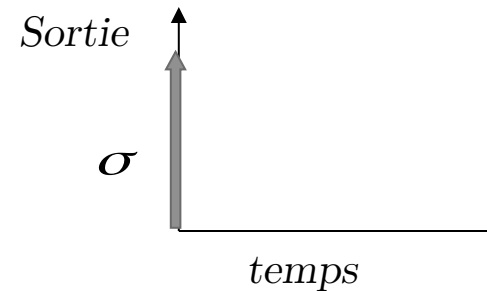
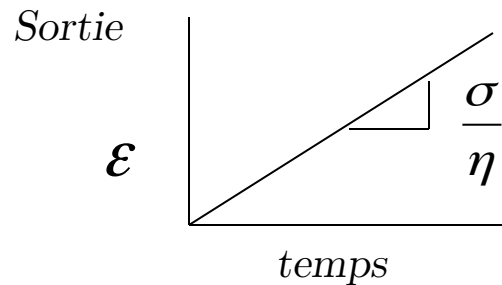
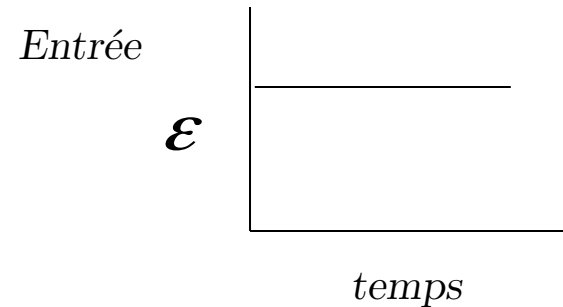
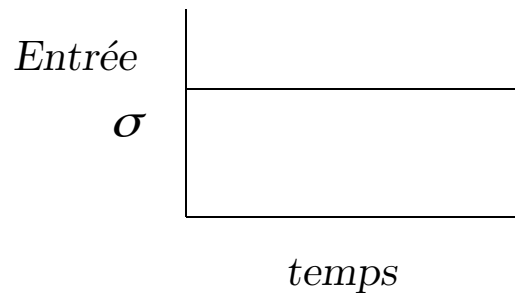
Comportement viscoélastique linéaire, la réponse est dépendante du temps.

Réponse visco-élastique linéaire :

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{1}{\eta} \sigma(t)$$

ou

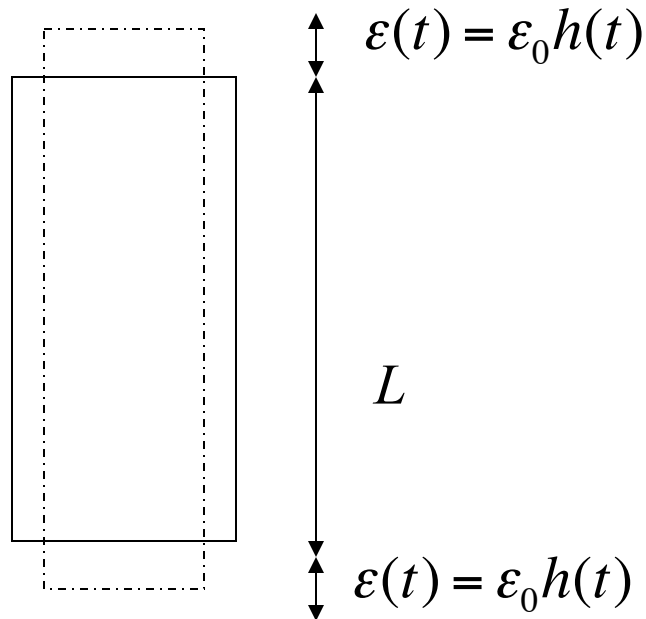
$$\sigma(t) = \eta \dot{\varepsilon}(t)$$



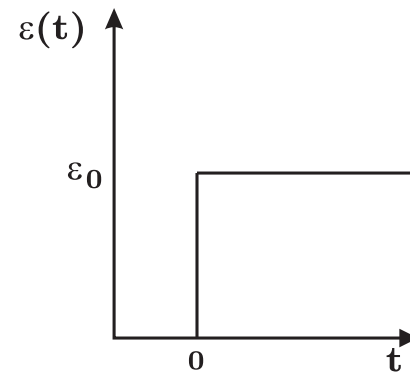
Deux tests standards pour observer le comportement visco-élastique linéaire :

- Test de relaxation des contraintes
- Test de fluage

Test de Relaxation des contraintes



Application d'un déplacement uniaxiale

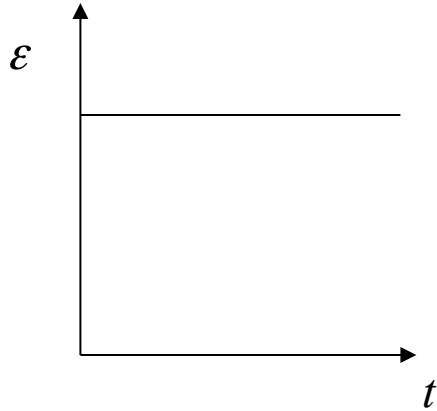


$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 h(t)$$

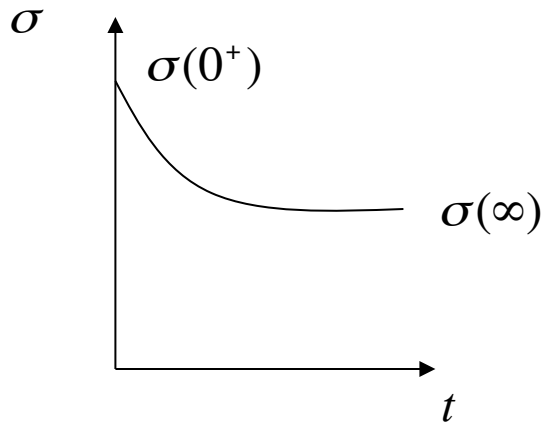
Observons l'évolution des contraintes en fonction du temps.

Relaxation des contraintes

input: $\varepsilon(t) = \varepsilon_o h(t)$

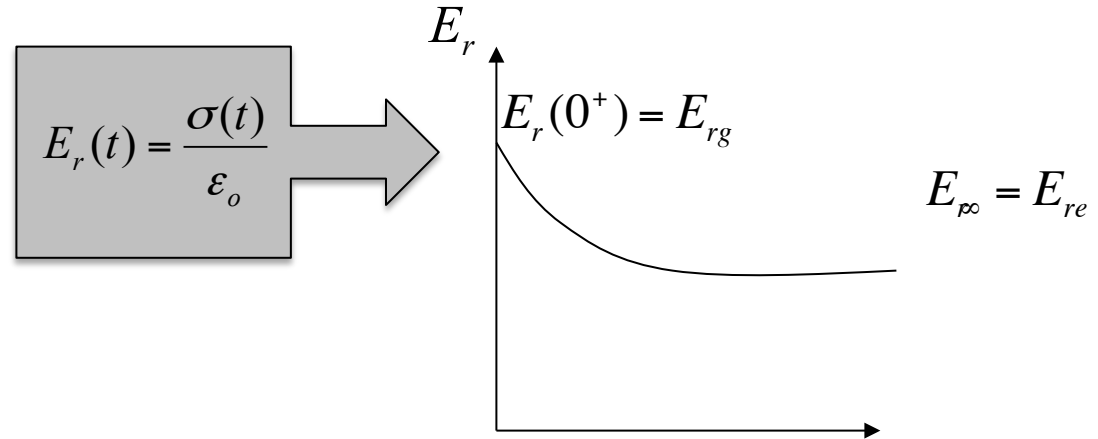


output: $\sigma(t)$:



Module de relaxation :

Définition :



- La valeur au temps court de cette fonction est appelée la valeur ‘vitreuse’ :

