



www.dirasats.com

هذا الغلاف لا يعبر عن حقوق الملكية او فحوى الكتاب, فهو مجرد واجهة للموقع المحمل منه



شكرا لك على ثقتك بنا وعلى اختيار موقعنا

www.dirasats.com



من اجل تواصل معنا المرجو زيارة الموقع ستجد جميع المعلومات

www.dirasats.com





Examen d'essai : Algèbre

SM₁ — SMP₁ — SMC₁

Exercice 1

5 pt

- 1) Enoncer théorème de Gauss ?
 Décomposés en facteurs irréductibles dans \mathbb{R} et dans $\mathbb{C}[x]$
- 2) Soit les polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ suivantes : $P(x) = x^3 - 1$; $Q(x) = x^4 + 1$
- 3) Déterminer les deux polynômes U et V telles que $PU + QV = 1$

Exercice 2

4 pt

deg(P(x)) > 2

Soit $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme de degré strictement supérieur à 2, et soient a et b deux nombres réels.

Calculer le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x-a)(x-b)$ dans les deux cas suivants :

- 1) $(a = b)$ 2) $(a \neq b)$

Exercice 3

5 pt

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}[x]$ et ensuite sur $\mathbb{R}[x]$ les fractions rationnelles suivantes :

$$F(x) = 1/(x^{2n} - 1) \text{ ou } F(x) = x^5/(x^5 + 1)$$

Exercice 4

$$(x+1)(x-1)^2(x-1)$$

Soient $E = (x+1)(x-1)^2$ et $F = (x+2)(x-1)^3(x^2+2x+3)$.

- 1) Les polynômes E et F sont-ils scindés dans $\mathbb{R}[x]$ et dans $\mathbb{C}[x]$
- 2) Déterminer le PGCD et le PPCM de E et F .
- 3) Décomposer E/F dans $\mathbb{R}[x]$.

بسم الله الرحمن الرحيم

جا معه ابن زهر
كلية العلوم
أكادير

الإتحاد الوطني للطباعة المغرب
مكتب التعاضدية
النادي العلمي

Réponse d'Examen

d'essai: Algèbre $SP_1 - SP_2 - SP_3$

Exercice I:

1° Théorème de Gauss: Soient A, B et C trois polynômes de $K[X]$ si B est premier avec C et divise AB alors divise A .

2° Pour $P(x) = x^3 - 1$

Dans $\mathbb{R}[x]$ on a 1 racine de P donc $(x-1)(x^2+bx+c) = x^3-1$

$$a = 1 \quad b-a = 0 \quad c-b = 0; \quad -c = -1$$

Alors $P(x) = (x-1)(x^2+x+1)$ avec $\Delta < 0$

Dans $\mathbb{C}[x]$ la racine de x^2+x+1 sont j et \bar{j}

$$\text{et } j = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i; \quad \bar{j} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \bar{j} = j^2$$

$$\text{donc } P(x) = (x-1)(x-j)(x-\bar{j})$$

$$(*) \text{ Pour } Q(x) = x^4 + 1$$

$$\begin{aligned} \text{Dans } \mathbb{R}[x] \text{ on a: } x^4 + 1 &= x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 \\ &= (x^2 + 1)^2 - 2x^2 \end{aligned}$$

$$\checkmark = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$$

$$\Delta < 0$$



Dans \mathbb{C} les racines de $x^2 - \sqrt{2}x + 1$ sont

$$x_1 = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$$

et les racines de $x^2 + \sqrt{2}x + 1$ sont $x_3 = \frac{-\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}$

$$x_4 = \frac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$$

d'où $Q(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$

3°) - Déterminer de U et V

on a $P(x)$ et $Q(x)$ n'ont pas des racines communes
donc ils sont premiers entre eux.

on a $P(x) = x^3 - 1$ et $Q(x) = x^4 + 1$ et $PU + QV = 1$

on divise Q par P :

$$Q = x^4 + 1 \quad \left| \begin{array}{l} x^3 + 1 = P \\ x = Q_1 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} x^3 - 1 \\ \underline{x^3 + x^2} \\ -x^2 - 1 \\ \underline{-x^2 - x} \\ x - 1 \\ \underline{x + 1} \\ R_2 \quad -2 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} R_1 = x + 1 \\ x^2 - x + 1 = Q_2 \end{array} \right.$$

