

Module : Usinage des surfaces gauches

Durée : 1 heure 30 min

Sujet d'examen

Questions de cours : (8 Pts)

1. Définir les termes suivants : Courbe de Bézier et Courbe B-Spline. **(2 pts)**
2. Pour concevoir une courbe B-Spline, nous avons besoin de quoi ? **(1 pt)**
3. Citer les propriétés d'une courbe de Bézier. **(2 pts)**
4. Quelle est la différence entre une B-Spline à $K=2$ et une B-Spline à $K=3$? **(1 pt)**
5. Quelle est la différence entre une B-Spline à nœuds non périodiques et une B-Spline à nœuds périodiques ? **(2 pts)**

Exercice : (12 pts)

1. Trouver les coordonnées des points de contrôles d'une courbe de Bézier de degré 3 donnée par la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} f(t) = -2t^3 + 12t^2 - 6t + 1 \\ g(t) = -8t^3 + 12t^2 - 2 \end{cases}$$

1. Trouver l'expression finale de $\overrightarrow{OM}(t)$ en fonction des vecteurs associés à ces points de contrôles.

Bon Courage

Correction examen Usinage des surfaces gauches M2 FMP

(Enseignant Bentaleb Fayçal)

Questions de cours: (8pts)

1- Définition des termes:

1) Courbe de Bézier: $M(t)$ décrit la courbe de Bézier de degré n avec $(n+1)$ points de contrôle, elle est définie comme une construction récursive de barycentres dans les rapports $(1-t)$ et t . (1)

2) Courbe de B-spline: C'est une courbe d'ordre m définie par:

1) Un vecteur de nœuds $U = (t_0, t_1, \dots, t_{n+1})$;

2) $(n+1)$ points de contrôle P_k . (1)

3) $(n+1)$ fonctions de pondération $S_{m,k}$ définies récursivement sur des intervalles $[t_k, t_{k+2}]$:

$$S_{m,k}(t) = \frac{t - t_k}{t_{k+m-1} - t_k} S_{m-1,k}(t) + \frac{t_{k+m} - t}{t_{k+m} - t_{k+1}} S_{m-1,k+1}(t).$$

2- Pour concevoir une B-spline, on a besoin de:

1) Un ensemble de points de contrôle (P_i) ;

2) Un ensemble de nœuds (U) ; (1)

3) Un degré de courbe $(k-1)$.

3- Les propriétés d'une courbe de Bézier sont:

1) La courbe est de degré n si elle a $(n+1)$ points de contrôle; (0,5)

2) La courbe passe par P_0 et P_n ; (0,5)

3) La droite (P_0P_1) est tangente à C en P_0 ; (0,5)

4) La droite $(P_{n-1}P_n)$ est tangente à C en P_n . (0,5)

4- La différence entre une B-spline à $k=2$ et une B-spline à $k=3$:

1) Une B-spline à $k=2$: Elle a un degré de courbe égal à 1, un nombre de nœuds égal à $(n+3)$ et le premier et le dernier nœuds sont dupliqués 2 fois. (0,5)

.) Une B-spline à $k=3$: Elle a un degré de courbe égal à 2, un nombre de nœuds égal à $(n+4)$ et le premier et le dernier nœuds sont dupliqués 3 fois. (0,5)

5- La différence entre une B-spline à nœuds périodiques et une B-spline à nœuds non périodiques est:

à Nœuds périodiques:

- .) le premier et le dernier nœuds ne sont pas dupliqués (même contribution); (1)
- .) La courbe ne passe pas par les points finaux;
- .) Utilisé pour générer des courbes fermées.

à Nœuds non périodiques:

- .) le premier et le dernier nœuds sont dupliqués k fois, (1)
- .) La courbe passe par le premier et le dernier point de contrôle.