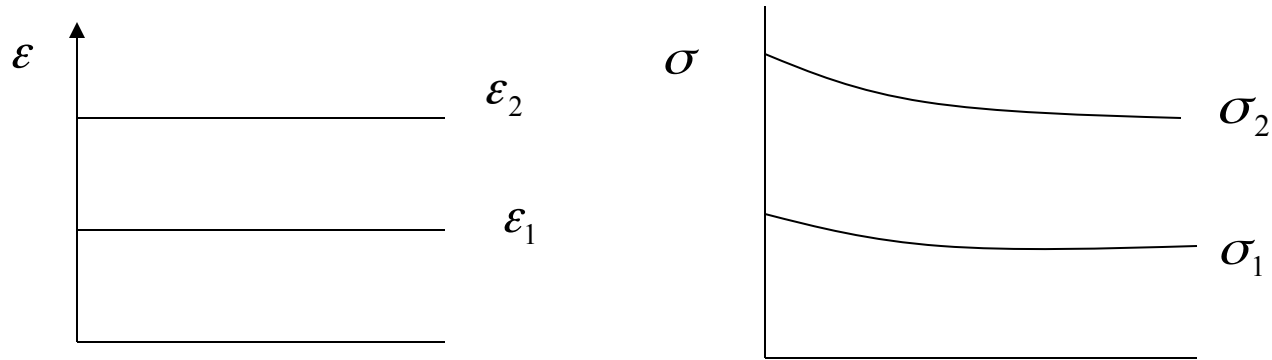
$$E_r(0^+) \equiv E_{rg}.$$

- La valeur au temps long de cette fonction est appelée la valeur à ‘l’équilibre’ :

$$E_r(\infty) \equiv E_{re}.$$

$E_r(t)$ est une propriété du matériau

➤ Ne dépend pas du niveau de contraintes ou de déformations



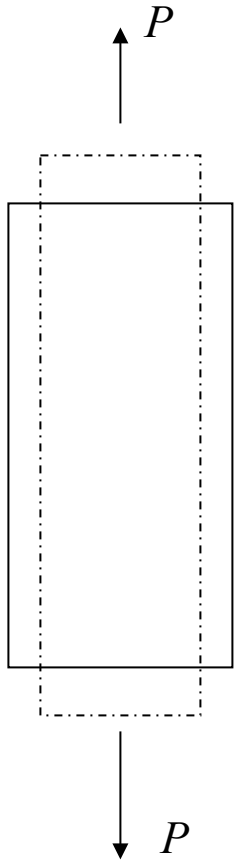
i.e. les deux tests (ε_1) et (ε_2) donne le même $E_r(t)$

$$E_r(t) = \frac{\sigma_1(t)}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma_2(t)}{\varepsilon_2}$$

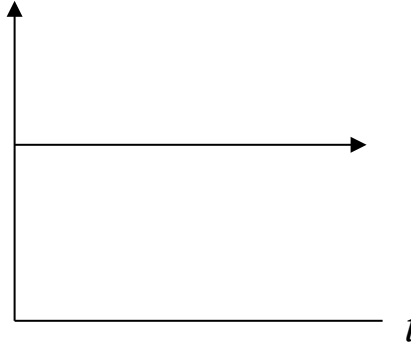
Test de fluage

- Application d'une charge constante avec le temps

$$P(t) = P \Rightarrow \sigma(t) = \frac{P}{S}$$



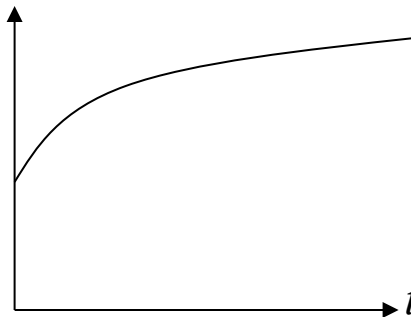
input: σ



$$\sigma(t) = \sigma_0 h(t)$$

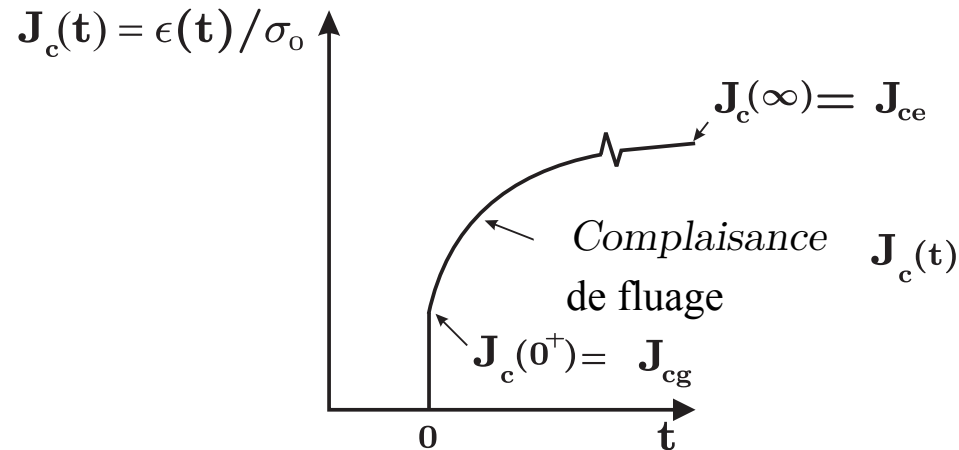
- Observons la déformation en fonction du temps

output: ε



Complaisance de fluage:

$$J_c(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\epsilon(t)}{\sigma_0},$$



- La valeur au temps court de cette fonction est appelée la valeur 'vitreuse' :

$$J_c(0^+) \equiv J_{cg}$$

- La valeur au temps long de cette fonction est appelée la valeur à 'l'équilibre' :

$$J_c(\infty) \equiv J_{ce}$$

La complaisance de fluage $J_c(t)$ et le module de relaxation $E_r(t)$

- *Sont linéaires pour des petites déformations ($\varepsilon < .02$)*
- *$E_r(t)$ – indépendant du niveau de déformation*
- *$J_c(t)$ – indépendant du niveau de contrainte*

‡ *Notons :*

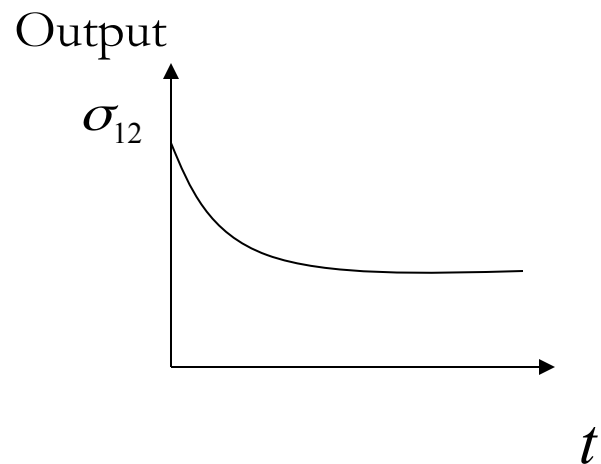
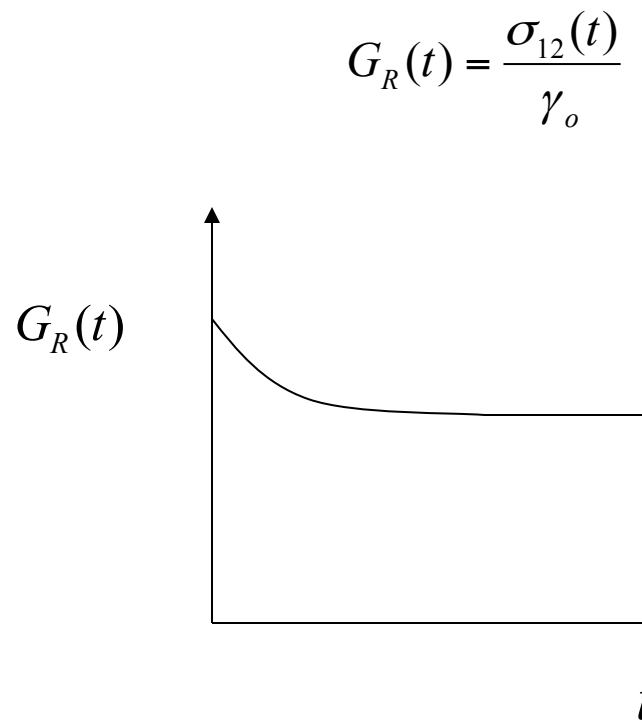
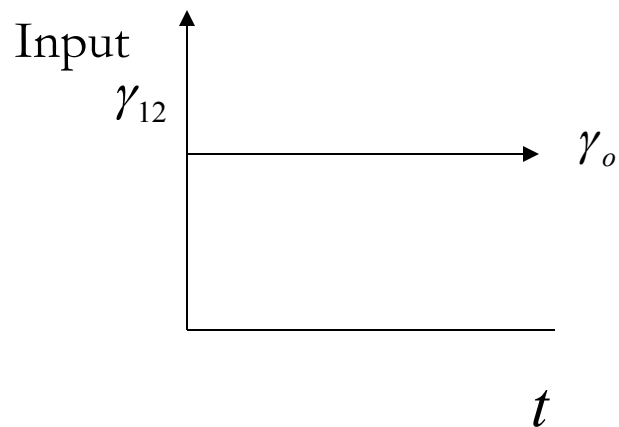
$$J_{cg} = 1/E_{rg} \quad \text{and} \quad J_{ce} \equiv 1/E_{re},$$

