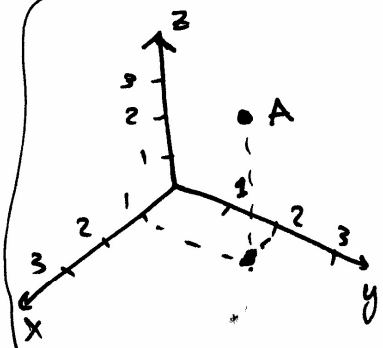
ملف

المتجهات

اعداد الاستاذ ثامر قدورة

ملاحظة : الاحصاء قيد الاعداد

①



إذا علمت أن احداثيات النقطة A هي $(1, 4a, 3)$ ، فإن قيمة a هي

a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{4}$ d) 4

الحل $A(1, 2, ..) \equiv (1, 4a, 3) \Longrightarrow 4a = 2$

$a = \frac{2}{4} \Longrightarrow \boxed{a = \frac{1}{2}}$ $\boxed{b}$

إذا علمت أن $(3, 1, -2)$ و $(1, 7, 0)$ هما طرفا قطر كرة ، فإن احداثيات مركز الكرة هي

a) $(4, 8, -2)$ b) $(2, 4, -1)$ c) $(1, -3, -1)$ d) $(-1, 3, 1)$

$\left(\frac{1+3}{2}, \frac{7+1}{2}, \frac{0+-2}{2}\right) = (2, 4, -1)$

إذا علمت أن $(1, 3, 2)$ هي نقطة منتصف القطعة المستقيمة $\overline{MN}$ $M(2, 3, 0)$ و النقطة N ، فما احداثيات النقطة N

a) $(\frac{3}{2}, 3, 1)$ b) $(0, 0, 0)$ c) $(0, 3, 4)$ d) $(\frac{1}{2}, 0, -1)$

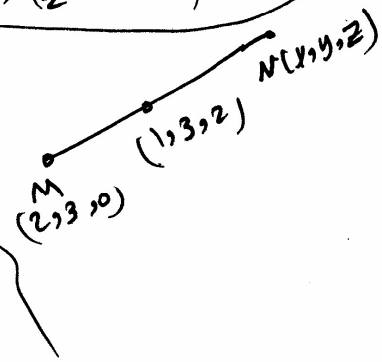
$(1, 3, 2) = \left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+3}{2}, \frac{z+0}{2}\right)$

$\frac{x+2}{2} = 1 \Longrightarrow x = 0$

$\frac{y+3}{2} = 3 \Longrightarrow y = 3$

$\frac{z}{2} = 2 \Longrightarrow z = 4$

$\Longrightarrow (0, 3, 4)$ $\boxed{c}$



②

إذا علمت أن نقطة المنتصف لـ $A(1,3,a)$ و $B(3,1,1)$ هي $M(c,2,0)$، فإن قيمة $a+c$ هي:

a) 1 b) 2 c) 3 d) −1

الحل

$$\left(\frac{3+1}{2}, \frac{1+3}{2}, \frac{1+a}{2}\right) = (c,2,0)$$

$$\frac{3+1}{2} = c \Rightarrow c = 2$$

$$\frac{1+3}{2} = 2 \Rightarrow 2 = 2$$

$$\frac{1+a}{2} = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$a + c = -1 + 2 = 1$$

$\boxed{a}$

دائرة مركزها نقطة الأصل، والنقطة $(1,-2,2)$ تقع عليها. فما طول قطرها

a) 3 b) $\frac{3}{2}$ c) 6 d) 9

الحل

$$\Rightarrow r = \sqrt{(1-0)^2 + (-2-0)^2 + (2-0)^2}$$

$$r = \sqrt{9}$$

$$r = 3 \Rightarrow \text{القطر} = 6$$

أي النقاط التالية تقع داخل كرة طرفا قطر فيها $(1,5,2)$ و $(3,1,0)$

a) $(0,0,0)$ b) $(3,1,2)$ c) $(3,3,3)$ d) $(10,100,1000)$

الحل مركز الكرة $\left(\frac{1+3}{2}, \frac{5+1}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = (2,3,1)$

$$2r = \sqrt{(3-1)^2 + (1-5)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{24} \Rightarrow r = \frac{1}{2}\sqrt{24} = \sqrt{6}$$

المركز $(2,3,1)$ جرب $\rightarrow$ a) $\Rightarrow \sqrt{(2-0)^2 + (3-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{14} \Rightarrow$ خارج ✗

b) $\Rightarrow \sqrt{(3-2)^2 + (1-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{6}$

c) $\Rightarrow \sqrt{(3-2)^2 + (3-3)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{5} \xrightarrow{\text{على سطحها}}$ داخل $\Rightarrow \boxed{c}$

(3)

إذا كان $\overrightarrow{AB} = \langle 1, -3, 2 \rangle$ ، وكانت $B(3, 1, 5)$ فإن احداثيات A هي

a) $(4, -2, 7)$ b) $(-2, -4, -3)$ c) $(2, 3, 4)$ d) $(2, 4, 3)$

الحل $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{AB}$

$= \langle 3, 1, 5 \rangle - \langle 1, -3, 2 \rangle$

$= \langle 2, 4, 3 \rangle \Longrightarrow \boxed{d}$

إذا كان $A(1, 1, 1)$ و $B(3, 9, -1)$ و M هي نقطة منتصف $\overline{AB}$ ، فإن $\overrightarrow{OM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ تساوي

a) $\langle 0, 0, 0 \rangle$ b) $\langle 1, 1, 1 \rangle$ c) $\langle 2, 1, 3 \rangle$ d) $\langle 3, 1, 2 \rangle$

الحل $M\left(\frac{3+1}{2}, \frac{9+1}{2}, \frac{-1+1}{2}\right) = (2, 5, 0) \Longrightarrow \boxed{\overrightarrow{OM} = \langle 2, 5, 0 \rangle}$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \langle 3, 9, -1 \rangle - \langle 1, 1, 1 \rangle$

$= \langle 2, 8, -2 \rangle \Longrightarrow \boxed{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \langle 1, 4, -1 \rangle}$

$\Longrightarrow \overrightarrow{OM} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \langle 2, 5, 0 \rangle - \langle 1, 4, -1 \rangle$

$= \langle 1, 1, 1 \rangle$

طول القطعة المستقيمة $\overline{AB}$ في السؤال السابق هو :

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 8^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 64 + 4} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

④

إذا كان طول القطعة المستقيمة الواصلة بين $A(a,1,3)$ و $B(7,2,1)$ هو 3 ، فما قيمة a

a) 4,3 b) 2,0 c) 3,1 d) 5,9

الحل $\overrightarrow{AB} = \langle 7-a, 1, -2 \rangle \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(7-a)^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3$

$(7-a)^2 + 5 = 9 \Rightarrow (7-a)^2 = 4$

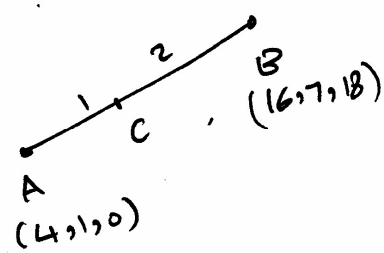
$(7-a) = \pm 2$ ، $7-a = 2 \Rightarrow a = 5$ ، $7-a = -2 \Rightarrow a = 9$

$\boxed{d}$

إذا كانت النقطة c تقع على القطعة المستقيمة $\overrightarrow{AB}$ حيث $AC : CB = 1:2$ ، فما احداثيات c علماً أن احداثيات $A(4,1,0)$ و $B(16,7,18)$

a) (4,2,6) b) (8,3,6) c) (10,4,9) d) (5,0,10)

الحل $\overrightarrow{AB} = \langle 16-4, 7-1, 18-0 \rangle$
$= \langle 12, 6, 18 \rangle$



$AC : AB = 1:3$

$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\langle 12, 6, 18 \rangle$
$= \langle 4, 2, 6 \rangle$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} \Rightarrow$

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OA}$
$= \langle 4, 2, 6 \rangle + \langle 4, 1, 0 \rangle$
$= \langle 8, 3, 6 \rangle \Longrightarrow \boxed{b}$

⑤

إذا كانت $\vec{v} = a\hat{i} + b\hat{j} + 2\hat{k}$ ، $\vec{u} = 8\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$
وكانت $\vec{u} + 2\vec{v} = 3a\hat{j}$ ، فما قيمة b

$$\langle 8, 2, -2 \rangle + 2\langle a, b, 1 \rangle = \langle 0, 3a, 0 \rangle$$

$$\langle 8+2a, 2+2b, -2+2 \rangle = \langle 0, 3a, 0 \rangle$$

$$8+2a=0 \Rightarrow a=-4$$

$$2+2b=3a \Rightarrow 2+2b=-12$$

$$2b=-14 \Rightarrow \boxed{b=-7}$$

إذا كانت $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ q \end{pmatrix}$ ، $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ، وكانت
$|3\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{41}$ ، فما قيمة q

$$3\vec{a} - \vec{b} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3q-1 \end{pmatrix}$$

$$|3\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{1^2 + 6^2 + (3q-1)^2} = \sqrt{41}$$

$$(3q-1)^2 = 4 \Rightarrow 3q-1=2 \Rightarrow \boxed{q=1}$$

$$3q-1=-2 \Rightarrow \boxed{q=-\frac{1}{3}}$$

(6)

إذا كان $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j}$ ، $\vec{b} = \hat{i} + \hat{k}$ ، وكان $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ ، فإن $\hat{c}$ تساوي

a) $2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ b) $+2\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ ~~c) $2\hat{i} - 3\hat{k}$ d)~~

c) $2\hat{i} - 3\hat{k}$ d) $\frac{2}{3}\hat{i} - \frac{2}{3}\hat{j} - \frac{1}{3}\hat{k}$

$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \langle 3, -2, 0 \rangle - \langle 1, 0, 1 \rangle$

$= \langle 2, -2, -1 \rangle$

$|c| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$

$\hat{c} = \frac{\vec{c}}{c} = \frac{\langle 2, -2, -1 \rangle}{3} = \langle \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3} \rangle \Longrightarrow \boxed{d}$

إذا كان C هي نقطة منتصف $A(1,3,2)$ & $(3,-1,2)$ فإن متجه سجه الوحدة الذي له نفس اتجاه $\vec{CO}$ (حيث O نقطة الأصل) هو :

a) $\langle \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \rangle$ b) $\langle \frac{-2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3} \rangle$ c) $\langle 2, 1, 2 \rangle$ d) $\langle -2, -1, -2 \rangle$

إن $C\left(\frac{3+1}{2}, \frac{-1+3}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = (2, 1, 2)$

$\vec{OC} = \langle 2, 1, 2 \rangle \Rightarrow \vec{CO} = \langle -2, -1, -2 \rangle$

$\hat{CO} = \frac{\vec{CO}}{|CO|} = \dots = \langle -\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3} \rangle \boxed{b}$

المتجه الذي طوله 3 وحدات وله نفس اتجاه المحور y هو

a) $\langle 1, 0, 1 \rangle$ b) $\langle 1, 3, 1 \rangle$ c) $\langle 0, 3, 0 \rangle$ d) $\langle 0, 0, 3 \rangle$

إن $3\hat{j} = 3\langle 0, 1, 0 \rangle = \langle 0, 3, 0 \rangle \Rightarrow \boxed{c}$

7

$\vec{u} = \langle -4, 2, 4 \rangle$

المتجه الذي طوله 3 وحدات ، ويعاكس المتجه في الاتجاه هو:

a) $\langle -2, 1, 2 \rangle$ b) $\langle 2, -1, 2 \rangle$ c) $\langle 2, -1, -2 \rangle$ d) $\langle 1, 1, 1 \rangle$

$$\hat{u} = \frac{\vec{u}}{|u|} = \frac{\langle -4, 2, 4 \rangle}{\sqrt{16+4+16}} = \langle -\tfrac{4}{6}, \tfrac{2}{6}, \tfrac{4}{6} \rangle$$

$$\vec{v} = -3\,\hat{u} = -3 \langle -\tfrac{4}{6}, \tfrac{2}{6}, \tfrac{4}{6} \rangle = \langle 2, -1, -2 \rangle$$

يعاكس

طوله 3

$\Rightarrow \boxed{c}$

إذا كان $\vec{t} = \begin{pmatrix} 3 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}$ ، $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ ، تحقق المعادلة $c\vec{w} + 2\vec{t} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ ، فما قيم الثوابت a ، b ، c

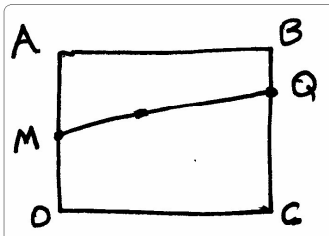
$$c\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2c+6 \\ 0+2a \\ cb+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$2c + 6 = 10 \Rightarrow 2c = 4 \Rightarrow \boxed{c = 2}$