on a : $Q = PQ_1 + R_1$; $P = Q_2R_1 + R_2$

$$R_2 = P - R_1Q_2 = P - (Q - PQ_1)Q_2$$

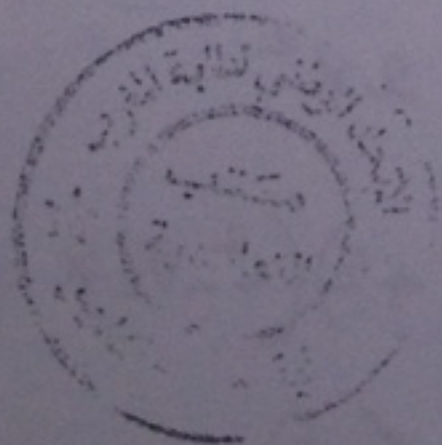
$$R_2 = -QQ_2 + P(1 + Q_1Q_2)$$

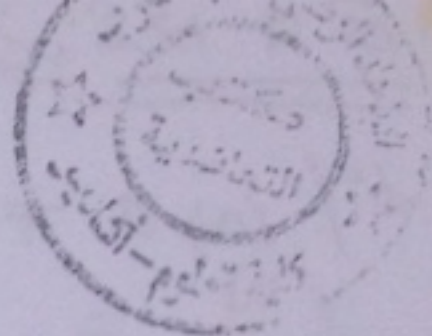
$$1 = \frac{-QQ_2}{R_2} + \frac{P(1 + Q_1Q_2)}{R_2}$$

$$U = \frac{1 + Q_1Q_2}{R_2} \text{ et}$$

$$V = -\frac{Q_2}{R_2}$$

$QV + PU = 1$





Exercice 4 :

- 1°/ - E scinde' ds \mathbb{R} car il admet 3 racine avec d'F 3
 - F n'est pas scinde' ds \mathbb{R} ; n'admet pas de nbr des racine ded
 ($N^{\circ} d^{\circ} F \neq N^{\circ} R F$)
 - F est scinde sur \mathbb{C}

2°/ - $\text{PGCD}(A, B) = (x-1)^2$

$$\text{PPCM}(A, B) = \frac{A \cdot B}{\text{PGCD}(A, B)} = (x-1)(x+1)(x+2)(x^2+2x+3)$$

3°/ $E/F \approx \frac{(x+1)}{(x+2)(x-1)(x^2+2x+3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x-1} + \frac{\alpha x + \beta}{x^2+2x+3}$

on calcul a, b :

$$a \approx \frac{E(-2)}{F_1(-2)} = \frac{1}{9} \quad \text{avec } F_1(x) = (x-1)(x^2+2x+3)$$

$$b = \frac{E(2)}{F_2(2)} = \frac{1}{9} \quad \text{avec } F_2(x) = (x+2)(x^2+2x+3)$$

calcul α, β : on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x F(x) \approx 0 = a + b + \alpha \Rightarrow \alpha \approx -\frac{2}{9}$

pour β on a $F(0) = -\frac{1}{6} = \frac{a}{2} - b + \frac{\beta}{3} \Rightarrow \beta \approx -\frac{1}{3}$

donc $E/F \approx \frac{1}{9} \left(\frac{1}{x+2} \right) + \frac{1}{9} \left(\frac{1}{x-1} \right) + \frac{-\frac{2}{9}x - \frac{1}{3}}{x^2+2x+3}$

Ex 2:

1°/ cas $a \neq b$; on a $P(x)$ un polynôme de $d^\circ > 2$, $a, b \in \mathbb{R}$

$$P(x) = (x-a)(x-b)Q(x) + R(x), \quad d^\circ R < 2, \quad d^\circ R \leq 1$$

$$\text{A lors } R(x) = \alpha x + \beta \quad \begin{cases} P(a) = R(a) = \alpha a + \beta & \textcircled{1} \\ P(b) = R(b) = \alpha b + \beta & \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \Rightarrow \alpha(a-b) = P(a) - P(b) \quad \text{A lors :}$$

$$\alpha = \frac{P(a) - P(b)}{a - b} \quad \text{et} \quad \beta = P(a) - a \cdot \frac{P(a) - P(b)}{a - b}$$

par suite $\left\{ R(x) = \frac{P(a) - P(b)}{a - b} x + P(a) - a \frac{P(a) - P(b)}{a - b} \right\}$

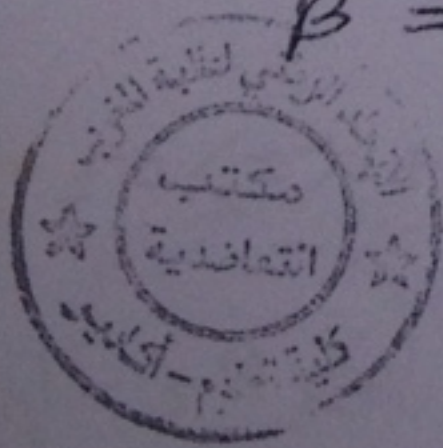
2°/ cas $a = b$. $d^\circ P > 2$, $d^\circ R \leq 1$