Cependant en règle générale:

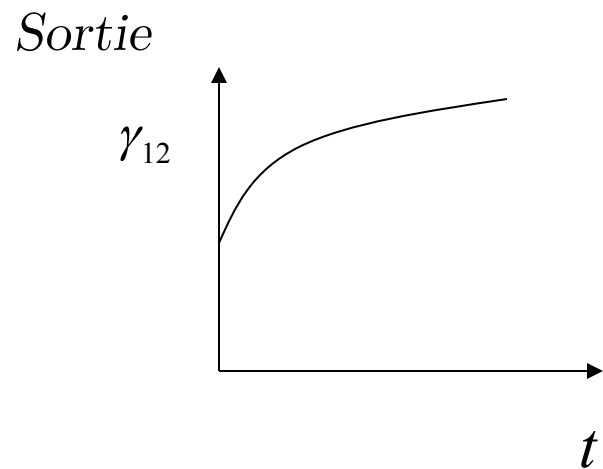
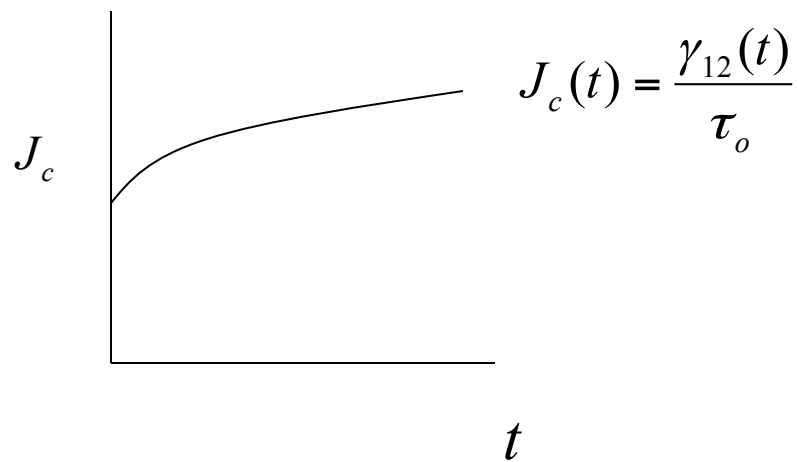
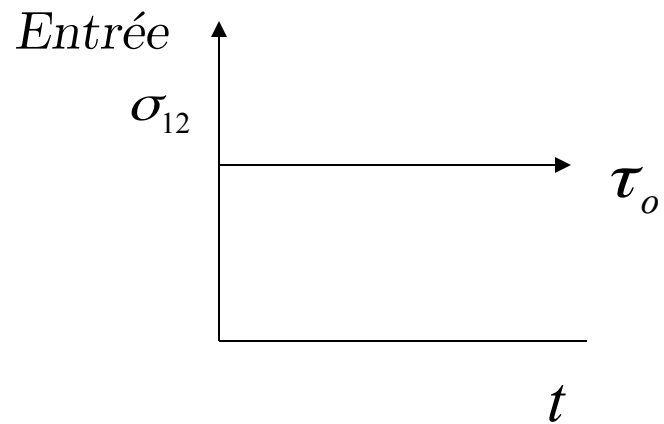
$$J_c(t) \neq 1/E_r(t).$$

Même comportement pour le cisaillement

Relaxation des contraintes :

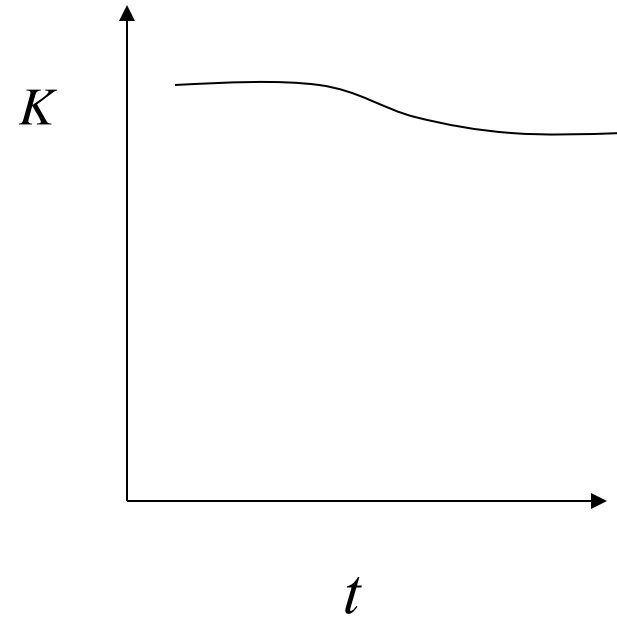
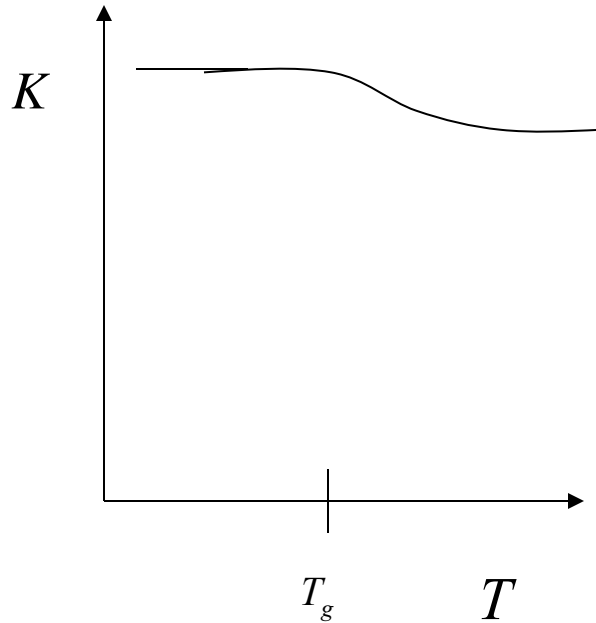


Fluage



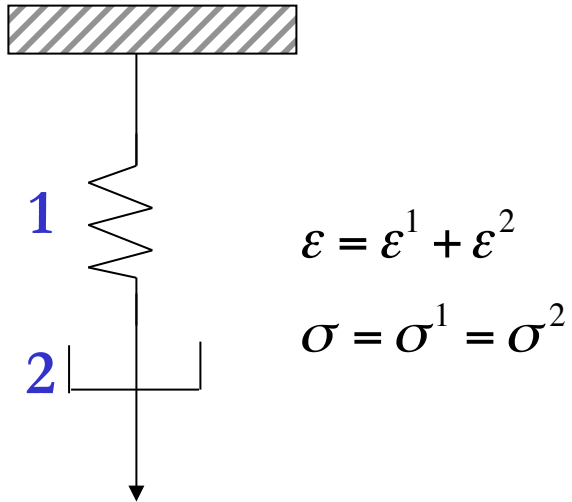
La compressibilité des matériaux (terme de pression) est moins viscoelastique ; i.e., faible dépendance en temps et température