$2a = 6 \Rightarrow \boxed{a = 3}$

$cb + 4 = -2 \Rightarrow 2b = -6 \Rightarrow \boxed{b = -3}$

⑥



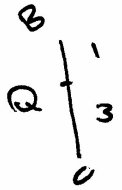
جديد

في المربع OABC ،
M هي نقطة منتصف $\overline{OA}$
Q تقسم BC بنسبة $BQ:QC=1:3$
P هي نقطة تقاطع $\overline{AC}$ و $\overline{MQ}$
إذا اعتبرنا $\vec{OA}=\vec{a}$ و $\vec{OC}=\vec{c}$ ،
احسب MQ بدلالة $\vec{a}$ و $\vec{c}$

الحل

$\vec{OM}=\frac{1}{2}\vec{OA}=\frac{1}{2}\vec{a}$

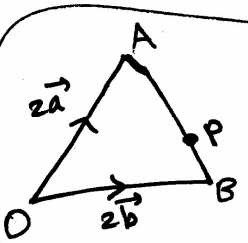
$\vec{CQ}=\frac{3}{4}\vec{CB}=\frac{3}{4}\vec{OA}=\frac{3}{4}\vec{a}$



$\vec{MQ}=\vec{MO}+\vec{OC}+\vec{CQ}$

$=-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{c}+\frac{3}{4}\vec{a}=\boxed{\frac{1}{4}\vec{a}+\vec{c}}$

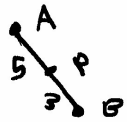
من الكتاب



في المثلث OAB المجاور . تقع النقطة P على الضلع AB حيث $AP:PB=5:3$ ،
إذا كان $\vec{OP}=k(3\vec{a}+5\vec{b})$ ، فما قيمة العدد الحقيقي k ؟

الحل

$\vec{AB}=\vec{AO}+\vec{OB}=-2a+2\vec{b}$



$\vec{BP}=\frac{3}{8}\vec{BA}=\frac{3}{8}\left(-(-2a+2b)\right)$

$=\frac{3\vec{a}}{4}-\frac{3\vec{b}}{4}$

$\vec{OP}=\vec{OB}+\vec{BP}=2\vec{b}+\left(\frac{3a}{4}-\frac{3b}{4}\right)=\frac{3\vec{a}}{4}+\frac{5\vec{b}}{4}$

$\vec{OP}=\frac{1}{4}(3\vec{a}+5\vec{b})\Longrightarrow\boxed{k=\frac{1}{4}}$

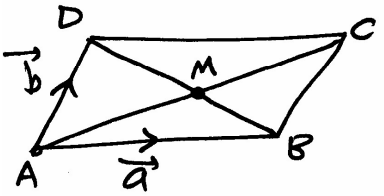
(9)

من الكتاب

ABCD متوازي أضلاع فيه $\vec{AB}=\vec{a}$ ، $\vec{AD}=\vec{b}$

$\vec{AC}=2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ ، $\vec{BD}=-6\hat{i}+7\hat{j}+2\hat{k}$

جد كلاً من $\vec{a}$ ، $\vec{b}$ بدلالة متجهات الوحدة الأساسية



$\vec{BC}=\vec{AD}=\vec{b}$

$\vec{DC}=\vec{AB}=\vec{a}$

$\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{BC} \Rightarrow \vec{AC}=\vec{a}+\vec{b}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{a}+\vec{b}=2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}}$ —— (1)

$\vec{BD}=\vec{BA}+\vec{AD} \Rightarrow \vec{BD}=-\vec{a}+\vec{b}$

$\boxed{-\vec{a}+\vec{b}=-6\hat{i}+7\hat{j}+2\hat{k}}$ —— (2)

نجمع المعادلتين

$2\vec{b}=-4\hat{i}+10\hat{j}+6\hat{k}$

$\boxed{\vec{b}=-2\hat{i}+5\hat{j}+3\hat{k}}$

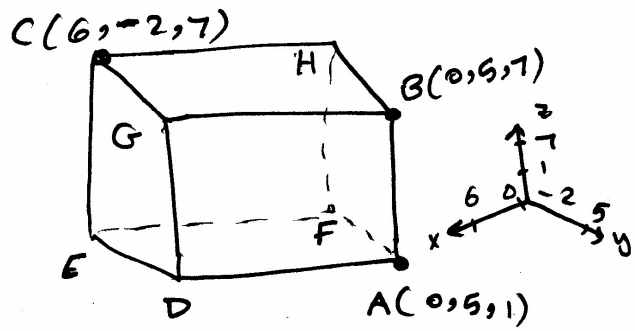
نطرح المعادلتين

$2\vec{a}=8\hat{i}-4\hat{j}+2\hat{k}$

$\boxed{\vec{a}=4\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}}$

(١٥)

تمثل النقاط $A(0,5,+1)$ $B(0,5,7)$ $C(6,-2,7)$ ثلاثة رؤوس متوازي مستطيلات، كل وجهين من أوجهه يوازيان أحد المستويات xy, xz, yz . اكتب احداثيات الرؤوس الخمسة الأخرى. مبرراً اجابتي



$\Delta z = 7-1 = 6$

$\Delta x = 6-0 = 6$

$\Delta y = 5--2 = 7$

D : ازاحة A باتجاه x الموجب 6 ⇐ $D(6,5,1)$

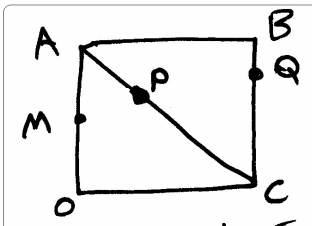
F : ازاحة A باتجاه y السالب 7- ⇐ $F(0,-2,1)$

E ازاحة C باتجاه z السالب 6- ⇐ $E(0,-2,7)$

G ازاحة C باتجاه y الموجب 7 ⇐ $G(6,5,7)$

H ازاحة B باتجاه y السالب 7- ⇐ $H(0,-2,7)$

(11)



هندسة في المربع OABC ،
M هي نقطة منتصف $\overline{OA}$
Q تقسم $\overline{BC}$ بنسبة $BQ:QC=1:3$
P تقع على $\overline{AC}$ حيث $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{PC}$
أثبت أن النقاط MPQ تقع على استقامة واحدة

حل $\underline{\underline{MQ}}$

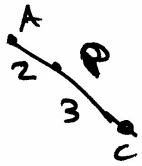
$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\vec{a}$

$\overrightarrow{CQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OA}=\frac{3}{4}\vec{a}$

$\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CQ}$

$=-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{c}+\frac{3}{4}\vec{a}$

$\boxed{\overrightarrow{MQ}=\frac{1}{4}\vec{a}+\vec{c}}$



$\underline{\underline{\overrightarrow{PQ}}}$:

$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA}$

$\boxed{\overrightarrow{CA}=-\vec{c}+\vec{a}}$

$\overrightarrow{CP}=\frac{3}{5}\overrightarrow{CA}=\frac{3}{5}(-\vec{c}+\vec{a})$

$\boxed{\overrightarrow{CP}=\frac{3}{5}\vec{a}-\frac{3}{5}\vec{c}}$

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CQ}$

$=-(\frac{3}{5}\vec{a}-\frac{3}{5}\vec{c})+\frac{3}{4}\vec{a}$

$\boxed{\overrightarrow{PQ}=\frac{3}{20}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{c}}$

$\Longrightarrow \overrightarrow{PQ}=\frac{3}{5}\ \frac{1}{4}\vec{a}+\vec{c}$

$\boxed{\overrightarrow{PQ}=\frac{3}{5}\overrightarrow{MQ}}$ $\Longrightarrow$ $\overrightarrow{PQ}$ $\overrightarrow{MQ}$ متوازيات

Q نقطة مشتركة

$\Longleftarrow$ على استقامة واحدة

(12)

بين إذا كان الشكل الرباعي ABCD يمثل متوازي أضلاع
$A(12,5,-8)$ $B(6,2,-10)$ $C(-8,1,13)$ $D(-2,4,15)$

الحل

$\overrightarrow{AB} = \dots = \langle -6,-3,-2 \rangle$

$\overrightarrow{BC} = \dots = \langle 14,-1,23 \rangle$

$\overrightarrow{CD} = \dots = \langle 6,3,2 \rangle$

$\overrightarrow{DA} = \langle 14,1,-23 \rangle$

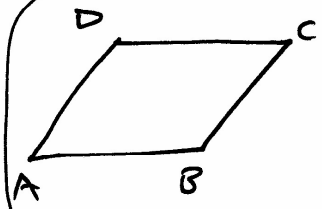
$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$ نفس الطول، متوازيان

$\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA}$ نفس الطول، متوازيان

كل ضلعين متقابلين متوازيين ولهما الطول نفسه

متوازي أضلاع

في الشكل الرباعي المبين في الشكل المجاور



إذا علمت أن ~~AB∥DC~~

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

وأن احداثيات ثلاثة من رؤوسه هي

$A(3,1,-6)$, $B(5,-2,0)$, $C(8,-4,-6)$

① ما احداثيات النقطة D

② بين أن الشكل ABCD معين.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \dots = \langle 2,-3,6 \rangle$ $\qquad \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ (الطلب)

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} \Rightarrow \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{DC}$

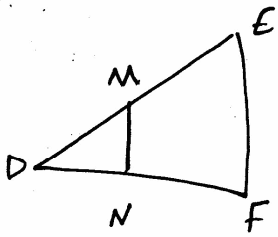
$= \langle 8,-4,-6 \rangle - \langle 2,-3,6 \rangle$

$= \langle 6,-1,-12 \rangle \Rightarrow \boxed{D(6,-1,-12)}$

أولا $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ من الطلب
$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ $\Longrightarrow$ كل ضلعين متقابلين متوازيين ومتساويين في الطول $\Leftarrow$ متوازي أضلاع

أيضاً $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+4+36} = 7$
$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{9+4+36} = 7$ $\Longrightarrow$ ضلعان متجاوران متساويان في الطول $\Leftarrow$ معين

من الكتاب مهارات



في الشكل المجاور $DE = 12\vec{a}$

$DF = 8\vec{b}$

والنقطة M تقسم $\overline{DE}$ بنسبة 1:2

والنقطة N تقسم $\overline{DF}$ بنسبة 1:2

① أثبت أن FEMN شبه منحرف

② إذا كانت مساحة المثلث DEF تساوي 72 وحدة مربعة، فأوجد مساحة FEMN

حل ① $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DE} = -8\vec{b} + 12\vec{a} = 12\vec{a} - 8\vec{b}$

$DN : NF = 1:2 \Rightarrow DN : DF = 1:3 \Rightarrow \overrightarrow{DN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DF} \Rightarrow \overrightarrow{DN} = \frac{8}{3}\vec{b}$

$DM : ME = 1:2 \Rightarrow DM : DE = 1:3 \Rightarrow \overrightarrow{DM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DE} \Rightarrow \overrightarrow{DM} = \frac{12}{3}\vec{a}$

$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{DM} = -\frac{8}{3}\vec{b} + \frac{12}{3}\vec{a} = \frac{1}{3}(12\vec{a} - 8\vec{b})$

$\Rightarrow NM \parallel FE \Rightarrow$ قاعدتين متوازيات $\Rightarrow$ شبه منحرف

حل ②

$A_{DEF} = \frac{1}{2}(DE)(DF)\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{144}{(DE)(DF)}$

$A_{DMN} = \frac{1}{2}(DN)(DM)\sin\theta = \frac{1}{2}(DN)(DM) \cdot \frac{144}{(DE)(DF)}$

$A_{DMN} = 72 \frac{DN}{DF} \frac{DM}{DF} = 72 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = 8$

$\Rightarrow A_{\text{شبه المنحرف}} = 72 - 8 = \boxed{64}$

(13)

إذا كان $\vec{a}$ و $\vec{b}$ متوازيان ، حيث $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\1\\c\end{pmatrix}$ و $\vec{b}=\begin{pmatrix}6\\2\\8\end{pmatrix}$

فإن $\vec{a}+\vec{b}$ تساوي

a) $\vec{a}$ b) $2\vec{a}$ c) $3\vec{a}$ d) 0

الحل $\frac{6}{3}=\frac{2}{1}=\frac{8}{c} \Rightarrow 2c=8 \Rightarrow \boxed{c=4}$

$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\2\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\3\\12\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}3\\1\\4\end{pmatrix}=3\vec{a}$

إذا كان $A(a,b,5)$ و $B(1,2,3)$ و $C(2,3,2)$ ثلاث نقاط تقع على مستقيم واحد ، فجد المسافة بين النقطتين A و B :

a) $3\sqrt{2}$ b) $\sqrt{26}$ c) $2\sqrt{3}$ d) 3

الحل $\overrightarrow{AB}=\langle 1-a, 2-b, -2\rangle$

$\overrightarrow{CB}=\langle -1, -1, 1\rangle$

تقع على استقامة واحدة $\Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CB} \Rightarrow \frac{1-a}{-1}=\frac{2-b}{-1}=\frac{-2}{1}$

$\frac{1-a}{-1}=-2 \Rightarrow \boxed{a=-1}$

$\frac{2-b}{-1}=-2 \Rightarrow \boxed{b=0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=\langle 1--1, 2-0, -2\rangle$

$=\langle 2, 2, -2\rangle$

المسافة بين A و B $=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(2)^2+(2)^2+(-2)^2}=\sqrt{12}$

$=2\sqrt{3}$ $\boxed{c}$

(14)

مشكلة موازاة المحور

إذا كان $\vec{u} = \langle a, b, c \rangle$ في نفس اتجاه x الموجب فما قيمة كل من a و b و c علماً $|\vec{u}| = 3$

الحل $\langle a, b, c \rangle \parallel \langle 1, 0, 0 \rangle$

$\frac{a}{1} = \frac{b}{0} = \frac{c}{0}$???