Exo 1: (12pts)

1. les points de contrôles:

$$\begin{aligned}\vec{OM}(t) &= \sum_{i=0}^3 \beta_{i,3}(t) \cdot \vec{OP}_i \\ &= \beta_{0,3}(t) \vec{OP}_0 + \beta_{1,3}(t) \vec{OP}_1 + \beta_{2,3}(t) \vec{OP}_2 + \beta_{3,3}(t) \vec{OP}_3\end{aligned}$$

• $i=0$:

$$\beta_{0,3}(t) = C_0^3 t^0 (1-t)^{3-0} \quad (0,25)$$

$$C_0^3 = \frac{3!}{0!(3-0)!} = \frac{3!}{3!} = 1 \quad (0,25)$$

$$\begin{aligned}\beta_{0,3}(t) &= 1 \times 1 (1-t)^3 = (1-t)^3 (1-t) \\ &= (1-2t+t^2)(1-t) \\ &= 1-2t+t^2-t+2t^2-t^3 \\ &= -t^3+3t^2-3t+1 \quad (0,25)\end{aligned}$$

• $i=1$:

$$\beta_{1,3}(t) = C_1^3 t^1 (1-t)^{3-1} \quad (0,25)$$

$$C_1^3 = \frac{3!}{1!(3-1)!} = \frac{3!}{1!2!} = 3 \quad (0,25)$$

$$\begin{aligned}\beta_{1,3}(t) &= 3t(1-t)^2 = 3t(1-2t+t^2) \\ &= 3t-6t^2+3t^3 \\ &= 3t^3-6t^2+3t \quad (0,25)\end{aligned}$$

• $i=2$:

$$\beta_{2,3}(t) = C_2^3 t^2 (1-t)^{3-2} \quad (0,25)$$

$$C_2^3 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3!}{2!1!} = 3 \quad (0,25)$$

$$\begin{aligned}\beta_{2,3}(t) &= 3t^2(1-t) = 3t^2-3t^3 \\ &= -3t^3+3t^2 \quad (0,25)\end{aligned}$$

• $i=3$:

$$\beta_{3,3}(t) = C_3^3 t^3 (1-t)^{3-3} \quad (0,25)$$

$$C_3^3 = \frac{3!}{3!(3-3)!} = \frac{3!}{3!0!} = 1 \quad (0,25)$$

$$\beta_{3,3}(t) = 1 \times t^3 (1-t)^0 = t^3 \quad (0,25)$$

Vérification:

$$\sum \beta_{i,j}(t) = \beta_{0,3}(t) + \beta_{1,2}(t) + \beta_{2,3}(t) + \beta_{3,3}(t) \quad (0,25)$$

$$= (-t^3 + 3t^2 - 3t + 1) + (3t^3 - 6t^2 + 3t) + (-3t^3 + 3t^2) + t^3$$

$$= 1 \quad \text{Donc vérifiée.} \quad (0,25)$$

D'où:

$$\vec{OM}(t) = (-t^3 + 3t^2 - 3t + 1) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + (3t^3 - 6t^2 + 3t) \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + (-3t^3 + 3t^2) \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad (0,25)$$

$$f(t) = -x_0 t^3 + 3x_0 t^2 - 3x_0 t + x_0 + 3x_1 t^3 - 6x_1 t^2 + 3x_1 t - 3x_2 t^3 + 3x_2 t^2 + x_3 t^3$$

$$= t^3(-x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3) + t^2(3x_0 - 6x_1 + 3x_2) + t(-3x_0 + 3x_1) + x_0 \quad (0,25)$$

Nous avons: $f(t) = -2t^3 + 12t^2 - 6t + 1$. Donc:

$$\begin{cases} -x_0 + 3x_1 - 3x_2 + x_3 = -2 & \text{--- (1)} \\ 3x_0 - 6x_1 + 3x_2 = 12 & \text{--- (2)} \\ -3x_0 + 3x_1 = -6 & \text{--- (3)} \\ x_0 = 1 \end{cases} \quad (0,25)$$

D'où:

$$x_0 = 1 \quad (0,25)$$

$$\textcircled{3} \Rightarrow -3x_0 + 3x_1 = -6 \Rightarrow x_1 = \frac{-6 + 3 \times 1}{3} = -1 \quad (0,25)$$

$$\textcircled{2} \Rightarrow x_2 = \frac{12 - 3x_0 + 6x_1}{3} = \frac{12 - 3 \times 1 + 6(-1)}{3} = -1 \quad (0,25)$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow x_3 = -2 + x_0 - 3x_1 + 3x_2 = -2 + 1 - 3(-1) + 3(-1) = 1 \quad (0,25)$$

$$g(t) = -y_0 t^3 + 3y_0 t^2 - 3y_0 t + y_0 + 3y_1 t^3 - 6y_1 t^2 + 3y_1 t - 3y_2 t^3 + 3y_2 t^2 + y_3 t^3$$

$$= t^3(-y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3) + t^2(3y_0 - 6y_1 + 3y_2) + t(3y_0 - 3y_1) + y_0 \quad (0,25)$$