K = Module de compressibilité

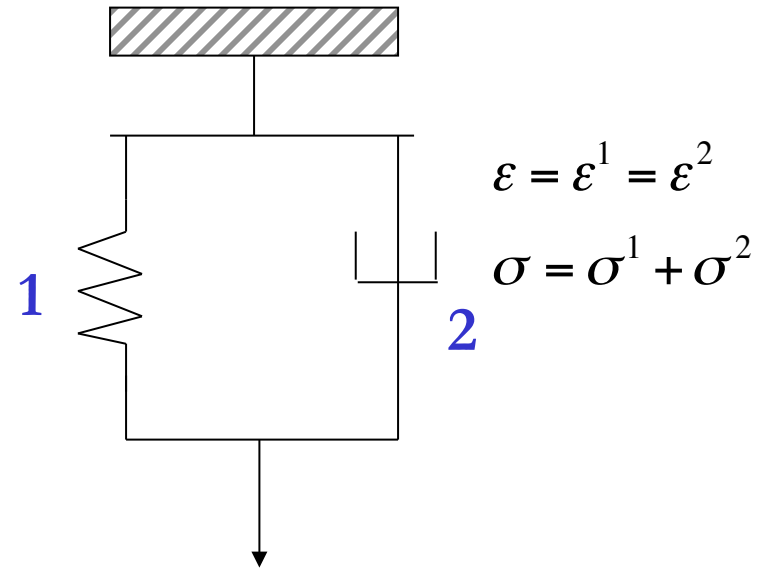


Deux simples modèles rhéologiques

Maxwell Model

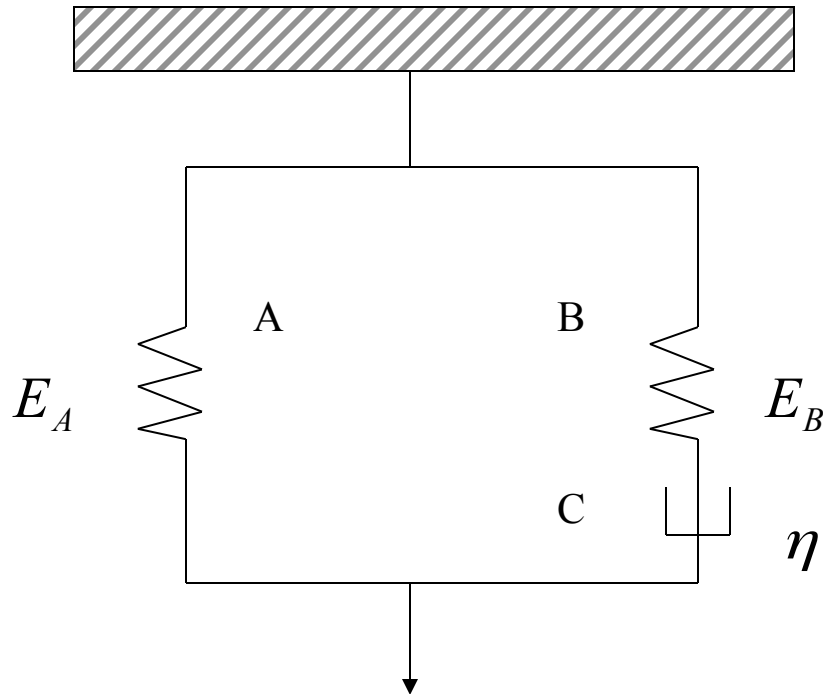


Kelvin-Voigt Model



Exp silly putty

Modèle standard linéaire



Ce modèle donne de bonnes descriptions physiques des deux modes de relaxations et de fluage.

Afin d'obtenir les relations entre les contraintes et les déformations, les théorèmes mécaniques à appliquer sont les suivants :

I L'Equilibre

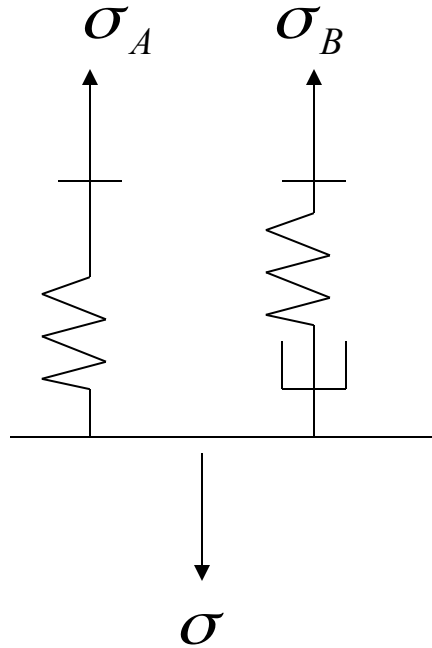
II Les lois constitutives des comportements des matériaux

III La compatibilité

I. Equilibre

$$(1) \quad \sigma = \sigma_A + \sigma_B$$

$$(2) \quad \sigma_B = \sigma_C$$



II. Equations constitutives

$$(3) \quad \sigma_A = E_A \varepsilon_A$$

$$(4) \quad \sigma_B = E_B \varepsilon_B$$

$$(5) \quad \sigma_C = \eta \dot{\varepsilon}_C$$

III. Compatibilité

$$(6) \quad \varepsilon = \varepsilon_A = \varepsilon_B + \varepsilon_C$$

$$(7) \quad \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_A = \dot{\varepsilon}_B + \dot{\varepsilon}_C$$

En combinant les équations, on obtient :

$$(7), (4), (5) \rightarrow \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}_B}{E_B} + \frac{\sigma_C}{\eta}$$

$$\text{utilisant (1)} \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}_B}{E_B} + \frac{\sigma_B}{\eta}$$

$$\text{utilisant (2)} \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E_B} - \frac{\dot{\sigma}_A}{E_B} + \frac{\sigma}{\eta} - \frac{\sigma_A}{\eta}$$

$$\text{utilisant (3)} \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E_B} - \frac{E_A}{E_B} \dot{\varepsilon}_A + \frac{\sigma}{\eta} - \frac{E_A}{E_B} \varepsilon_A$$

$$\text{utilisant (6)} \quad \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E_B} - \frac{E_A}{E_B} \dot{\varepsilon} + \frac{\sigma}{\eta} - \frac{E_A}{E_B} \varepsilon$$

L'équation différentielle en contrainte et en déformation s'écrit tel que:

$$(*) \quad \left(1 + \frac{E_A}{E_B}\right) \dot{\varepsilon} + \frac{E_A}{\eta} \varepsilon = \frac{1}{E_B} \dot{\sigma} + \frac{1}{\eta} \sigma$$

De (*), les expressions du **module des relaxations** et de la **complaisance de fluage** peuvent être obtenues.

Relaxation des contraintes

Entrée: $\varepsilon(t) = \varepsilon_o h(t)$ fonction d'Heaviside

$\dot{\varepsilon}(t) = \varepsilon_o \delta(t)$ Dirac

$$h(t) = \begin{cases} 0 & , t \leq 0 \\ 1 & , t \geq 0 \end{cases}$$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & , t \neq 0 \\ \infty & , t = 0 \end{cases}$$

$$\left(1 + \frac{E_A}{E_B}\right) \varepsilon_o \delta(t) + \frac{E_A}{\eta} \varepsilon_o h(t) = \frac{1}{E_B} \dot{\sigma}(t) + \frac{1}{\eta} \sigma(t)$$

$$\left(1 + \frac{E_A}{E_B}\right) \varepsilon_o \delta(t) + \frac{E_A}{\eta} \varepsilon_o h(t) = \frac{1}{E_B} \dot{\sigma}(t) + \frac{1}{\eta} \sigma(t)$$

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$$

$t > 0$:

$$\frac{E_A}{\eta} \varepsilon_o = \frac{1}{E_B} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\eta} \sigma$$

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{E_B}{\eta} \sigma = \frac{E_A E_B}{\eta} \varepsilon_o$$

Réolvons l'équation différentielle en σ :

Solution homogène

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{E_B}{\eta} \sigma = 0$$

$$\sigma_H = A \exp\left\{-\frac{E_B}{\eta} t\right\}$$

Solution particulière

$$\frac{E_B}{\eta} \sigma_p = \frac{E_A E_B}{\eta} \varepsilon_o$$

$$\sigma_p = E_A \varepsilon_o$$

$$\sigma = E_A \varepsilon_o + A \exp \left\{ -\frac{E_B}{\eta} t \right\}$$

La condition initiale en $t=0^+$ permet d'obtenir A

$$t = 0^+, \quad \sigma = (E_A + E_B) \varepsilon_o$$

$$\sigma = E_A \varepsilon_o + A = (E_A + E_B) \varepsilon_o$$

$$A = E_B \varepsilon_o$$

$$\sigma(t) = \left[E_A + E_B \exp \left\{ -\frac{E_B}{\eta} t \right\} \right] \varepsilon_o h(t)$$

Module de Relaxation:

$$E_r(t) = E_A + E_B \exp \left\{ -\frac{E_B}{\eta} t \right\}$$

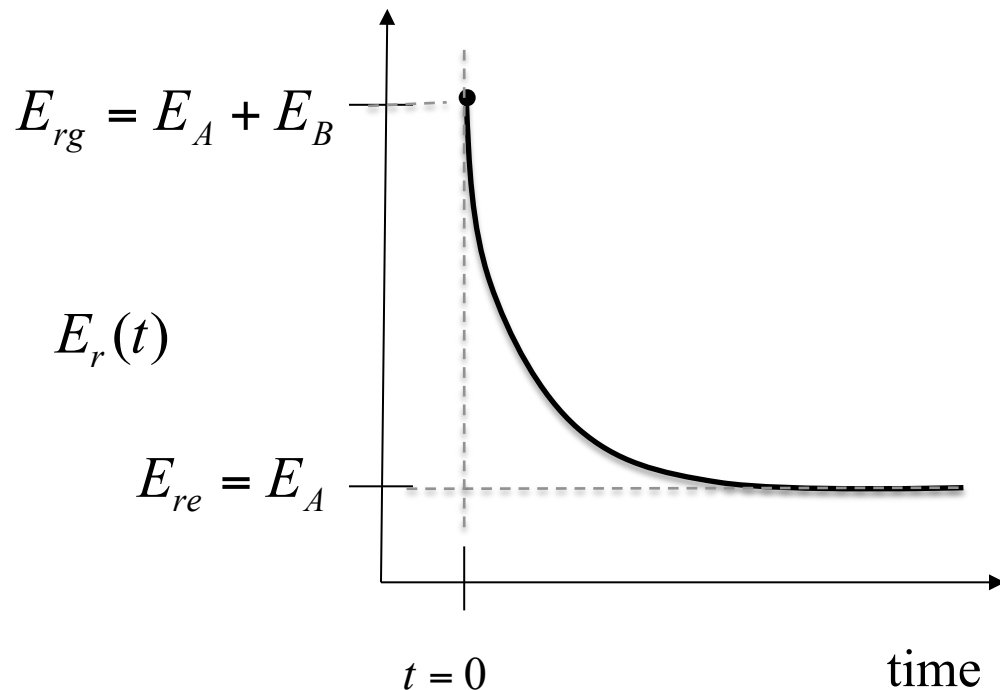
$$E_{rg} = E_r(0^+) = E_A + E_B \quad (\text{temps court})$$

$$E_{re} = E_r(\infty) = E_A \quad (\text{temps long, la réponse à l'équilibre})$$