كثرة الاصفار
غريبة الطريقة

طريقة ② $\langle a, b, c \rangle \parallel \langle 1, 0, 0 \rangle$

$\Rightarrow \boxed{\begin{matrix} b = 0 \\ c = 0 \end{matrix}}$ ✓

$\Rightarrow \vec{v} = \langle a, 0, 0 \rangle$

$|\vec{v}| = 3 \Rightarrow \sqrt{a^2 + 0 + 0} = 3 \Rightarrow \boxed{a = 3}$

$\Rightarrow \vec{v} =$

من الكتاب

إذا كان $\vec{v} = a\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ c \end{pmatrix}$ ، فجد قيمة كل من a, b, c علماً أن اتجاه $\vec{v}$ في نفس اتجاه محور y الموجب، $|\vec{v}| = 34$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3a + b \\ -5a + 4b \\ 6a + bc \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{3a + b = 0}$ ①

$\frac{-5a + 4b}{1} = ??$

$\boxed{6a + bc = 0}$ ②

$\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5a + 4b \\ 0 \end{pmatrix}$ $|\vec{v}| = \sqrt{0 + (-5a + 4b)^2 + 0} = 34$

$\Longrightarrow \boxed{-5a + 4b = 34}$ ③

ثم ثلاث معادلات بثلاث مجاهيل ... طنش

(16)

اكتب معادلة متجهة للمستقيم الموازي لـ $\vec{v}=\langle 1,2,3\rangle$ والمار بـ $\langle 2,0,1\rangle$

$\vec{r}=\vec{r_0}+t\vec{v}=\langle 2,0,1\rangle+t\langle 1,2,3\rangle$

اكتب معادلة متجهة للمستقيم المار لـ $\langle 1,0,1\rangle$ والموازي للمحور y

$\vec{r}=\vec{r_0}+t\vec{v}=\langle 1,0,1\rangle+t\langle 0,1,0\rangle$

المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطتين $A(3,1,2)$ & $B(5,-1,2)$ هي

a) $\vec{r}=\langle 3,1,2\rangle+t\langle 1,-1,0\rangle$ b) $\vec{r}=t\langle 1,-1,0\rangle$

c) $\vec{r}=\langle 3,1,2\rangle+t\langle 1,2,3\rangle$ d) $\vec{r}=t\langle 0,0,1\rangle$

الحل $\overrightarrow{AB}=\langle 2,-2,0\rangle$

$\vec{r}=\langle 3,1,2\rangle+t\langle 2,-2,0\rangle$

أو $\vec{r}=\langle 3,1,2\rangle+t\langle 1,-1,0\rangle$ $\Rightarrow$ $\boxed{a}$

إذا لم تجده في الخيارات اضرب أو اقسم $\vec{v}$ برقم

المعادلة المتجهة للمستقيم المار بـ $A(1,2)$ & $B(3,4)$ هي

a) $\vec{r}=\langle 1,2\rangle+t\langle 1,1\rangle$ b) $\vec{r}=\langle 3,4\rangle+t\langle 1,2\rangle$

c) — d) —

$\overrightarrow{AB}=(2,2)\Rightarrow \vec{v}=\langle 1,1\rangle \Rightarrow r=\langle 1,2\rangle+t\langle 1,1\rangle \Rightarrow \boxed{a}$

(16)

إذا كانت $\vec{r} = \langle 3,2,5\rangle + t\langle 1,2,-1\rangle$ تمثل معادلة متجهة المستقيم l

① بيّن أن النقطة $(5,6,3)$ تقع على المستقيم l

② إذا كانت النقطة $(b, a-3, 6)$ تقع على l فما قيمة a و b

③ جد نقطة تقاطع المستقيم l مع المستوى xy

④ جد متجه يوازي المستقيم l وطوله وحدة واحدة

① $\vec{r} = \langle 3+t, 2+2t, 5-t\rangle \overset{?}{=} (5,6,3)$

$3+t=5 \Rightarrow t=2$
$2+2t=6 \Rightarrow t=2$
$5-t=3 \Rightarrow t=2$

نعوض قيمة t ⇐ تقع عليها

② $\langle 3+t, 2+2t, 5-t\rangle = \langle b, a-3, 6\rangle$

$3+t=b$
$2+2t=a-3$
$5-t=6 \Rightarrow t=-1$

$\Rightarrow 3-1=b \Rightarrow \boxed{b=2}$
$\Rightarrow 2+2(-1)=a-3 \Rightarrow \boxed{a=3}$

③ $z=0 \Rightarrow 5-t=0 \Rightarrow t=5$

$\Rightarrow \langle 3+5, 2+2(5), 5-5\rangle \Rightarrow (8,12,0)$

④ $\vec{v} = \langle 1,2,-1\rangle$

$|\vec{v}| = \sqrt{1^2+2^2+1^2} = \sqrt{6}$

$\hat{v} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}} \right\rangle$

إذا كان $\vec{r}=(3+t)\hat{i}+(2-t)\hat{j}+3t\hat{k}$ تمثل معادلة متجهة للمستقيم l_1 . وكانت النقطة A هي نقطة تقاطع هذا المستقيم مع المستوى XZ . فجد معادلة متجهة للمستقيم l_2 الذي يوازي محور X ، ويمر بالنقطة A

الحل نحسب A $\Rightarrow$ $y=0 \Rightarrow 2-t=0 \Rightarrow t=2$

$$\vec{r}=2+2\,\hat{i}+2-2\,\hat{j}+3(2)\hat{k}$$
$$=4\hat{i}+0\hat{j}+6\hat{k}$$
$$\Rightarrow \boxed{A(4,0,6)}$$

l_2 $\vec{V}_2=\hat{i}=(1,0,0)$

$$\Rightarrow r=r_0+t\vec{V}$$
$$\boxed{r=\langle 4,0,6\rangle+t\langle 1,0,0\rangle}$$

إذا كان المستقيم $\vec{r}=\begin{pmatrix}5\\4\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}a-2\\a+b\\3\end{pmatrix}$

يوازي المحور Z ، فجد قيم a و b

الحل

$$\vec{V}=\langle a-2,\ a+b,\ 3\rangle$$
$$\hat{k}=\langle 0,0,1\rangle$$
$$\vec{V}\parallel\hat{k}\Rightarrow\langle a-2,\ a+b,\ 3\rangle=k\langle 0,0,1\rangle$$
$$\langle a-2,\ a+b,\ 3\rangle=\langle 0,0,k\rangle$$
$$a-2=0\Rightarrow\boxed{a=2}$$
$$a+b=0\Rightarrow b=-a\Rightarrow\boxed{b=-2}$$

(18)

هذه الأسئلة يمر المستقيم l بالنقطتين $U(p,-3,-1)$ و $V(2,5,-3)$ وتقع النقطة $A(7,1,q)$ على l

① جد قيمة p

② جد قيمة q

③ اكتب معادلة متجهة للمستقيم l

الحل

U و V و A تقع على مستقيم واحد

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AV} \parallel \overrightarrow{VU}$

$\langle -5, 4, -3-q \rangle \parallel \langle p-2, -8, 2 \rangle$

$\langle -5, 4, -3-q \rangle = k \langle p-2, -8, 2 \rangle$

طريقة الضرب دائري

$\left(\frac{p-2}{-5} = \frac{-8}{4} = \frac{-3-q}{2} \right)$

طريقة الحل

$-5 = k(p-2)$

$4 = k(-8) \longrightarrow k = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2}$

$-3-q = k(2)$

$\Rightarrow -5 = -\frac{1}{2}(p-2) \Rightarrow \boxed{p=12}$

$-3-q = (-\frac{1}{2})(2) \Rightarrow \boxed{q=-2}$

$\Rightarrow \overrightarrow{UV} = \langle 10, -8, 2 \rangle \xrightarrow[\text{ابسط}]{\div 2} \langle 5, -4, 1 \rangle$

$\Rightarrow \vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{v}$

$\boxed{r = \langle 2, 5, -3 \rangle + t \langle 5, -4, 1 \rangle}$

سؤال كالكولس: المعادلة المتجهة للمستقيم المار بالنقطة $(2,-7,5)$ والموازي للمستقيم $\vec{r}=\langle 2t+7,-3t+5,t+1\rangle$ هي

a) $\vec{r}=\langle 2t+2,-3t-7,t+5\rangle$ b) $\vec{r}=\langle 2t-2,-3t-7,t+5\rangle$

c) $\vec{r}=\langle 2t+2,-3t-7,t-5\rangle$ d) $\vec{r}=\langle 2t+2,3t+7,t+5\rangle$

الحل: $\vec{r}=\langle 2t+7,-3t+5,t+1\rangle$

$=\langle 7,5,1\rangle+\langle 2t,-3t,t\rangle$

$=\langle 7,5,1\rangle+t\langle 2,-3,1\rangle$

$\vec{v}=\langle 2,-3,1\rangle$

$\Rightarrow \vec{r}=\vec{r_0}+t\vec{v}$

$=\langle 2,-7,5\rangle+t\langle 2,-3,1\rangle$

$=\langle 2+2t,-7-3t,5+t\rangle$

$=\langle 2t+2,-3t-7,t+5\rangle \longrightarrow \boxed{a}$

سؤال كالكولس: جد معادلة متجهة للمستقيم المار بالنقطتين $A(1,2,3)$ و $B(5,6,-1)$

الحل: $\vec{v}=\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=\langle 1,2,3\rangle-\langle 5,6,-1\rangle$

$=\langle -4,-4,4\rangle$

$\vec{r}=\vec{r_0}+t\vec{v}$

$$\boxed{\vec{r}=\langle 1,2,3\rangle+t\langle -4,-4,4\rangle}$$

اجابات أخرى صحيحة

$\vec{r}=\langle 1,2,3\rangle+t\langle 4,4,-4\rangle$

$\vec{r}=\langle 1,2,3\rangle+t\langle -1,-1,1\rangle$

$\vec{r}=\langle 1,2,3\rangle+t\langle 1,1,-1\rangle$

$\vec{r}=\langle 5,6,-1\rangle+t$ "

س/ إذا كانت $\vec{r} = \langle 3,-3,-6\rangle + t\langle 2,-4,3\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_1 وكانت $\vec{r} = \langle 4,7,0\rangle + u\langle 1,2,3\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_2 حدد إذا كان l_1 و l_2 متوازيين أو متقاطعين أو متخالفين. ثم جد احداثيات نقطة تقاطعهما إن كانا متقاطعين

$$\frac{2}{1} \overset{?}{=} \frac{-4}{2} \overset{?}{=} \frac{3}{3} \quad \text{لا} \Rightarrow \vec{V_1} \neq k\vec{V_2} \Rightarrow \vec{V_1} \nparallel \vec{V_2}$$

ليسا متوازيين

$$\vec{r} = \vec{r} \longrightarrow \langle 3,-3,-6\rangle + t$$

$$= \langle 4,7,0\rangle + u\langle 1,2,3\rangle$$

$$\langle 3+2t, -3-4t, -6+3t\rangle = \langle 4+u, 7+2u, 3u\rangle$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3+2t = 4+u \\ -3-4t = 7+2u \end{cases} \longrightarrow \dots u=-3 \Rightarrow t=-1$$

المعادلة الثالثة $\quad -6+3(-1) \overset{?}{=} 3(-3)$

$$-9 = -9 \Longrightarrow \text{متقاطعان}$$

$$\vec{r} = \langle 3,-3,-6\rangle + -1\langle 2,-4,3\rangle$$

$$\vec{r} = \langle 1,1,-9\rangle \Longrightarrow (1,1,-9)$$

حدد فيما اذا كان المستقيمين

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$r = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

متوازيين أو متقاطعين أو متخالفين . ثم جد نقطة تقاطعهما إن كانا متقاطعين

الحل

$\vec{V_1} = \langle 1, 0, 1 \rangle$

$\vec{V_2} = \langle 0, -1, 1 \rangle$

$\longrightarrow \vec{V_1} \neq k\vec{V_2} \Rightarrow \vec{V_1} \nparallel \vec{V_2}$