Nous avons $g(t) = -8t^3 + 12t^2 - 2$

$$\begin{cases} -y_0 + 3y_1 - 3y_2 + y_3 = -8 \dots (4) \\ 3y_0 - 6y_1 + 3y_2 = 12 \dots (5) \\ -3y_0 + 3y_1 = 0 \dots (6) \\ y_0 = -2 \Rightarrow y_0 = -2 \end{cases}$$

$$(6) \Rightarrow y_1 = \frac{3y_0}{3} = \frac{3(-2)}{3} = -2$$

$$(5) \Rightarrow y_2 = \frac{12 - 3y_0 + 6y_1}{3} = \frac{12 - 3(-2) + 6(-2)}{3} = 2$$

$$(4) \Rightarrow y_3 = -8 + y_0 - 3y_1 + 3y_2 = -8 - 2 - 3(-2) + 3(2) = 2$$

Donc :

$$P_0(1; -2), P_1(-1; -2), P_2(1; 2) \text{ et } P_3(5; 2).$$

2 - l'expression de $\vec{OM}(t)$ en fonction des vecteurs.

$$\begin{aligned} \vec{OM}(t) &= \vec{r}_0 + f_1(t) \vec{r}_1 + f_2(t) \vec{r}_2 + f_3(t) \vec{r}_3 \\ &= \vec{OP}_0 + f_1(t) (\vec{OP}_1) + f_2(t) (\vec{OP}_2) + f_3(t) (\vec{OP}_3) \\ &= \vec{OP}_0 + f_1(t) [\vec{OP}_0 + \vec{OP}_1] + f_2(t) [\vec{OP}_0 + \vec{OP}_2] + f_3(t) [\vec{OP}_0 + \vec{OP}_3] \\ &= \vec{OP}_0 + f_1(t) \vec{OP}_0 + f_1(t) \vec{OP}_1 + f_2(t) \vec{OP}_0 + f_2(t) \vec{OP}_2 + f_3(t) \vec{OP}_0 + f_3(t) \vec{OP}_3 \\ &= \vec{OP}_0 (1 + f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)) + f_1(t) \vec{OP}_1 + f_2(t) \vec{OP}_2 + f_3(t) \vec{OP}_3 \end{aligned}$$

Nous avons :

$$\vec{OM}(t) = (-t^3 + 3t^2 - 3t + 1) \vec{OP}_0 + (3t^3 - 6t^2 + 3t) \vec{OP}_1 + (-3t^2 + 3t^2) \vec{OP}_2 + t^3 \vec{OP}_3$$

Donc :

$$\begin{cases} -t^3 + 3t^2 - 3t + 1 = 1 - f_1(t) \dots (1) \\ 3t^3 - 6t^2 + 3t = f_1(t) - f_2(t) \dots (2) \\ -3t^2 + 3t^2 = f_2(t) - f_3(t) \dots (3) \\ t^3 = f_3(t) \Rightarrow f_3(t) = t^3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \Rightarrow f_2(t) &= -3t^3 + 3t^2 + f_3(t) \\ &= -3t^3 + 3t^2 + t^3 = \boxed{-2t^3 + 3t^2} \quad (0,25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \Rightarrow f_1(t) &= 3t^3 - 6t^2 + 3t + f_2(t) \\ &= 3t^3 - 6t^2 + 3t - 2t^3 + 3t^2 = \boxed{t^3 - 3t^2 + 3t} \quad (0,15) \end{aligned}$$

Donc:

$$\vec{OM}(t) = \vec{V}_0 + (t^3 - 3t^2 + 3t) \vec{V}_1 + (-2t^3 + 3t^2) \vec{V}_2 + t^3 \vec{V}_3 \quad (0,5)$$