Le temps relaxation : $\tau_r = \eta / E_B$

$$\sigma(t) = \left[E_{re} + (E_r - E_{re}) \exp \left\{ -\frac{t}{\tau_r} \right\} \right] \varepsilon_o h(t)$$

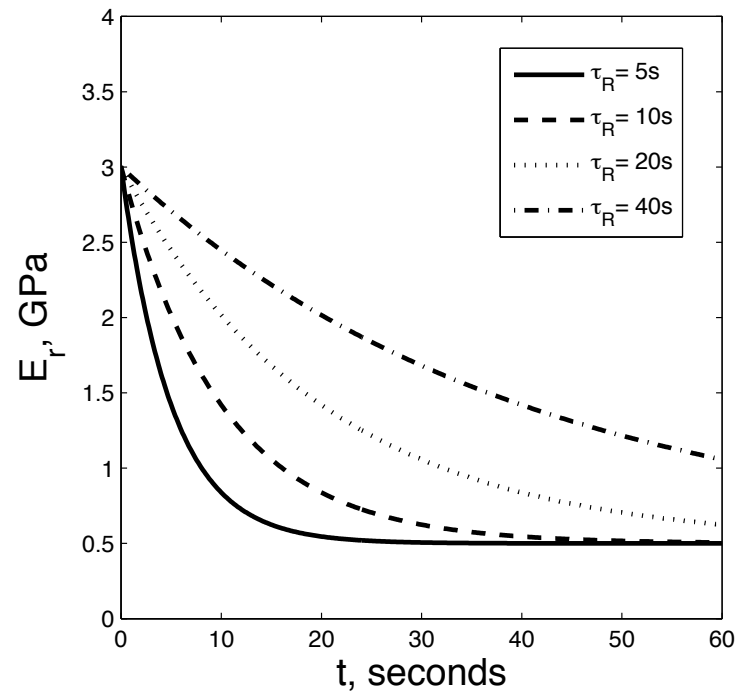
Avec $\tau_r = \eta / E_B$



Avec $E_A = 0,5$ Gpa, $E_B = 2,5$ Gpa ;

$E_{rg} = 3$ Gpa, $E_{re} = 0,5$ Gpa

et différentes valeurs de temps de relaxation τ_r



Obtenons la complasiance de fluage :

Input: $\sigma(t) = \sigma_o h(t); \dot{\sigma} = \sigma_o \delta(t)$

$$\left(1 + \frac{E_A}{E_B}\right) \dot{\varepsilon} + \frac{E_A}{\eta} \varepsilon = \frac{1}{E_B} \sigma_o \delta(t) + \frac{1}{\eta} \sigma_o h(t)$$

$$t = 0^+$$

$$\left(1 + \frac{E_A}{E_B}\right) \dot{\varepsilon} + \frac{E_A}{\eta} \varepsilon = \frac{\sigma_o}{\eta}$$

$$\dot{\varepsilon} + \frac{E_A E_B}{\eta(E_A + E_B)} \varepsilon = \frac{E_B}{\eta(E_A + E_B)} \sigma_o$$

Le temps de fluage caractéristique

$$\tau_c \equiv \frac{\eta(E_A + E_B)}{E_A E_B}$$

$$\dot{\varepsilon} + \frac{1}{\tau_c} \varepsilon = \frac{1}{E_A \tau_c} \sigma_o$$

*Réolvons l'équation
diff. eq.*

$$\left[\begin{array}{l} \varepsilon = \left[\frac{\sigma_o}{E_A} + c \exp \left\{ -\frac{t}{\tau_c} \right\} \right] \\ t = 0^+, \quad \varepsilon = \sigma_o / (E_A + E_B) \end{array} \right]$$

$$\varepsilon(t) = \left[\frac{1}{E_A} - \left\{ \frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_A + E_B} \right\} \exp\{-t / \tau_c\} \right] \sigma_o h(t)$$

$$J_c = \left[\frac{1}{E_A} - \left\{ \frac{1}{E_A} - \frac{1}{E_A + E_B} \right\} \exp\left\{-\frac{t}{\tau_c}\right\} \right]$$

En générale, $J_c(t) \neq \frac{1}{E_r(t)}$ mais :

$$J_{cg} = \frac{1}{E_A + E_B} = \frac{1}{E_{rg}}$$

$$J_{ce} = \frac{1}{E_A} = \frac{1}{E_{re}}$$

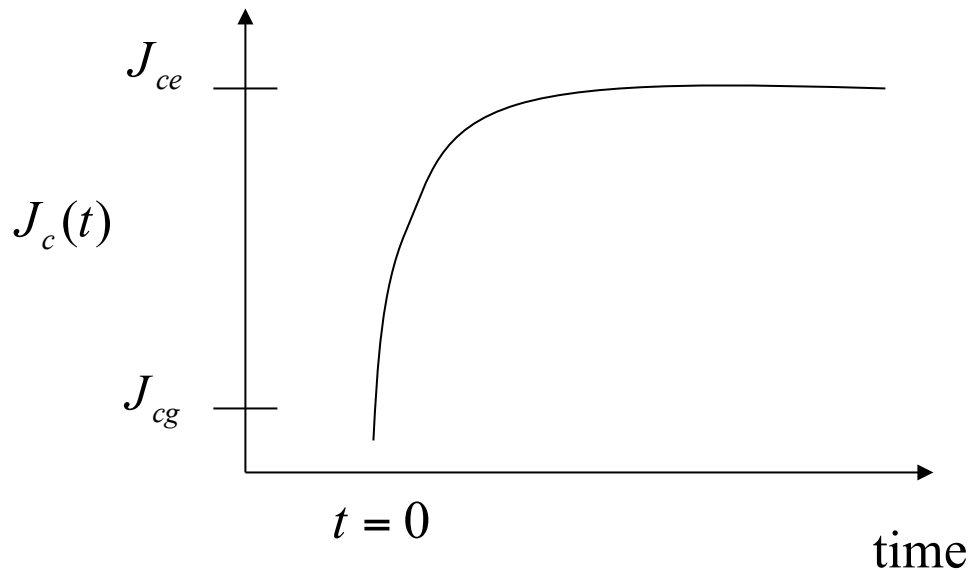
$$J_c(t) = \left[J_{ce} - (J_{ce} - J_{cg}) \exp(-t / \tau_c) \right] h(t)$$

$$\varepsilon(t) = \left[J_{ce} - (J_{ce} - J_{cg}) \exp(-t / \tau_c) \right] \sigma_o h(t)$$

$$J_{cg} = J_c(0^+) = \frac{1}{(E_1 + E_2)},$$

$$J_{ce} = J_c(\infty) = \frac{1}{E_1},$$

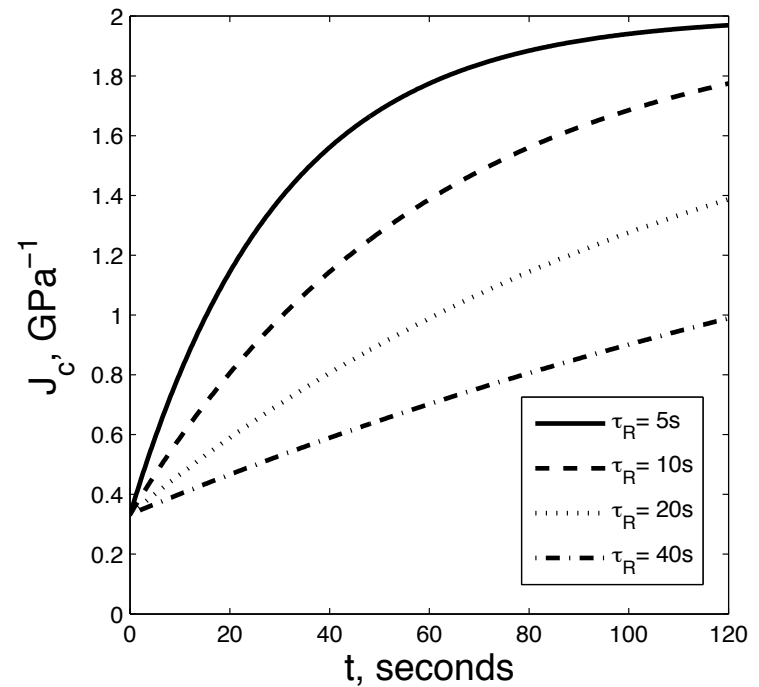
$$\tau_C \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tau_R (E_1 + E_2)}{E_1}, \quad \tau_R = \eta / E_2,$$