المستقيمين ليسا متوازيين

$\vec{r} = \vec{r}$

$\langle 3, 1, 3 \rangle + t\langle 1, 0, 1 \rangle = \langle 5, 5, 5 \rangle + s\langle 0, -1, 1 \rangle$

$\langle 3+t, 1, 3+t \rangle = \langle 5, 5-s, 5+s \rangle$

$3+t = 5$

$1 = 5-s$

$3+t = 5+s$

$\longrightarrow t = 2, \; s = 4$

$\longrightarrow 3+2 \overset{?}{=} 5+4$

$5 \overset{?}{=} 4$ لا

ليسا متقاطعين

متخالفين

أقلعت طائرة من موقع احداثياته $A(3,3,0)$
ثم بعد مدة قصيرة اصبحت في موقع احداثياته $B(4,2,1)$
وفي نفس الوقت أطلقت طائرة من تحت الأرض من موقع احداثياته $C(4,-2,-3)$
وبعد فترة قصيرة مرت بموقع احداثياته $D(6,0,3)$
هل خطا سير الطائرتين متوازيين ام متقاطعين ام متخالفين
جد نقطة التقاطع إن كانا متقاطعين

الحل

$\vec{V_1} = \vec{AB} = \langle 4,2,1\rangle - \langle 3,3,0\rangle = \langle 1,-1,1\rangle$

$\vec{r_1} = \vec{r_0} + t\vec{V_1} = \boxed{\langle 3,3,0\rangle + t\langle 1,-1,1\rangle}$

$\vec{V_2} = \vec{CD} = \langle 6-4, 0-{-2}, 3-{-3}\rangle = \langle 2,2,6\rangle$

$\boxed{\vec{r_2} = \langle 4,-2,-3\rangle + u\langle 2,2,6\rangle}$

$\vec{V_1} \neq k\vec{V_2} \Longrightarrow \vec{V_1} \nparallel \vec{V_2}$ ⇒ المستقيمان ليسا متوازيين

$\vec{r_1} = \vec{r_2} \Rightarrow \langle 3+t, 3-t, t\rangle = \langle 4+2u, -2+2u, -3+6u\rangle$

$3+t = 4+2u$
$3-t = -2+2u$ $\longrightarrow 6 = 2+4u \longrightarrow \boxed{u=1} \Longrightarrow 3+t = 4+2(1)$, $\boxed{t=3}$

$t = -3+6u \xrightarrow[t=3]{u=2} 3 \overset{?}{=} -3+6(2)$
$3 \overset{?}{=} 3$ ✓ $\Longrightarrow$ متقاطعين

نقطة التقاطع $\xrightarrow{t=3} \vec{r} = \langle 3+3, 3-3, 3\rangle \Longrightarrow \boxed{(6,0,3)}$

هل طلعت معك قيم t & u مختلفة عن حلي؟ عادي
هل طلعت معك قيمة نقطة التقاطع مختلفة عن حلي؟ حسن عادي

س/ إذا كان المستقيم $\vec{r} = \langle 3+t, 2+2t, 2t \rangle$ يتقاطع مع المستقيم المار بالنقطتين $(5,6,a)$ ، $(3,5,3)$ فما قيمة a . ثم جد نقطة التقاطع

الحل: $\vec{r_2} \longrightarrow \vec{r_0} = \langle 3, 5, 3 \rangle$

$$\vec{V} = \langle 5-3, 6-5, a-3 \rangle = \langle 2, 1, a-3 \rangle$$

$$r = \langle 3, 5, 3 \rangle + u \langle 2, 1, a-3 \rangle$$

$$\boxed{r = \langle 3+2u, 5+u, 3+(a-3)u \rangle}$$

$$r = r \Longrightarrow \langle 3+t, 2+2t, 2t \rangle = \langle 3+2u, 5+u, 3+(a-3)u \rangle$$

$$\left.\begin{array}{l} 3+t = 3+2u \\ 2+2t = 5+u \end{array}\right\} \longrightarrow t = 2u \Rightarrow 2+2(2u) = 5+u$$

$$3u = 3 \longrightarrow \boxed{u=1}$$

$$\boxed{t=2}$$

$$2t = 3+(a-3)u$$

$$③ \longrightarrow 2(2) = 3+(a-3)(1) \Longrightarrow \boxed{a=4}$$

التقاطع $t=2 \longrightarrow (3+2, 2+2(2), 2(2)) = \boxed{(5,6,4)}$

س/ إذا كان المستقيم $\vec{r} = \langle 3+2t, 2+t, 2t \rangle$ يوازي المستقيم المار بالنقطتين $(5,6,a)$ ، $(3,5,3)$ جد a

الحل: $\vec{V_1} = \vec{r} = \langle 3, 2, 0 \rangle + t\langle 2, 1, 2 \rangle \Rightarrow \boxed{\vec{V_1} = \langle 2, 1, 2 \rangle}$

$$\vec{V_2} = \langle 5, 6, a \rangle - \langle 3, 5, 3 \rangle \Longrightarrow \vec{V_2} = \langle 2, 1, a-3 \rangle$$

$$\vec{V_1} \parallel \vec{V_2} \Longrightarrow \vec{V_1} = r\vec{V_2} \Longrightarrow \langle 2, 1, 2 \rangle = \underset{r=1}{r} \langle 2, 1, a-3 \rangle$$

$$\Longrightarrow a-3 = 2 \Longrightarrow \boxed{a=5}$$

تحـدٍّ: يمرُّ المســتقيم l_1 بالنقطــة Q التي متجه الموقــع لها هــو $\vec{\mathbf{q}} = \langle -6, 14, -19 \rangle$، ويمرُّ أيضًــا بالنقطة S التــي متجه الموقع لها هــو $\vec{\mathbf{s}} = \langle -4, 6, -3 \rangle$، ويمــرُّ المســتقيم l_2 بالنقطة $T(1, 9, 9)$، ويوازي المســتقيم: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 0, -6, 1 \rangle + t\langle 4,7,4 \rangle$. إذا تقاطع المســتقيم l_1 والمستقيم l_2 في النقطة U، فأُثبِت أنَّ المثلث STU متطابق الضلعين.

$\overrightarrow{QS} = \langle 2, -8, 16 \rangle$

يمكن تبسيط اتجاه $\overrightarrow{QS}$: $\vec{\mathbf{v}}_1 = \langle 1, -4, 8 \rangle$

إذن معادلة l_1 هي: $\vec{\mathbf{r}} = \langle -6, 14, -19 \rangle + t\langle 1, -4, 8 \rangle$

معادلة l_2 هي: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 1, 9, 9 \rangle + u\langle 4, 7, 4 \rangle$

لإيجاد نقطة تقاطعهما، نجد قيم u,t اللتين تجعلان $\vec{\mathbf{r}}$ في المعادلتين متساويين:

$$\langle -6 + t, 14 - 4t, -19 + 8t \rangle = \langle 1 + 4u, 9 + 7u, 9 + 4u \rangle$$

$$-6 + t = 1 + 4u \Rightarrow t - 4u = 7 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$14 - 4t = 9 + 7u \Rightarrow 4t + 7u = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$-19 + 8t = 9 + 4u \Rightarrow 4t - 2u = 14 \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$(3) - (2): 9u = -9 \Rightarrow u = -1, \qquad t = 3$$

وهاتان القيمتان تحققان أيضًا المعادلة (1)

نجد نقطة تقاطع l_1 و l_2 بتعويض $t = 3$ في معادلة l_1 :

$$\vec{\mathbf{r}} = \langle -6, 14, -19 \rangle + 3\langle 1, -4, 8 \rangle = \langle -3, 2, 5 \rangle$$

إذن، نقطة تقاطع l_1 و l_2 هي: $U(-3,2,5)$

الآن لدينا أيضًا $T(1,9,9), S(-4,6,-3)$

$$TU = \sqrt{16 + 49 + 16} = 9$$

$$SU = \sqrt{1 + 16 + 64} = 9$$

بما أن $TU = SU$ إذن، ΔSTU متطابق الضلعين.

اطلع على السؤالي التالي :

المستقيمات الآتية معادلاتها المتجهة هي: $\vec{\mathbf{r}}=\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}+q\begin{pmatrix}2\\-5\\2\end{pmatrix}$، و $\vec{\mathbf{r}}=\begin{pmatrix}1\\5\\-4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$، و $\vec{\mathbf{r}}=\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}5\\-2\\-4\end{pmatrix}$.

أُبيِّن أنَّ هذه المستقيمات تُكوِّن مثلثًا، ثم أجد أطوال أضلاعه.

نثبت أن كل زوج من أزواج المستقيمات، متقاطعان، ونجد نقاط التقاطع (رؤوس المثلث):

متجه موقع أي نقطة على المستقيمات الثلاثة على التوالي تعطى كما يأتي:

$$\begin{pmatrix}-3+5t\\1-2t\\4-4t\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1+s\\5+s\\-4-2s\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2+2q\\-1-5q\\2q\end{pmatrix}$$

أولًا:

$\langle -3+5t, 1-2t, 4-4t\rangle = \langle 1+s, 5+s, -4-2s\rangle$

$-3+5t=1+s \Rightarrow 5t-s=4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$1-2t=5+s \Rightarrow 2t+s=-4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

$4-4t=-4-2s \Rightarrow 2t-s=4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

$(1)+(2): 7t=0 \Rightarrow t=0\ ,s=-4$

نفحص تحقق المعادلة (3) عند $t=0\ ,s=-4$: $2(0)-(-4)=4$ ✓

إذن، يتقاطع المستقيمان، ونقطة تقاطعهما هي: $A(-3,1,4)$

ثانيًا :

$\langle 1+s, 5+s, -4-2s\rangle = \langle 2+2q, -1-5q, 2q\rangle$

$1+s=2+2q \Rightarrow s-2q=1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$5+s=-1-5q \Rightarrow s+5q=-6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

$-4-2s=2q \Rightarrow s+q=-2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

$(2)-(1): 7q=-7 \Rightarrow q=-1\ ,s=-1$

نفحص تحقق المعادلة (3) عند $q=-1\ ,s=-1$: $(-1)+(-1)=-2$ ✓

إذن، يتقاطع المستقيمان، ونقطة تقاطعهما هي: $B(0,4,-2)$

ثالثًا :

$\langle -3+5t, 1-2t, 4-4t\rangle = \langle 2+2q, -1-5q, 2q\rangle$

$-3+5t=2+2q \Rightarrow 5t-2q=5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$1-2t=-1-5q \Rightarrow 2t-5q=2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

$4-4t=2q \Rightarrow 2t+q=2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

$(3)-(2): 6q=0 \Rightarrow q=0\ ,t=1$

نفحص تحقق المعادلة (1) عند $q=0\ ,t=1$: $5(1)-2(0)=5$ ✓

إذن، يتقاطع المستقيمان، ونقطة تقاطعهما هي: $C(2,-1,0)$

كل مستقيمين يتقاطعان في نقطة، فهذه المستقيمات تكون مثلثًا، أطوال أضلاعه:

$AB=\sqrt{9+9+36}=\sqrt{54}$

$BC=\sqrt{4+25+4}=\sqrt{33}$

$AC=\sqrt{25+4+16}=\sqrt{45}$

جد نقطة (نقاط) تقع على المستقيم $\vec{r} = \langle 2+t, 2-t, 1+t \rangle$ والمسافة بينها وبين النقطة $(1,0,4)$ تساوي 3 وحدات

الحل

$$\text{المسافة} = \sqrt{(2+t-1)^2 + (2-t-0)^2 + (1+t-4)^2}$$

$$= \sqrt{(t+1)^2 + (2-t)^2 + (t-3)^2} = 3$$

$$t^2+2t+1+4-4t+t^2+t^2-6t+9 = 9$$

$$3t^2 - 8t + 5 = 0$$

$$\Rightarrow (3t-5)(t-1) = 0$$

$$\Rightarrow t=1 \longrightarrow \vec{r} = (3,1,2)$$

$$t = \frac{5}{3} \longrightarrow \vec{r} = \left(\frac{11}{3}, \frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

يمرُّ المستقيم l بالنقطتين: $A(2, 1, 3)$، و $B(5, -2, 1)$. إذا وقعت النقطة C على المستقيم l، وكان $AC = 3CB$، فأجد جميع إحداثيات النقطة C المُمكِنة.

$$\overrightarrow{AB} = \langle 3, -3, -2 \rangle$$

معادلة المستقيم:

$$\vec{\mathbf{r}} = \langle 2,1,3 \rangle + t\langle 3, -3, -2 \rangle$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OC} = \langle 2+3t, 1-3t, 3-2t \rangle$$

$$AC = 3CB \Rightarrow |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}| = 3|\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}|$$

$$\Rightarrow \sqrt{(2+3t-2)^2 + (1-3t-1)^2 + (3-2t-3)^2} = 3\sqrt{(2+3t-5)^2 + (1-3t+2)^2 + (3-2t-1)^2}$$

$$\Rightarrow 8t^2 - 18t + 9 = 0$$ (بتربيع الطرفين وفك الأقواس)

$$\Rightarrow (2t-3)(4t-3) = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{3}{2} \Rightarrow C\left(\frac{13}{2}, -\frac{7}{2}, 0\right) \quad \text{أو} \quad t = \frac{3}{4} \Rightarrow C\left(\frac{17}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right)$$

① إذا كان $\vec{u}=\langle 1,2,3\rangle$ ، $\vec{v}=\langle 2,0,4\rangle$ ، فإن $\vec{u}\cdot\vec{v}$ تساوي:

a) 16 b) 14 c) 12 d) 0

الحل $\vec{u}\cdot\vec{v}=(1)(2)+2(0)+3(4)=2+12=14 \Longrightarrow \boxed{b}$

② إذا كان $\vec{u}=3\hat{j}-\hat{k}$ و $\vec{v}=\hat{i}+\hat{k}$ ، فإن $\vec{u}\cdot\vec{v}$ تساوي:

a) 2 b) 1 c) −1 d) 0

الحل $\vec{u}\cdot\vec{v}=\langle 0,3,-1\rangle\cdot\langle 1,0,1\rangle=0+0-1=-1 \Longrightarrow \boxed{c}$

③ إذا كان $\vec{a}=\langle 1,3,2\rangle$ و $\vec{b}=\langle 1,0,1\rangle$ و $\vec{c}=\langle 2,1,-1\rangle$ فجد قيمة $\vec{a}\cdot(\vec{b}+2\vec{c})$

الحل $\vec{b}+2\vec{c}=\langle 1,0,1\rangle+2\langle 2,1,-1\rangle=\langle 5,2,-1\rangle$

$\vec{a}\cdot(\vec{b}+2\vec{c})=\langle 1,3,2\rangle\cdot\langle 5,2,-1\rangle=5+6-2=9$

④ تحدي إذا علمت أن $A(1,2,3)$ ، $B(-2,4,1)$ ، $C(u,0,1)$ وكان المتجهان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ متعامدان، جد قيمة الثابت u

الحل $\overrightarrow{AB}=\langle -2,4,1\rangle-\langle 1,2,3\rangle=\langle -3,2,-2\rangle$

$\overrightarrow{BC}=\langle u,0,1\rangle-\langle -2,4,1\rangle=\langle u+2,-4,0\rangle$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0 \Longrightarrow \langle -3,2,-2\rangle\cdot\langle u+2,-4,0\rangle=0$

متعامدين

$-3(u+2)-8=0 \Longrightarrow -3u-6-8=0$

$\Longrightarrow -3u=14 \Longrightarrow \boxed{u=-\frac{14}{3}}$

س/ إذا كان $\vec{u}=\langle 1,2,-1\rangle$ ، $\vec{v}=\langle 2,1,2\rangle$ فإن θ تساوي

a) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$ b) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ c) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3\sqrt{6}}\right)$ d) none

الحل $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{|u||v|}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{2+2-2}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{6}}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{2}{3\sqrt{6}}\right)$

س/ إذا كان $\vec{u}=\langle 1,+1,1\rangle$ ، $\vec{v}=\langle -2,1,2\rangle$ فإن θ تساوي:

a) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ b) $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ c) $\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ d) none

الحل $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{|u||v|}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{-2+1-2}{3\sqrt{3}}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{-3}{3\sqrt{3}}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

س/ إذا كان $\vec{u}=\langle 1,2,1\rangle$ ، $\vec{v}=\langle 3,1,1\rangle$ ، فإن θ تساوي

a) 0 b) $\frac{\pi}{2}$ c) π d) none

الحل $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{-3+2+1}{|u||v|}\right)=\cos^{-1}(0)=\frac{\pi}{2}\Longrightarrow \boxed{b}$

س/ إذا كانت الزاوية بين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هي $\frac{\pi}{3}$ ، وكان $\vec{u}=\langle a,1,0\rangle$ ، $\vec{v}=\langle 1,0,1\rangle$ ، فجد a

الحل $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{uv}\right)\Rightarrow \cos\frac{\pi}{3}=\frac{u\cdot v}{|u||v|}\Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{a+0-0}{\sqrt{a^2+1}\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \sqrt{2}\sqrt{a^2+1}=2a\Longrightarrow 2a^2+2=4a^2$

$a^2=1\longrightarrow \boxed{a=1}$ تهمل

س/ إذا كان $\vec{u}=\langle 1,2,-1\rangle$ و $\vec{v}=\langle 2,1,2\rangle$ فجد قيمة الزاوية بينهما

a) 35.3° b) 65.9° c) 74.2° d) none

الحل $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|u||v|}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{2+2-2}{3\sqrt{6}}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{2}{3\sqrt{6}}\right)=74^\circ$

حـزام ناقل: يُمثِّل المتجـه: $\vec{F} = 5\hat{\mathbf{i}} - 3\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$ القوَّة التي يُولِّدها حزام ناقل لتحريك حقيبة في مسار مستقيم، من النقطة $(1, 1, 1)$ إلى النقطة $(9, 4, 7)$. أجد مقدار الشـغل الذي تبذله القوَّة F، علمًا بأنَّ القوَّة بالنيوتن N، والمسافة بالمتـر m، ومقدار الشـغل (W) المبذول بوحدة الجول (J) يسـاوي ناتج الضرب القياسي لمتجه القوَّة في متجه الإزاحة؛ أيْ: $W = \vec{F} \cdot \vec{d}$.

$\vec{d} = \langle 8,3,6 \rangle \quad , \vec{F} = \langle 5,-3,1 \rangle$

$W = \vec{F}.\vec{d} = 5(8) - 3(3) + 1(6) = 37J$

أُطلِق صـاروخ من النقطـة $(1, 2, 1)$، ثـم وصل بعد ثانيتين إلى النقطة $(9, 13, 21)$. وفي الوقت نفسه، أُطلِق صاروخ آخر من النقطة $(4, -3, 2)$، ووصل بعد ثانيتين إلى النقطة $(14, 1, 18)$. ما قياس الزاوية بين مسـاري الصاروخين؟

اتجاه مسار الصاروخ الأول: $\vec{\mathbf{v}} = \langle 8,11,20 \rangle$

اتجاه مسار الصاروخ الثاني: $\vec{\mathbf{u}} = \langle 10,4,16 \rangle$

$|\vec{\mathbf{v}}| = \sqrt{64 + 121 + 400} = \sqrt{585} = 3\sqrt{65}$

$|\mathbf{u}| = \sqrt{100 + 16 + 256} = \sqrt{372} = 2\sqrt{93}$

$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = 8(10) + 11(4) + 20(16) = 80 + 44 + 320 = 444$

لتكن θ قياس الزاوية بين مساري الصاروخين، إذن:

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}}{|\vec{\mathbf{v}}||\mathbf{u}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{444}{3\sqrt{65} \times 2\sqrt{93}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{74}{\sqrt{6045}}\right) \approx 17.9°$$

① إذا كان المستقيم l_1 يمر بالنقطتين $(1,2,-1)$ ، $(2,3,0)$
والمستقيم l_2 يمر بالنقطتين $(0,0,0)$ ، $(2,3,5)$
فجد قياس الزاوية الحادة بين المستقيمين إلى أقرب عشر درجة

الحل $\vec{V}_1 = \langle 2-1, 3-2, 0-(-1) \rangle = \langle 1,1,1 \rangle$

$\vec{V}_2 = \langle 2,3,5 \rangle - \langle 0,0,0 \rangle = \langle 2,3,5 \rangle$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{|V_1||V_2|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{2+3+5}{\sqrt{3}\sqrt{38}}\right) = 20.5$$

حادة

ملاحظة : في المستقيمات يطلب الزاوية الحادة، فلو كان الجواب مثلا 130 نحوله إلى زاوية حادة كالتالي : $\theta = 180-130 = 50$

② إذا كان المستقيم $\vec{r} = \langle 1,2,3 \rangle + t\langle a,2,1 \rangle$
والمستقيم $\vec{r} = \langle 3,0,0 \rangle + t\langle 6,4,2 \rangle$
متعامدين ، جد a

الحل $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0 = 6a+8+2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-10}{6} \Rightarrow \boxed{a = -\frac{5}{3}}$

تعامد

③ إذا كان المستقيم $\vec{r} = \langle 1,2,3 \rangle + t\langle a,2,1 \rangle$
$\vec{r} = \langle 3,0,0 \rangle + t\langle 6,4,2 \rangle$
متوازيين ، جد a

الحل $\vec{V}_1 = k\vec{V}_2 \Rightarrow \langle a,2,1 \rangle = k\langle 6,4,2 \rangle$

توازي

$\Rightarrow \frac{a}{6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\frac{a}{6} = \frac{1}{2}$

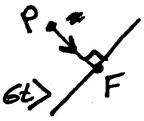
$\Rightarrow \boxed{a = 3}$

س إذا كانت $\vec{r} = \langle 28, -10, -4\rangle + t\langle 8, 3, -6\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l ، والنقطة $P(3,-4,2)$ غير واقعة على المستقيم l :

① حدد مسقط العمود من النقطة P على المستقيم l

② جد البعد بين النقطة P والمستقيم l

الحل ① $\vec{r} = \langle 28+8t, -10+3t, -4-6t\rangle$



$\vec{PF} = \vec{OF} - \vec{OP} = \langle 25+8t, -6+3t, -6-6t\rangle$

$\vec{PF}\cdot\vec{V} = 0 \Rightarrow (25+8t)(8) + (-6+3t)(3) + (-4-6t)(-6) = 0$

$218 + 104t = 0 \Longrightarrow t = -2$

$\Rightarrow \vec{r} = \langle 28+8(-2), -10+3(-2), -4-6(-2)\rangle$

$\vec{r} = \langle 12, -16, 8\rangle \Longrightarrow \boxed{F(12,-16,8)}$

② $\vec{PF} = \langle 25+8(-2), -6+3(-2), -6-6(-2)\rangle$

$\boxed{\vec{PF} = \langle 9, -12, 6\rangle}$

$\Rightarrow |\vec{PF}| = \sqrt{9^2 + (-12)^2 + 6^2} = \sqrt{261}$

تبريـــر: إذا كانت $A(3, -2, 4)$، و $B(1, -5, 9)$، و $C(-4,5, -1)$، وكانت النقطة D تقع على المســتقيم المارِّ بالنقطة A والنقطة B، وكانت الزاوية CDA قائمة، فما إحداثيات النقطة D؟ أُبرِّر إجابتي.

بما أن $\angle CDA$ قائمة، فالنقطة D هي المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ ، ويمكن إيجاد إحداثياتها كما يأتي:

$\overrightarrow{AB} = \langle -2, -3, 5\rangle$

معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ هي: $\mathbf{r} = \langle 3, -2, 4\rangle + t\langle -2, -3, 5\rangle$

بما أنّ النقطة D تقع على $\overleftrightarrow{AB}$ فإن:

$$\overrightarrow{OD} = \langle 3-2t, -2-3t, 4+5t\rangle$$

$$\overrightarrow{CD} = \langle 3-2t+4, -2-3t-5, 4+5t+1\rangle = \langle 7-2t, -7-3t, 5+5t\rangle$$

$\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

$\Rightarrow -2(7-2t) - 3(-7-3t) + 5(5+5t) \Rightarrow t = -\frac{16}{19}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OD} = \langle 3 - 2\left(-\frac{16}{19}\right), -2 - 3\left(-\frac{16}{19}\right), 4 + 5\left(-\frac{16}{19}\right)\rangle = \langle \frac{89}{19}, \frac{10}{19}, \frac{-4}{19}\rangle$

إذن، إحداثيات D هي: $\left(\frac{89}{19}, \frac{10}{19}, \frac{-4}{19}\right)$

تُمثِّل: $\vec{r} = \langle -5, 7, 1\rangle + t\langle 3, 1, 4\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_1، وتُمثِّل: $\vec{r} = \langle 2, 8, -1\rangle + u\langle 2, 0, -3\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_2، وتُمثِّل: $\vec{r} = \langle 3, 19, 10\rangle + v\langle -1, 3, 1\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l_3.

إذا تقاطع المستقيم l_2 والمستقيم l_1 في النقطة T، وكانت النقطة F تقع على المستقيم l_3، حيث: $\overrightarrow{TF} \perp l_3$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

20 أجد إحداثيات النقطة F.

21 أجد البُعْد بين النقطة T والمستقيم l_3.