Avec $E_1=0,5$ Gpa, $E_2=2,5$ Gpa ;

$J_{rg}=J_c(0)=1/3$ Gpa, $J_{ce}=J_c(\infty)=0.2$ Gpa

et différentes valeurs de temps
de relaxation τ_R



Principe de Superposition de Boltzmann :

Réponse à une excitation quelconque

Cherchons la réponse à une excitation quelconque

Soit input: $\sigma(t) = \sigma_o h(t)$ *ici il était implicitement
assumé que la charge était*
Le résultat est output: $\varepsilon(t) = J_c(t) \sigma_o$ *appliquée à $t=0$*

Si la charge (contrainte) σ_1 est appliquée à $t=t_1$:

$$\sigma(t) = \sigma_1 h(t - t_1)$$

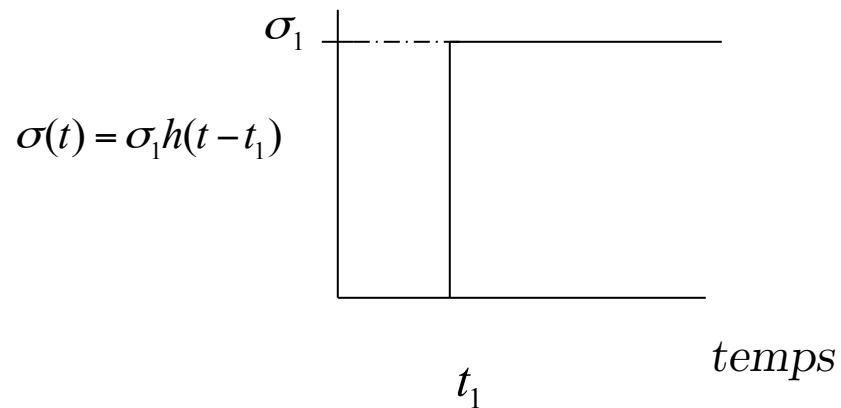
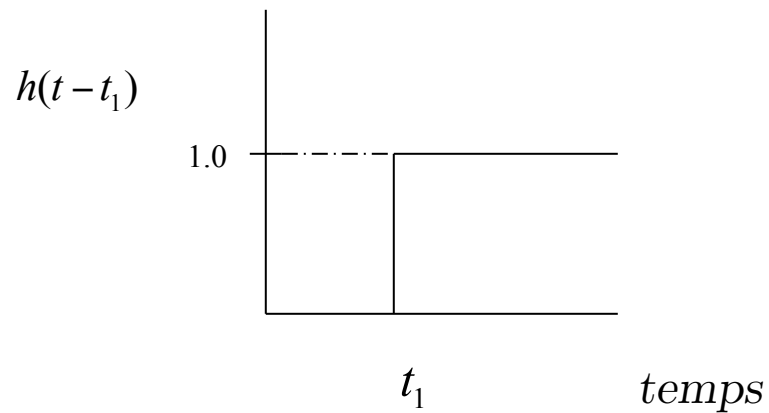
Ou
$$h(t - t_1) = \begin{cases} 0, & (t - t_1) \leq 0 \\ 1, & (t - t_1) > 0 \end{cases}$$

$$h(t - t_1) = \begin{cases} 0, & t \leq t_1 \\ 1, & t > t_1 \end{cases}$$

$$\sigma(t) = \sigma_1 h(t - t_1)$$

$$h(t - t_1) = \begin{cases} 0, & (t - t_1) \leq 0 \\ 1, & (t - t_1) > 0 \end{cases}$$

$$h(t - t_1) = \begin{cases} 0, & t \leq t_1 \\ 1, & t > t_1 \end{cases}$$



Ainsi, pour input: $\sigma(t) = \sigma_1 h(t - t_1)$ le output est: $\varepsilon(t) = J_c(t - t_1) \sigma_1$

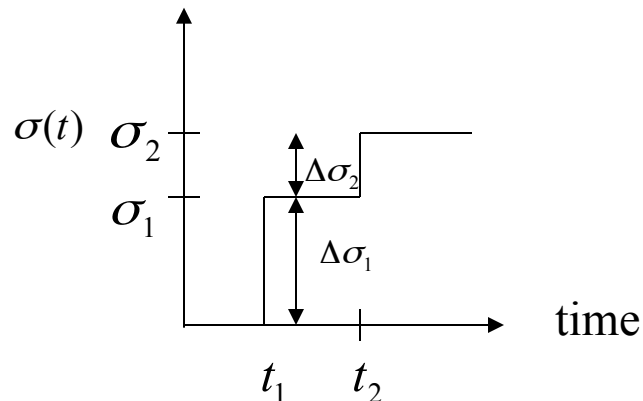
Où $(t - t_1)$ est le temps écoulé depuis l'application de la contrainte

Maintenant, supposons qu'il ait deux étapes de contraintes appliquées :

$$\sigma(t) = \Delta\sigma_1 h(t - t_1) + \Delta\sigma_2 h(t - t_2)$$

$$\Delta\sigma_1 = \sigma_1 - 0$$

$$\Delta\sigma_2 = \sigma_2 - \sigma_1$$



input $\sigma(t) = \Delta\sigma_1 h(t - t_1) + \Delta\sigma_2 h(t - t_2)$

$$= \sum_{i=1}^2 \Delta\sigma_i h(t - t_i)$$

Principe de Superposition de Boltzmann

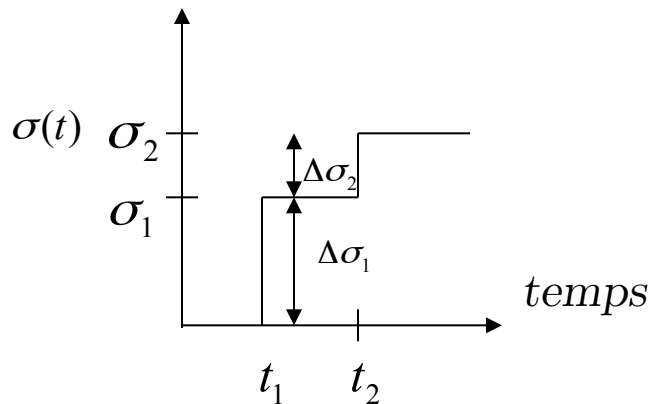
La réponse en déformation d'un historique de chargement est simplement la somme des réponses des déformations pour chaque incrément de contraintes pris individuellement; Ce résultat s'appuie sur la linéarité du comportement.

$$\sigma(t) = \sigma_o h(t)$$

$$\varepsilon(t) = J_c(t) \sigma_o$$

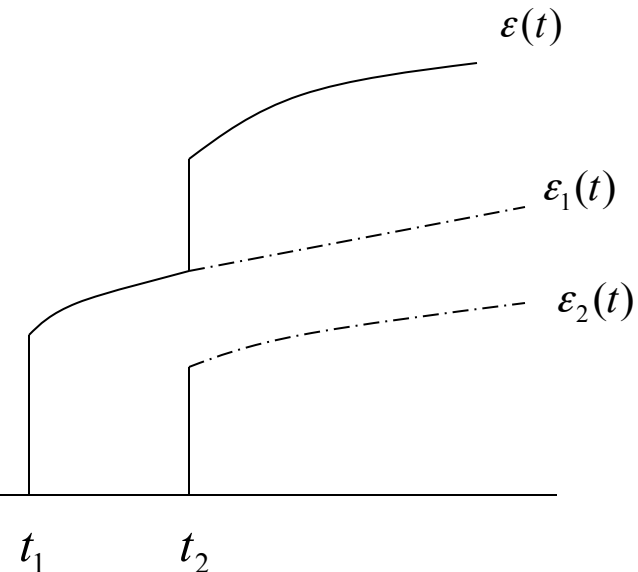
$$\varepsilon(t) = J_c(t - t_1) \Delta \sigma_1 + J_c(t - t_2) \Delta \sigma_2$$