20	لإيجاد نقطة تقاطع l_1 و l_2 نساوي $\vec{r}$ في معادلتيهما ونساوي الإحداثيات المتناظرة: $\langle -5+3t, 7+t, 1+4t\rangle = \langle 2+2u, 8, -1-3u\rangle$ $-5+3t = 2+2u \Rightarrow 3t-2u = 7 \ldots\ldots\ldots (1)$ $7+t = 8 \Rightarrow t = 1$ $1+4t = -1-3u \Rightarrow 4t+3u = -2 \ldots\ldots\ldots (2)$ بتعويض $t = 1$ في المعادلتين (1)، و(2) نجد أن $u = -2$ لإيجاد إحداثيات نقطة التقاطع نعوض $t = 1$ في معادلة l_1 $\vec{r} = \langle -5+3(1), 7+1, 1+4(1)\rangle = \langle -2, 8, 5\rangle$ إذن نقطة تقاطع l_1 و l_2 هي $T(-2,8,5)$ F هو المسقط العمودي للنقطة T على l_3 ، إذن $\overrightarrow{OF} = \langle 3-v, 19+3v, 10+v\rangle$ $\overrightarrow{TF} = \langle 3-v-(-2), 19+3v-8, 10+v-5\rangle$ $= \langle 5-v, 11+3v, v+5\rangle$ اتجاه l_3 هو $\vec{w} = \langle -1, 3, 1\rangle$ لكن $\overrightarrow{TF}$ يعامد l_3 إذن، $\overrightarrow{TF}\cdot\vec{w} = 0$ $\Rightarrow -1(5-v) + 3(11+3v) + 1(v+5) = 0 \Rightarrow v = -3$ $\Rightarrow \overrightarrow{OF} = \langle 3-(-3), 19+3(-3), 10-3\rangle \Rightarrow F(6,10,7)$
21	$\overrightarrow{TF} = \langle -8, 2, -2\rangle \Rightarrow \lvert\overrightarrow{TF}\rvert = \sqrt{64+4+4} = 6\sqrt{2}$

إذا كانت: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -19 \\ 14 \\ -5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ a \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l، والنقطة $T(-2, 5, 8)$ تقع خارج المستقيم l، والنقطة F تقع على المستقيم l، حيث $\overrightarrow{TF}$ يُعامِد المستقيم l، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

19 أُبيِّن أنَّ قيمة t التي تعطي النقطة F على المستقيم l هي: $t = \dfrac{13a+44}{a^2+10}$.

20 إذا كانت $t = 5$ في الفرع السابق، فأجد متجهي الموقع المُمكِنين للنقطة F.

19	$\overrightarrow{OF} = \langle -19+t, 14-3t, -5+at\rangle$ $\overrightarrow{TF} = \langle -19+t+2, 14-3t-5, -5+at-8\rangle$ $= \langle -17+t, 9-3t, -13+at\rangle$ $\overrightarrow{TF} \perp l \Rightarrow \langle -17+t, 9-3t, -13+ta\rangle \cdot \langle 1, -3, a\rangle = 0$ $\Rightarrow -17+t-3(9-3t)+a(-13+at) = 0$ $\Rightarrow -17+t-27+9t-13a+a^2t = 0$ $\Rightarrow (10+a^2)t = 13a+44$ $\Rightarrow t = \dfrac{13a+44}{10+a^2}$
20	$\dfrac{13a+44}{10+a^2} = 5 \Rightarrow 5a^2+50 = 13a+44$ $\Rightarrow 5a^2-13a+6 = 0 \Rightarrow (5a-3)(a-2) = 0 \Rightarrow a = \dfrac{3}{5}, a = 2$ $a = 2 \Rightarrow \overrightarrow{OF} = \langle -19+5, 14-15, -5+10\rangle = \langle -14, -1, 5\rangle$ $a = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \overrightarrow{OF} = \langle -19+5, 14-15, -5+3\rangle = \langle -14, -1, -2\rangle$

إحداثيات النقاط: A, B, C هي: $(3, -2, 4)$، و$(1, -5, 6)$، و$(-4, 5, -1)$ على الترتيب، والمستقيم l يمرُّ بالنقطة A، وله المعادلة المتجهة: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$:

21 أُبيِّن أنَّ النقطة C تقع على المستقيم l.

22 أجد معادلة متجهة للمستقيم المارِّ بالنقطة A والنقطة B.

23 إذا وقعت النقطة D على المستقيم المارِّ بالنقطة A والنقطة B، بحيث كانت الزاوية CDA قائمة، فأجد إحداثيات النقطة D.

21	متجه الموقع لأي نقطة على المستقيم l هو: $\langle 3+7u, -2-7u, 4+5u \rangle$ تقع C على المستقيم l إذا وجد عدد حقيقي u حيث: $\langle 3+7u, -2-7u, 4+5u \rangle = \langle -4, 5, -1 \rangle$ $\Rightarrow 3+7u = -4 \quad , \quad -2-7u = 5 \quad , \quad 4+5u = -1$ $\Rightarrow u = -1 \quad , \quad u = -1 \quad , \quad u = -1$ إذن، C تقع على المستقيم l المعطى لأنها تنتج من تعويض $u = -1$ في معادلته المتجهة.
22	$\overrightarrow{AB} = \langle 1-3, -5-(-2), 6-4 \rangle = \langle -2, -3, 2 \rangle$ $\Rightarrow \vec{r} = \langle 3, -2, 4 \rangle + t\langle -2, -3, 2 \rangle$ هي معادلة متجهة للمستقيم المطلوب.
23	$\overrightarrow{OD} = \langle 3-2t, -2-3t, 4+2t \rangle$ $\overrightarrow{CD} = \langle 3-2t+4, -2-3t-5, 4+2t+1 \rangle = \langle 7-2t, -7-3t, 5+2t \rangle$ $\angle CDA$ قائمة، فإن $\overline{CD} \perp \overline{AD}$ وهذا يعني أنّ $\overline{CD}$ يعامد $\overleftrightarrow{AB}$ لأن D تقع على $\overleftrightarrow{AB}$. $\Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \Rightarrow \langle -2, -3, 2 \rangle \cdot \langle 7-2t, -7-3t, 5+2t \rangle = 0$ $\Rightarrow -2(7-2t) - 3(-7-3t) + 2(5+2t) = 0$ $\Rightarrow -14 + 4t + 21 + 9t + 10 + 4t = 0$ $\Rightarrow 17t = -17 \Rightarrow t = -1$ $\overrightarrow{OD} = \langle 3+2, -2+3, 4-2 \rangle = \langle 5, 1, 2 \rangle$ $\Rightarrow D(5, 1, 2)$

مثلث

أجد مساحة المثلث ABC الذي إحداثيات رؤوسه هي:
$A(5, 6, -2), B(2, -2, 1), C(2, -3, 6)$.

$$\overrightarrow{AB} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle = \langle 2-5, -2-6, 1-(-2) \rangle = \langle -3, -8, 3 \rangle$$

$$\overrightarrow{AC} = \langle 2-5, -3-6, 6-(-2) \rangle = \langle -3, -9, 8 \rangle$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + (-8)^2 + 3^2} = \sqrt{82}$$

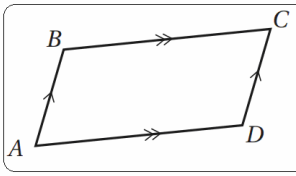
$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-3)^2 + (-9)^2 + 8^2} = \sqrt{154}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3(-3) + (-8)(-9) + 3(8) = 105$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{105}{\sqrt{82} \times \sqrt{154}}\right) \approx 20.9^\circ$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}| \times |\overrightarrow{AC}| \sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{82} \times \sqrt{154} \sin(20.9^\circ) \approx 20.0$$

متوازي اضلاع



يُبيِّن الشكل المجاور متوازي الأضلاع $ABCD$، حيث: $\overrightarrow{AB} = 6\hat{\mathbf{i}} - 2\hat{\mathbf{j}} + 11\hat{\mathbf{k}}$، و $\overrightarrow{AC} = 15\hat{\mathbf{i}} + 8\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}$. أجد مساحة متوازي الأضلاع $ABCD$.

مساحة متوازي الأضلاع $ABCD$ تساوي مثلي مساحة المثلث BAC لأن القطر $\overline{AC}$ يقسمه إلى مثلثين متطابقين.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6(15) - 2(8) + 11(5) = 129$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{36 + 4 + 121} = \sqrt{161}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{225 + 64 + 25} = \sqrt{314}$$

$$m\measuredangle BAC = \theta = \cos^{-1}\left(\frac{129}{\sqrt{161}\sqrt{314}}\right) \approx 55^\circ$$

$$Area(ABCD) = 2 \times \frac{1}{2}(AC)(AB)\sin\theta = \sqrt{161}\sqrt{314}\sin 55^\circ \approx 184.2$$

الهرم

$ABCD$ هرم ثلاثي. إذا كانت إحداثيات رؤوسه هي: $A(4,3,-1), B(-4,5,2), C(6,-1,0), D(10,11,19)$، فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

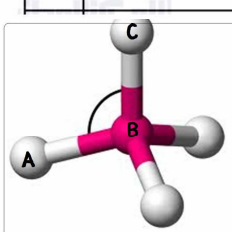
28 أجد مساحة المثلث ABC في صورة: $a\sqrt{6}$.

29 أُثبِت أنَّ: $m\angle AED = 90°$، حيث $E(1,2,1)$.

30 إذا علمْتُ أنَّ النقطة E تقع في المستوى نفسه الذي يقع فيه المثلث ABC، فأجد حجم الهرم $ABCD$.

28	$\overrightarrow{AB} = \langle -8,2,3\rangle \Rightarrow \lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{64+4+9} = \sqrt{77}$ $\overrightarrow{AC} = \langle 2,-4,1\rangle \Rightarrow \lvert\overrightarrow{AC}\rvert = \sqrt{4+16+1} = \sqrt{21}$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -8(2)+2(-4)+3(1) = -21$ ليكن θ قياس الزاوية BAC $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\lvert\overrightarrow{AC}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-21}{\sqrt{77}\times\sqrt{21}}\right) = \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}\right)$ $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}} \Rightarrow \sin\theta = \sqrt{1-\frac{3}{11}} = \sqrt{\frac{8}{11}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$ $Area = \frac{1}{2}\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\times\lvert\overrightarrow{AC}\rvert\sin\theta = \frac{1}{2}\sqrt{77}\times\sqrt{21}\times\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = 7\sqrt{6}$

29	$\overrightarrow{EA} = \langle 3,1,-2\rangle,\ \overrightarrow{ED} = \langle 9,9,18\rangle$ $\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{ED} = 3(9)+1(9)-2(18) = 0$ إذن، $\overrightarrow{EA}\perp\overrightarrow{ED}$ وقياس الزاوية AED هو $90°$
30	$\lvert\overrightarrow{DE}\rvert = \sqrt{81+81+324} = 9\sqrt{6}$ و يمثل ارتفاع الهرم h ، أما مساحة قاعدته فهي $A = 7\sqrt{6}$ وذلك من السؤال 28، إذن، حجم الهرم هو: $V = \frac{1}{3}Ah = \frac{1}{3}\times 7\sqrt{6}\times 9\sqrt{6} = 126$ إذن، حجم الهرم يساوي 126 وحدة مكعبة.



س: الجزيء المبين في الشكل المجاور جد قياس الزاوية بين الروابط AB و BC علماً أن
$A(1,2,1), B(0,3,0), C(-1,4,1)$

الحل

$\overrightarrow{BA} = (1,-1,1) \Rightarrow \lvert\overrightarrow{BA}\rvert = \sqrt{3}$

$\overrightarrow{BC} = (-1,1,1) \Rightarrow \lvert\overrightarrow{BC}\rvert = \sqrt{3}$

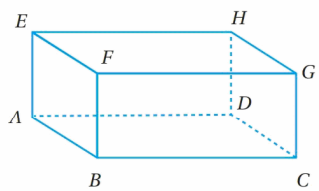
$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = -1-1+1 = -1$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\lvert\overrightarrow{BA}\rvert\lvert\overrightarrow{BC}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}\sqrt{3}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = 109.5°$

متوازي مستطيلات

تحدٍّ: رُسِم متوازي المستطيلات الآتي باستعمال برمجية حاسوبية تعتمد في قياساتها على المتجهات، فكانت كالآتي:

$$\overrightarrow{AB}=(2\hat{i}+4\hat{j}+4\hat{k}),\ \overrightarrow{AD}=(-10\hat{i}+10\hat{j}-5\hat{k}),\ \overrightarrow{AE}=(-6\hat{i}-3\hat{j}+6\hat{k})$$



40 إذا كانت $B(8,3,-2)$، فأجد إحداثيات النقطة H.

42 إذا كان X نقطة منتصف الضلع $\overline{EF}$، فأجد جيب تمام الزاوية DXC.