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^2 J_c(t - t_i) \Delta \sigma_i$$



Sortie

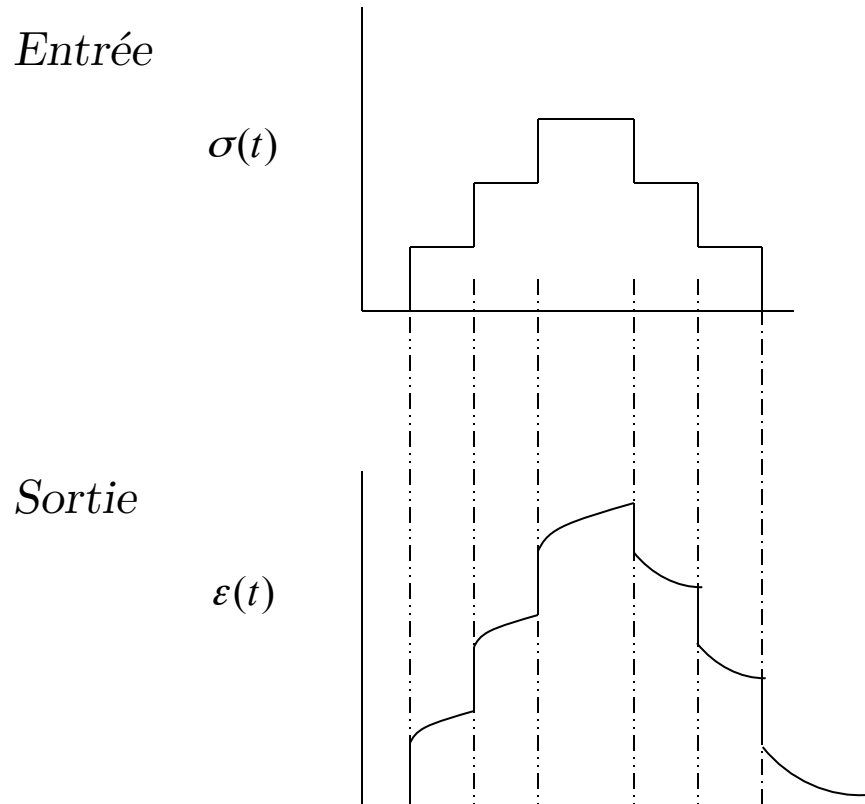
$\varepsilon(t)$



Le principe de superposition appliqué à un nombre arbitraire d'incréments de contraintes N , s'écrit ;

Entrée $\sigma(t) = \sum_{i=1}^N \Delta\sigma_i h(t - t_i)$

Sortie $\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^N J_c(t - t_i) \Delta\sigma_i$



Avec des incréments de chargement de plus en plus petits, l'histoire du chargement devient lisse et une relation intégrale est obtenue :

Entrée

$$\sigma(t) = \sum_{i=1}^N h(t - t_i) \Delta \sigma_i$$

$$= \int_o^t h(t - \tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau$$

Sortie

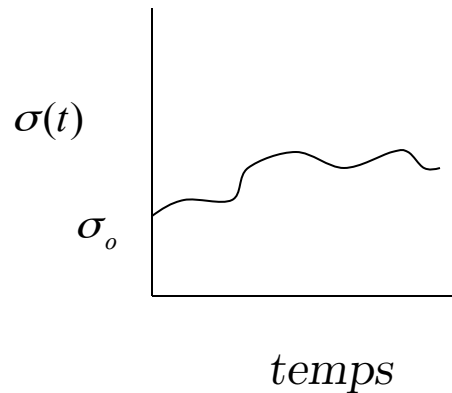
$$\varepsilon(t) = \int_o^t J_c(t - \tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau$$

$\varepsilon(t)$, est obtenue par superposition des incréments de contraintes

Il s'agit d'une intégrale de convolution.

Si le chargement est appliqué sous forme d'un historique de contrainte; la relation contrainte-déformation est obtenue à partir de l'intégrale de la complaisance de fluage

S'il existe un saut de discontinuité, nous obtenons le résultat suivant :



$$\sigma(t) = \sigma_o h(t) + \int_o^t \dot{\sigma}(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

$$\varepsilon(t) = J_o(t) \sigma_o + \int_o^t J_c(t - \tau) \dot{\sigma}(\tau) d\tau$$

Le même argument est utilisé pour l'application d'un historique quelconque de déformation; la réponse en contrainte est donnée par :

<i>Entrée</i>	$\varepsilon(t) = \varepsilon_o h(t)_o + \int_o^t \dot{\varepsilon}(\tau) h(t - \tau) dz$
---------------	---

<i>Sortie</i>	$\sigma(t) = E_r(t) \varepsilon_o + \int_o^t E_r(t - \tau) \dot{\varepsilon}(\tau) d\tau$
---------------	---

L'aspect linéaire de la réponse viscoélastique linéaire permet d'utiliser le principe de superposition.

Rappel, nous avons établis que la valeur vitreuse et la valeur à l'équilibre $J_c(t)$ et $E_r(t)$ sont reciproques.

$$J_{cg} = \frac{1}{E_{rg}}; \quad J_{ce} = \frac{1}{E_{re}}$$

Mais, la relation générale n'est pas vérifiée :

$$J_c(t) \neq \frac{1}{E_r}(t)$$

Si l'entrée est : $\sigma(t) = \alpha E_r(t)$

La sortie sera : $\varepsilon(t) = \alpha h(t)$

Cependant, la sortie est donc donnée :

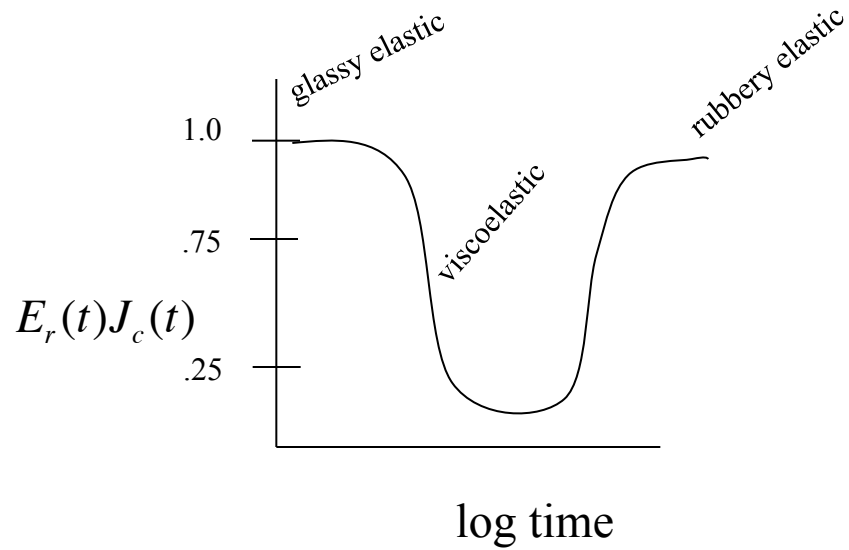
$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= \int_o^t J_c(t-\tau) \dot{O}(\tau) d\tau \\ &= \int_o^t J_c(t-\tau) \frac{\alpha dE_r(\tau)}{d\tau} d\tau\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\alpha h(t) &= \int_o^t J_c(t-\tau) \alpha \frac{dE_r(\tau)}{d\tau} d\tau \\ 1 &= \int_o^t J_c(t-\tau) \frac{dE_r(\tau)}{d\tau} d\tau\end{aligned}$$

Relation entre J_c et E_r :

$$t = \int_o^t J_c(t-\tau) E_r(\tau) d\tau$$



La transformée de Laplace donne l'approximation suivante :

$$E_r(t) = \frac{\sin m\pi}{m\pi J_c(t)}$$

où m = pente negative de la courbe $\log E_r(t)$ vs. $\log t$.

- Pour un matériau donné, la complaisance de fluage $J_c(t)$ ou la fonction de relaxation $E_r(t)$ peuvent être déterminées expérimentalement. La complaisance de fluage ou le module de relaxation peuvent être utilisés pour évaluer n'importe quel historique de chargement.
- Cependant, les expériences de fluage et de relaxation ne peuvent pas fournir des renseignements complets sur le comportement mécanique des matériaux viscoélastiques. Ces expériences fournissent généralement des données concernant le comportement d'un matériau dans la plage de temps de 10 secondes à 10 années. Il faut recourir à **l'équivalence temps température** (non abordé ds ce cours)
- Formulations oscillantes des contraintes et des déformations permet de faire **l'analyse des vibrations** et de la propagation d'ondes à travers des matériaux viscoélastiques.