40

لتكن $H(x,y,z)$

$\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}\qquad(\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{AE})$

$\langle x-8,y-3,z+2\rangle=\langle -2,-4,-4\rangle+\langle -10,10,-5\rangle+\langle -6,-3,6\rangle$

$\Rightarrow\langle x-8,y-3,z+2\rangle=\langle -18,3,-3\rangle$

$\Rightarrow x-8=-18\Rightarrow x=-10$

$y-3=3\Rightarrow y=6$

$z+2=-3\Rightarrow z=-5$

$\Rightarrow H(-10,6,-5)$

ملحوظة: توجد طرق أخرى للحل، منها التدرج بإيجاد إحداثيات A ثم E ثم H...

42

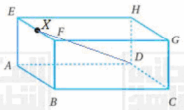
$\overrightarrow{XD}=\overrightarrow{XE}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{FE}-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}$

$=\langle -1,-2,-2\rangle-\langle -6,-3,6\rangle+\langle -10,10,-5\rangle$

$=\langle -5,11,-13\rangle$



$\Rightarrow|\overrightarrow{XD}|=\sqrt{25+121+169}=\sqrt{315}$

$\overrightarrow{XC}=\overrightarrow{XF}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BC}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AD}$

$=\langle 1,2,2\rangle-\langle -6,-3,6\rangle+\langle -10,10,-5\rangle$

$=\langle -3,15,-9\rangle$

$\Rightarrow|\overrightarrow{XD}|=\sqrt{9+225+81}=\sqrt{315}$

$\overrightarrow{XD}\cdot\overrightarrow{XC}=-5(-3)+11(15)-13(-9)=297$

$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{XD}\cdot\overrightarrow{XC}}{|\overrightarrow{XD}||\overrightarrow{XC}|}=\frac{297}{315}=\frac{33}{35}$

معين

إذا كانت $A(3, 1, -6)$، و $B(5, -2, 0)$، و $C(8, -4, -6)$، فأُجيب عن الأسئلة الخمسة الآتية تباعًا:

31 أُبيِّن أنَّ: $\overrightarrow{AC} = n\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$، حيث n عدد صحيح.

32 أُبيِّن أنَّ قياس الزاوية ACB هو $\cos^{-1}\frac{5\sqrt{2}}{14}$.

33 أكتب معادلة متجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{AC}$.

34 إذا كانت $D(6, -1, p)$، وعُلِم أنَّ $\overleftrightarrow{AC}, \overleftrightarrow{BD}$ متقاطعان، فما قيمة p؟

35 أُبيِّن أنَّ الشكل $ABCD$ مُعيَّن، ثم أجد طول كل ضلع من أضلاعه.

31	$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}5\\-5\\0\end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ وتكون قيمة n هي 5
32	$\overrightarrow{CA} = \langle -5,5,0\rangle \Rightarrow \lvert\overrightarrow{CA}\rvert = \sqrt{25+25+0} = 5\sqrt{2}$ $\overrightarrow{CB} = \langle -3,2,6\rangle \Rightarrow \lvert\overrightarrow{CB}\rvert = \sqrt{9+4+36} = 7$ $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = -5(-3)+5(2)+0(6) = 25$ ليكن θ قياس الزاوية ACB $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\lvert\overrightarrow{AC}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{25}{35.\sqrt{2}}\right)$ $= \cos^{-1}\left(\frac{5}{7\sqrt{2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{5\sqrt{2}}{14}\right)$
33	$\overrightarrow{AC} = \langle 5,-5,0\rangle$ ويمكن التعبير عن اتجاه المستقيم $\overleftrightarrow{AC}$ بالمتجه $\vec{v} = \langle 1,-1,0\rangle$ وتكون معادلته: $\vec{r} = \langle 8,-4,-6\rangle + t\langle 1,-1,0\rangle$

34	$\overrightarrow{BD} = \langle 1,1,p\rangle$ ويمكن التعبير عن اتجاه المستقيم $\overleftrightarrow{BD}$ بالمتجه $\vec{v} = \langle 1,1,p\rangle$ معادلة $\overleftrightarrow{BD}$: $\vec{r} = \langle 5,-2,0\rangle + u\langle 1,1,p\rangle$ يتقاطع المستقيمان، إذن، يوجد u,t بحيث تتساوى لهما $\vec{r}$ في المعادلتين: $\langle 8+t,-4-t,-6\rangle = \langle 5+u,-2+u,up\rangle$ $8+t = 5+u \Rightarrow t-u = -3 \ldots\ldots\ldots (1)$ $-4-t = -2+u \Rightarrow t+u = -2 \ldots\ldots (2)$ $up = -6 \ldots\ldots\ldots (3)$ بجمع المعادلتين(1)و(2) ، نجد أنّ: $t = -\frac{5}{2}, u = \frac{1}{2}$ ثم بالتعويض في (3) نجد أنّ: $p = -12$ $D(6,-1,-12)$
35	$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{AB} = \langle 2,-3,6\rangle\\ \overrightarrow{DC} = \langle 2,-3,6\rangle\end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \ldots\ldots\ldots (1)$ $\left.\begin{matrix}\overrightarrow{BC} = \langle 3,-2,-6\rangle\\ \overrightarrow{AD} = \langle 3,-2,-6\rangle\end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \ldots\ldots\ldots (2)$ من (1) و (2) ينتج ان الشكل $ABCD$ متوازي أضلاع. $AB = \lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{4+9+36} = \sqrt{49} = 7$ $AD = \lvert\overrightarrow{AD}\rvert = \sqrt{9+4+36} = \sqrt{49} = 7$ وبما أن $ABCD$ متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متطابقان فهو معين جميع أضلاعه متطابقة طول كل واحد منها 7 وحدات.

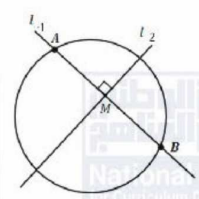
دائرة

إذا كانت: $\vec{r}=\begin{pmatrix}8\\2\\-12\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1، وكانت: $\vec{r}=\begin{pmatrix}-4\\10\\p\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}q\\2\\-1\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2، والنقطة $A(9,-1,-14)$ تقع على المستقيم l_1، والنقطة C تقع على المستقيم l_2، فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

16 إذا كان المستقيم l_1 والمستقيم l_2 مُتعامِدين، فأجد قيمة q.

17 إذا كان المستقيم l_1 والمستقيم l_2 متقاطعين، فأجد قيمة p، وإحداثيات نقطة تقاطعهما.

18 رُسِمت دائرة مركزها النقطة C، فقطعت المستقيم l_1 في النقطتين: A، وB. أجد متجه الموقع للنقطة B.

16	$\begin{pmatrix}q\\2\\-1\end{pmatrix}\perp\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}q\\2\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}=0\Rightarrow -q+6-2=0\Rightarrow q=4$
17	$\langle -4+4u,10+2u,p-u\rangle=\langle 8-t,2+3t,-12+2t\rangle$ $-4+4u=8-t\Rightarrow 4u+t=12\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$ $10+2u=2+3t\Rightarrow 2u-3t=-8\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$ $p-u=-12+2t\Rightarrow p=2t+u-12\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$ $(1)\times 3+(2): 14u=28\Rightarrow u=2\ ,t=4$ وبما أن المستقيمين متقاطعان، تتحقق المعادلة (3) أيضًا عند $u=2\ ,t=4$ ويكون: $p=-2$ وتكون نقطة تقاطع المستقيمين هي $M(4,14,-4)$
18	العمود النازل من مركز الدائرة على أي وتر فيها ينصفه (نظرية)، والنقطة M (نقطة تقاطع l_1، وl_2) هي نقطة منتصف الوتر $\overline{AB}$. $\Rightarrow \overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{AM}$ $=\langle 9,-1,-14\rangle+2(\langle 4,14,-4\rangle-\langle 9,-1,-14\rangle)$ $=\langle 9,-1,-14\rangle+2\langle -5,15,10\rangle$ $=\langle -1,29,6\rangle$ 

مربع

إذا كانت: $\vec{r}=\begin{pmatrix}8\\2\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1، وكانت: $\vec{r}=\begin{pmatrix}-9\\21\\-4\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2، فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

24 أُبيِّن أنَّ المستقيم l_1 والمستقيم l_2 مُتعامِدان.

25 أُبيِّن أنَّ المستقيم l_1 والمستقيم l_2 يتقاطعان في النقطة $(-2, 7, 10)$.

26 يقع كل رأس من رؤوس المربع $ABCD$ إمّا على المستقيم l_1، وإمّا على المستقيم l_2. إذا كانت إحداثيات الرأس A هي: $(-5, 13, 4)$، فأجد إحداثيات رؤوسه الثلاثة الأُخرى.

24

اتجاه المستقيم الأول l_1 : $\langle 2,-1,-2\rangle$

اتجاه المستقيم الثاني l_2 : $\langle 1,-2,2\rangle$

المستقيمان متعامدان لأن:

$$\langle 2,-1,-2\rangle\cdot\langle 1,-2,2\rangle = 2(1)-1(-2)-2(2)=0$$

25

يتقاطع المستقيمان إذا وجدت قيم حقيقية t, u تحقق:

$$\langle 8+2t, 2-t, -2t\rangle = \langle -9+u, 21-2u, -4+2u\rangle$$

$$8+2t=-9+u \Rightarrow 2t-u=-17 \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$2-t=21-2u \Rightarrow 2u-t=19 \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$-2t=-4+2u \Rightarrow 2u+2t=4 \ldots\ldots\ldots (3)$$

$$(3)-(1): 3u=21 \Rightarrow u=7,\quad t=-5$$

نفحص تحقق المعادلة (2) عند هذه القيم: $2(7)-(-5)=19$ ✓

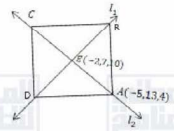
إذن، يتقاطع المستقيمان، ونجد نقطة التقاطع بتعويض $u=7$ في معادلة l_2:

$$\vec{r}=\langle -9+7, 21-14, -4+14\rangle = \langle -2,7,10\rangle$$

إذن، نقطة التقاطع هي: $E(-2,7,10)$

26

بمساواة الإحداثيات المتناظرة، نجد أن النقطة المعطاة A تقع على المستقيم l_2 عندما $u=4$ ، فإن نقطة تقاطع المستقيمين هي نقطة منتصف قطري المربع.



لتكن $C(x,y,z)$

إذن، $\left(\frac{x-5}{2}, \frac{y+13}{2}, \frac{z+4}{2}\right)=(-2,7,10)$

$$\Rightarrow x=1, y=1, z=16 \Rightarrow C(1,1,16)$$

ويقع الرأسان B,D على المستقيم l_1 ويبعدان عن النقطة $E(-2,7,10)$ مسافة تساوي مقدار المتجه $\overrightarrow{AE}$

حيث: $\overrightarrow{AE}=\langle -2-(-5), 7-13, 10-4\rangle = \langle 3,-6,6\rangle$

$$|\overrightarrow{AE}|=\sqrt{9+36+36}=\sqrt{81}=9$$

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EB}$$

حيث $\overrightarrow{EB}$ متجه طوله 9 وحدات باتجاه l_1 ، وينتج من ضرب متجه الوحدة في اتجاه l_1 بالعدد 9 ، فإذا كان $\hat{v}$ متجه الوحدة في اتجاه l_1، فإنّ:

$$\hat{v}=\frac{1}{\sqrt{4+1+4}}\langle 2,-1,-2\rangle = \langle \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\rangle$$

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{EB}=\langle -2,7,10\rangle + 9\langle \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\rangle = \langle 4,4,4\rangle$$

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{ED}=\langle -2,7,10\rangle - 9\langle \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\rangle = \langle -8,10,16\rangle$$

إذن، إحداثيات الرأسين B,D هي:

$B(4,4,4), D(-8,10,16)$ ، أو بالعكس: $D(4,4,4), B(-8,10,16)$.