Exp : bille acier + balles michelin

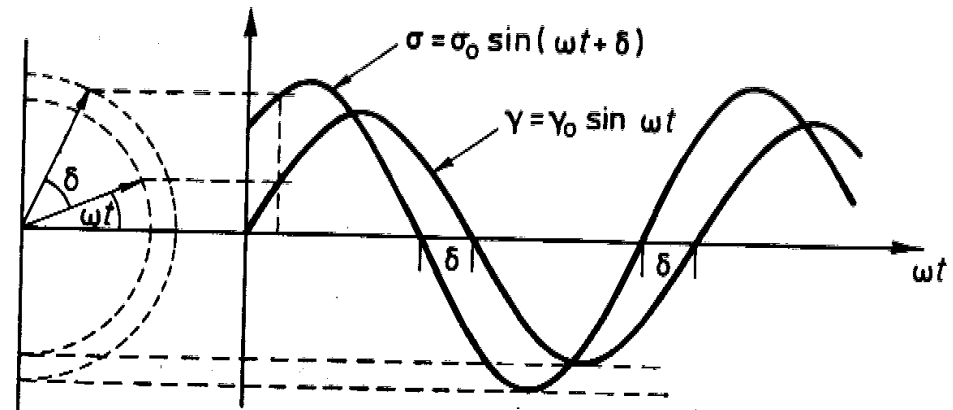
Réponse dynamique: methodes et mesures

Chargement
périodique :

$$\gamma_{12} = \gamma_o \sin \omega t$$

$$\dot{\gamma}_{12} = \omega \gamma_o \cos \omega t$$

appelons $s = t - \tau$



$$\sigma_{12}(t) = \int_{-\infty}^t G(t - \tau) \dot{\gamma}_{12}(\tau) d\tau$$

$$\sigma_{12}(t) = \int_0^{\infty} G(s) \dot{\gamma}_{12}(t - s) ds$$

$$= \int_0^{\infty} G(s) \omega \gamma_o \cos[\omega(t - s)] ds$$

$$= \int_0^{\infty} \gamma_o \omega G(s) \sin \omega s ds \sin \omega t + \int_0^{\infty} \gamma_o \omega G(s) \cos \omega s ds \cos \omega t$$

$$= \gamma_o \omega \left[\int_0^{\infty} G(s) \cos \omega s ds \right] \cos \omega t + \gamma_o \omega \left[\int_0^{\infty} G(s) \sin \omega s ds \right] \sin \omega t$$

$$\sigma_{12} = \gamma_o \left(\underbrace{G' \sin \omega t}_{\text{en phase}} + \underbrace{G'' \cos \omega t}_{\text{hors phase}} \right)$$

G' : module de conservation G'' : module de perte

$$G' = \omega \int_0^{\infty} G(s) \sin \omega s ds$$

$$G'' = \omega \int_0^{\infty} G(s) \cos \omega s ds$$

Notons que G' and G'' dependent de la pulsation
et donc de la fréquence de sollicitation

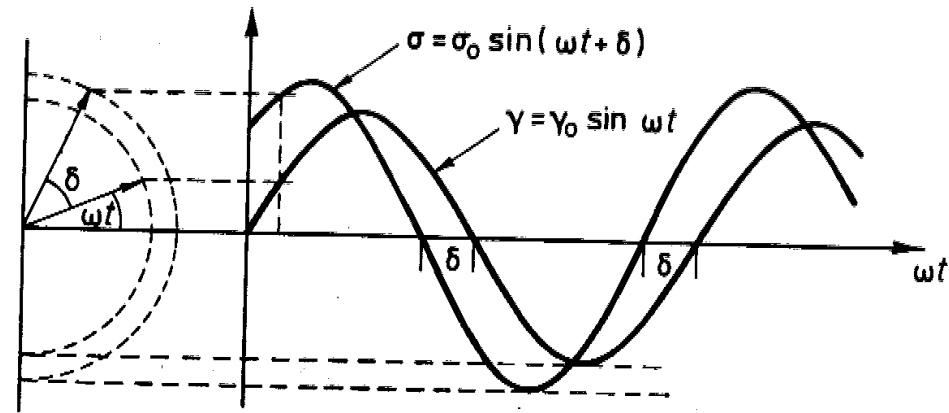
On peut aussi écrire la contrainte telle que:

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= \sigma_o \sin(\omega t + \delta) \\ &= \sigma_o \cos \delta \sin \omega t + \sigma_o \sin \delta \cos \omega t\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\sigma_o &= \sigma_o(\omega) \\ \delta &= \hat{\delta}(\omega)\end{aligned}$$

Angle de déphasage
ou angle de perte



alors

$$G' = \frac{\sigma_o \cos \delta}{\gamma_o}$$

$$G'' = \frac{\sigma_o \sin \delta}{\gamma_o}$$

et

$$\tan \delta = \frac{G''}{G'}$$

Réponse dynamique : Représentation Complexe

$$\gamma^* = \gamma_o \exp(i\omega t)$$

$$\sigma^* = \sigma_o \exp[i(\omega t + \delta)]$$

$$G^* = \frac{\sigma^*}{\gamma^*}$$

$$= \frac{\sigma_o}{\gamma_o} \exp i\delta$$

$$= \frac{\sigma_o}{\gamma_o} [\cos \delta + i \sin \delta]$$

$$= G' + iG''$$

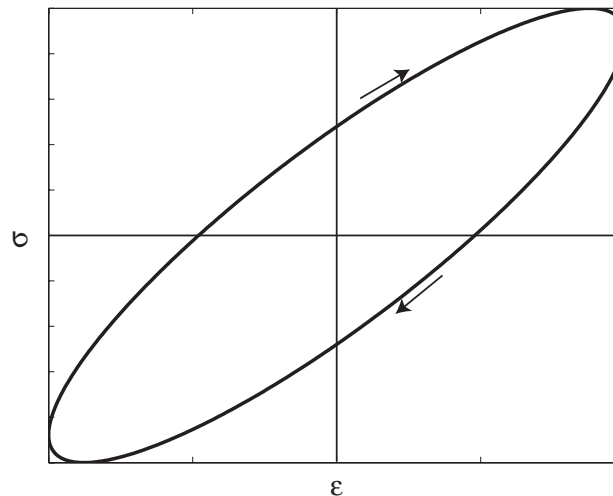
$$\tan \delta = G''/G'$$

Le travail par unité de volume sur une période $0, t$ est

$$W = \int_0^t \sigma \dot{\epsilon} dt .$$

Maintenant considérons l'application d'une déformation sinusoidale :

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 \sin(\omega t) \quad \Longrightarrow \quad \sigma(t) = \sigma_0 \sin(\omega t + \delta) .$$



*Hystérésis :
aire de l'ellipse*

L'énergie dissipée sur un cycle est donnée par l'aire de l'hystérésis :

$$W_{\text{one cycle}} = \int_0^T \sigma \dot{\epsilon} dt, \quad T \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\pi}{\omega}$$

pour:

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 \sin(\omega t) \implies \sigma(t) = \sigma_0 \sin(\omega t + \delta) \implies W_{\text{one cycle}} = \pi \sigma_0 \epsilon_0 \sin \delta.$$

Alors, quand $\delta=0$ l'énergie dissipée est zéro, cas d'un matériau élastique

Rappelons que :

$$E'' = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \sin \delta, \quad J'' = \frac{\epsilon_0}{\sigma_0} \sin \delta,$$

Ainsi

$$W_{\text{one cycle}} = \pi \epsilon_0^2 E'' = \pi \sigma_0^2 J'',$$

Maintenant, l'énergie stockée après un cycle complet est zéro car le matériau a été remis dans sa configuration d'origine. Pour trouver l'énergie stockée il faut faire le bilan énergétique sur $\frac{1}{4}$ de cycle ou sur un temps $t=\pi/2\omega$

$$W_{\text{quarter cycle}} = \int_0^{\pi/(2\omega)} \sigma \dot{\epsilon} dt = \underbrace{\left\{ \frac{\sigma_0 \epsilon_0}{2} \cos \delta \right\}}_{\text{stored energy}} + \underbrace{\left\{ \frac{\sigma_0 \epsilon_0 \pi}{4} \sin \delta \right\}}_{\text{dissipated energy}}$$

$$\text{damping capacity} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{dissipated energy in quarter cycle}}{\text{stored energy in quarter cycle}} = \frac{\pi}{2} \tan \delta .$$

La capacité amortissante d'un matériau viscoélastique dépend uniquement de l'angle de déphasage, ou angle de perte, nous rappelons qu'il est dépendant de la fréquence