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 إذا كانت $A(-3, 4, 9), B(5, -2, 3)$، فإنَّ الصورة الإحداثية للمتجه $\overrightarrow{AB}$ هي:

a) $\langle -2, 2, 12\rangle$ b) $\langle 8, -6, -6\rangle$

c) $\langle -1, 1, 6\rangle$ d) $\langle -8, 6, -6\rangle$

2 إذا كان: $\vec{\mathbf{v}} = \langle 2, c, -5\rangle$، وكان: $|\vec{\mathbf{v}}| = 3\sqrt{5}$، فإنَّ c تساوي:

a) 4 b) $-3, 5$

c) 15 d) $-4, 4$

3 إذا كان PQR مستقيمًا، حيث: $PQ : QR = 3 : 1$، و $\overrightarrow{PQ} = \vec{\mathbf{a}}$، فإنَّ التعبير عن المتجه $\overrightarrow{RQ}$ بدلالة $\vec{\mathbf{a}}$ هو:

a) $\frac{1}{3}\vec{\mathbf{a}}$ b) $\frac{1}{4}\vec{\mathbf{a}}$

c) $-\frac{1}{3}\vec{\mathbf{a}}$ d) $-\frac{1}{4}\vec{\mathbf{a}}$

4 النقطة الواقعة على المستقيم الذي له المعادلة المتجهة: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 4, -2, 5\rangle + t\langle -2, 1, 3\rangle$، والإحداثي y لها 10 هي:

a) $(18, 10, 28)$ b) $(28, 10, 35)$

c) $(-8, 10, 20)$ d) $(-20, 10, 41)$

5 إذا كان: $\vec{\mathbf{v}} = \langle 2, -2, 5\rangle$، وكان: $\vec{\mathbf{w}} = \langle -3, 4, 6\rangle$، فإنَّ $3\vec{\mathbf{v}} - 2\vec{\mathbf{w}}$ يساوي:

a) $\langle 0, 2, 3\rangle$ b) $\langle 12, -14, 3\rangle$

c) $\langle 13, -16, -8\rangle$ d) $\langle -13, 16, 8\rangle$

6 إذا كان قياس الزاوية بين $\vec{\mathbf{a}}$ و $\vec{\mathbf{b}}$ هو $60°$، وكان: $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = 30$، وكان: $|\vec{\mathbf{a}}| = 10$، فإنَّ مقدار $\vec{\mathbf{b}}$ هو:

a) 3 b) 5

c) 6 d) 24

7 إذا كان: $\vec{\mathbf{u}} = \langle -4, 2, a\rangle$، وكان: $\vec{\mathbf{v}} = \langle 2, b, 5\rangle$، وكان: $\vec{\mathbf{u}} \parallel \vec{\mathbf{v}}$، فإنَّ قيمة a هي:

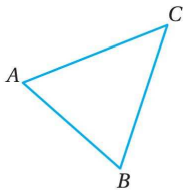
a) -10 b) -5

c) -1 d) 5

8 إذا كان المتجه: $\vec{\mathbf{u}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ والمتجه: $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ q \end{pmatrix}$ مُتعامِدين، فإنَّ قيمة q هي:

a) 0 b) 8 c) 10 d) 18

9 في المثلث المجاور، إذا كان: $\overrightarrow{AB} = 3\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$، وكان: $\overrightarrow{BC} = -2\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$، فأجد قياس الزاوية ABC إلى أقرب عُشر درجة.



اختبار نهاية الوحدة

10 إذا وقعت النقاط: $E(2, 0, 4), F(h, 5, 1), G(3, 10, k)$ على مستقيم واحد، فما قيمة كلٍّ من h، وk؟

11 إذا كانت $A(3, -2, 4), B(1, -5, 6), C(-4, 5, -1)$، وكانت النقطة D تقع على المستقيم المارِّ بالنقطة A والنقطة B، وكانت الزاوية CDA قائمة، فأجد إحداثيات النقطة D.

إذا كانت: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_1، وكانت: $\vec{r} = \begin{pmatrix} -3 \\ -17 \\ 5 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ معادلة متجهة للمستقيم l_2، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

12 أجد إحداثيات نقطة تقاطع المستقيمين: l_1, l_2.

13 أجد قياس الزاوية الحادَّة بين المستقيمين: l_1, l_2.

إذا كانت $A(1, 4, -5), B(3, 0, 2), C(-4, 1, 3)$، فأُجيب عن الأسئلة الأربعة الآتية تباعًا:

14 أكتب معادلة متجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{AB}$.

15 أكتب معادلة متجهة للمستقيم $\overleftrightarrow{AC}$.

16 إذا كان قياس $\angle BAC = \theta$، فأُثبِت أنَّ: $\cos\theta = \frac{58}{7\sqrt{138}}$.

17 أجد مساحة المثلث ABC.

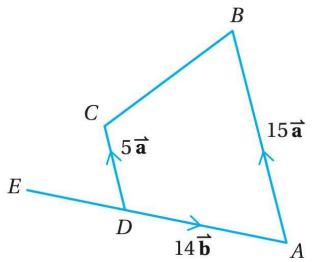
18 إذا كانت: $\vec{r} = \langle 3, -25, 13\rangle + t\langle 4, 5, -1\rangle$ معادلة متجهة للمستقيم l، وكانت النقطة V تقع على المستقيم l، حيث: $l \perp \overline{OV}$، فما إحداثيات النقطة V؟

يمرُّ المستقيم l_1 بالنقطتين: E، وF، ويمرُّ المستقيم l_2 بالنقطتين: G، و H. أُحدِّد إذا كان هذان المستقيمان متوازيين، أو متخالفين، أو متقاطعين، ثم أجد إحداثيات نقطة التقاطع إذا كانا متقاطعين في كلٍّ ممّا يأتي:

19 $E(7, 6, 34), F(5, 9, 16),$
$G(1, 21, -2), H(-13, -14, 19)$

20 $E(-3, -5, 16), F(12, 0, 1),$
$G(7, 2, 11), H(1, -22, 23)$

21 في الشكل الرباعي $ABCD$ الآتي، مُدَّ AD على استقامته ليصل إلى النقطة E، حيث: $AD = 2\,DE$.
إذا كان: $\overrightarrow{DA} = 14\vec{b}$، وكان: $\overrightarrow{DC} = 5\vec{a}$، وكان: $\overrightarrow{AB} = 15\vec{a}$، فأُثبِت أنَّ B، وC، وE تقع على استقامة واحدة.



اختبار نهاية الوحدة صفحة 158	
1	b
2	d
3	c
4	d
5	b
6	c
7	a
8	d
9	$\overrightarrow{BA} = \langle -3,1,-2 \rangle \Rightarrow \lvert\overrightarrow{BA}\rvert = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$ $\overrightarrow{BC} = \langle -2,4,3 \rangle \Rightarrow \lvert\overrightarrow{BC}\rvert = \sqrt{4+16+9} = \sqrt{29}$ $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -3(-2) + 1(4) - 2(3) = 4$ $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\lvert\overrightarrow{BA}\rvert\lvert\overrightarrow{BC}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{14} \times \sqrt{29}}\right) \approx 78.5°$
10	E, F, G على استقامة واحدة، إذن، $\overrightarrow{EF} \parallel \overrightarrow{FG}$، ومنه: $\langle h-2,5,-3 \rangle \parallel \langle 3-h,5,k-1 \rangle$ إذن، يوجد عدد حقيقي مثل c بحيث: $\langle h-2,5,-3 \rangle = c\langle 3-h,5,k-1 \rangle$ $\Rightarrow 5c = 5 \Rightarrow c = 1$ $h-2 = (3-h)c \Rightarrow h-2 = 3-h \Rightarrow h = \frac{5}{2}$ $(k-1)c = -3 \Rightarrow k-1 = -3 \Rightarrow k = -2$

11	$\overrightarrow{AB} = \langle -2,-3,2\rangle$ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ هي: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 3,-2,4\rangle + t\langle -2,-3,2\rangle$ $\Rightarrow \overrightarrow{OD} = \langle 3-2t,-2-3t,4+2t\rangle$ $\overrightarrow{CD} = \langle 3-2t,-2-3t,4+2t\rangle - \langle -4,5,-1\rangle = \langle 7-2t,-7-3t,5+2t\rangle$ $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ $\Rightarrow -2(7-2t)-3(-7-3t)+2(5+2t) = 0$ $\Rightarrow t = -1$ $\Rightarrow \overrightarrow{OD} = \langle 3+2,-2+3,4-2\rangle = \langle 5,1,2\rangle \Rightarrow D(5,1,2)$
12	لإيجاد نقطة التقاطع، نساوي $\vec{\mathbf{r}}$ في المعادلتين ونساوي إحداثياتهما المتناظرة لنجد قيمة الوسيطين μ، وλ: $\langle -2-5\lambda,-5,9+7\lambda\rangle = \langle -3+2\mu,-17+4\mu,5-\mu\rangle$ $-17+4\mu = -5 \Rightarrow \mu = 3$ $-2-5\lambda = -3+2\mu \Rightarrow \lambda = -1$ وهاتان القيمتان تحققان المعادلة الثالثة الآتية: $9+7\lambda = 5-\mu$ $9+7(-1) = 5-3$ $2 = 2$ ✓ نجد نقطة تقاطعهما بتعويض $\lambda = -1$ في معادلة l_1 ، وهي النقطة $(3,-5,2)$
13	اتجاه المستقيم l_1 : $\vec{\mathbf{v}} = \langle -5,0,7\rangle$ اتجاه المستقيم l_2 : $\vec{\mathbf{u}} = \langle 2,4,-1\rangle$ $\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{u}} = -5(2)+0+7(-1) = -17$ $\lvert\vec{\mathbf{v}}\rvert = \sqrt{25+0+49} = \sqrt{74}$ $\lvert\vec{\mathbf{u}}\rvert = \sqrt{4+16+1} = \sqrt{21}$ لتكن θ قياس الزاوية بين $\vec{\mathbf{v}},\vec{\mathbf{u}}$ إذن: $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{\mathbf{v}}\cdot\vec{\mathbf{u}}}{\lvert\vec{\mathbf{v}}\rvert\lvert\vec{\mathbf{u}}\rvert}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-17}{\sqrt{74}\times\sqrt{21}}\right) \approx 115.5°$ فيكون قياس الزاوية الحادة بين l_1, l_2 هو α حيث: $\alpha = 180° - 115.5° = 64.5°$

14	$\overrightarrow{AB} = \langle 2,-4,7\rangle$ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ هي: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 1,4,-5\rangle + t\langle 2,-4,7\rangle$
15	$\overrightarrow{AC} = \langle -5,-3,8\rangle$ معادلة المستقيم $\overleftrightarrow{AC}$ هي: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 1,4,-5\rangle + u\langle -5,-3,8\rangle$
16	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{4+16+49} = \sqrt{69}$ $\lvert\overrightarrow{AC}\rvert = \sqrt{25+9+64} = \sqrt{98}$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2(-5)-4(-3)+7(8) = 58$ $\cos\theta = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\lvert\overrightarrow{AC}\rvert} = \frac{58}{\sqrt{69}\times\sqrt{98}} = \frac{58}{\sqrt{69\times 49\times 2}} = \frac{58}{7\sqrt{138}}$
17	$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\frac{3364}{6762}} = \frac{\sqrt{3398}}{7\sqrt{138}}$ $Area(ABC) = \frac{1}{2}\lvert\overrightarrow{AB}\rvert\times\lvert\overrightarrow{AC}\rvert\sin\theta = \frac{1}{2}\times 7\sqrt{138}\times\frac{\sqrt{3398}}{7\sqrt{138}} = \frac{\sqrt{3398}}{2}$
18	V نقطة على l إذن يكون متجه موقعها: $\overrightarrow{OV} = \langle 3+4t,-25+5t,13-t\rangle$ اتجاه l هو: $\vec{\mathbf{w}} = \langle 4,5,-1\rangle$ وبما أن $l \perp \overrightarrow{OV}$ إذن يكون: $\vec{\mathbf{w}}.\overrightarrow{OV} = 0$ ومنه: $4(3+4t)+5(-25+5t)-1(13-t) = 0 \Rightarrow t = 3$ $\Rightarrow \overrightarrow{OV} = \langle 3+12,-25+15,13-3\rangle \Rightarrow V(15,-10,10)$

	$\overrightarrow{EF} = \langle -2,3,-18 \rangle$
	$\overrightarrow{GH} = \langle -14,-35,21 \rangle$
	نلاحظ أنه لا يوجد عدد حقيقي k يحقق $\overrightarrow{EF} = k\overrightarrow{GH}$ كون النسب بين الإحداثيات المتناظرة غير متساوية، فالمستقيمان غير متوازيين.
	معادلة l_1 هي: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 7,6,34 \rangle + t\langle -2,3,-18 \rangle$
	معادلة l_2 هي: $\vec{\mathbf{r}} = \langle 1,21,-2 \rangle + u\langle -14,-35,21 \rangle$
	نساوي $\vec{\mathbf{r}}$ في المعادلتين ونساوي إحداثياتهما المتناظرة لنجد قيم t,u لمعرفة نقطة التقاطع:
19	$\langle 7-2t, 6+3t, 34-18t \rangle = \langle 1-14u, 21-35u, -2+21u \rangle$
	$7-2t = 1-14u \Rightarrow -2t+14u = -6 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$
	$6+3t = 21-35u \Rightarrow 3t+35u = 15 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$
	$34-18t = -2+21u \Rightarrow 18t+21u = 36 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$
	$(1)\times 9+(3):\ u = -\frac{6}{49}\ ,\ t = \frac{15}{7}$
	$3\left(\frac{15}{7}\right) + 35\left(-\frac{6}{49}\right) = 2.14 \neq 15$
	هذه القيم لا تحقق المعادلة (2)، إذن المستقيمان ليسا متقاطعين ولا متوازيين، فهما متخالفان.

انتهت المتجهات