$$P(x) = (x-a)^2 Q(x) + R(x) = (x-a)^2 Q(x) + \alpha x + \beta$$

$$\text{on a } P'(a) = \alpha ; \quad P(a) = \alpha a + \beta$$

$$\beta = P(a) - a P'(a) \Rightarrow$$

$$R(x) = P'(a)x + P(a) - aP'(a)$$



Ex 3°/2

$$\text{on a } F(x) = \frac{1}{x^{2n} - 1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{\alpha_k}{x - \alpha_k} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

$$a_k \in \mathbb{C} \text{ et } \alpha_k = e^{ik\pi} \quad 1 \leq k \leq 2n$$

$$\text{on a } a_k = \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} = \frac{1}{2n \alpha_k^{2n-1}} = \frac{\alpha_k}{2n}$$

$$\text{comme } \alpha_k^{2n} = 1$$

$$\frac{1}{x^{2n} - 1} = \frac{1}{2n} \left[\sum_{k=1}^n \left(\frac{\alpha_k}{x - \alpha_k} + \frac{\bar{\alpha}_k}{x - \bar{\alpha}_k} \right) \right]$$

$$\text{et DS } \mathcal{R}(n) \text{ on a}$$

$$\frac{1}{x^{2n} - 1} = \frac{1}{2n} \sum \left| \frac{x(\alpha_k + \bar{\alpha}_k) - 2\alpha_k \bar{\alpha}_k}{x^2 - (\alpha_k + \bar{\alpha}_k)x + \alpha_k \bar{\alpha}_k} \right|$$

$$\text{d'où } \alpha_k + \bar{\alpha}_k = 2 \cos \frac{k\pi}{n} \text{ et } \alpha_k \bar{\alpha}_k = |\alpha_k|^2 = 1$$

$$* \quad F(x) = \frac{x^5}{1+x^5} = 1 - \frac{1}{1+x^5}$$



$$= 1 - \sum_{k=1}^5 \frac{a_k}{x - \alpha_k}$$

$$\text{on } \alpha_k = e^{i((2k+1) \cdot \pi/5)} \quad 1 \leq k \leq 5 \text{ et } a_k \in \mathbb{C}$$

$$a_k = \frac{1}{5 \alpha_k^4} = -\frac{\alpha_k}{5} \quad 1 \leq k \leq 5$$

$$\textcircled{1} \text{ on } F(x) = 1 + \sum_{k=1}^5 \frac{\alpha_k}{5(x - \alpha_k)}$$

$$\text{Or } \alpha_1 = \bar{\alpha}_3 ; \alpha_4 = \bar{\alpha}_5 \text{ et } \alpha_2 = -1$$

$$F(x) = 1 + \frac{1}{5(x+1)} + \frac{\alpha_2}{5(x - \alpha_2)} + \frac{\bar{\alpha}_2}{5(x - \bar{\alpha}_2)} + \frac{\alpha_4}{5(x - \alpha_4)} + \frac{\bar{\alpha}_4}{5(x - \bar{\alpha}_4)}$$

$$\textcircled{2} \text{ on } R(x)$$

$$F(x) = 1 - \frac{1}{5(x+1)} + \frac{1}{5} \left(\frac{x(\alpha_2 + \bar{\alpha}_1) - 2\alpha_2 \bar{\alpha}_1}{x^2 - (\alpha_1 + \bar{\alpha}_1)x + \alpha_1 \bar{\alpha}_1} + \right.$$



$$\left. \frac{x(\alpha_4 + \bar{\alpha}_4) - 2\alpha_4 \bar{\alpha}_4}{x^2 - (\alpha_4 + \bar{\alpha}_4)x + \alpha_4 \bar{\alpha}_4} \right)$$

On envoie :

$$F(x) = 1 + \frac{1}{5(x+1)} + \frac{2x \cos \frac{\pi}{5} - 2}{5(x^2 - 2x \cos \frac{\pi}{5} + 1)} + \frac{2x \cos \frac{3\pi}{5} - 2}{5(x^2 - 2x \cos \frac{3\pi}{5} + 1)}$$

Examen : Algèbre (Module M1)

Durée : 1H30.

Exercice 1:

Soit $P(X) = X^3 + 5X^2 - 8X - 48$ un polynôme à coefficients réels. Déterminer les racines de $P(X)$ sachant qu'il admet deux racines distinctes x_1 et x_2 de somme -1 . (Indication: on posera $x_1 + x_2 = -1$ et $x_1 \cdot x_2 = p$; x_1 et x_2 sont donc solution de l'équation $X^2 + X + p = 0$, c'est à dire $X^2 + X + p$ divise $P(X)$).

Exercice 2

1) Décomposer en facteurs irréductibles, dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes $P(X) = X^3 - 1$ et $Q(X) = X^4 + 1$.

En déduire qu'ils sont premiers entr eux. *il n'ont pas de racines commun.*

2) Déterminer deux polynômes U et V de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P \cdot U + Q \cdot V = 1$

3) Décomposer en éléments simples, dans $\mathbb{R}[X]$, la fraction rationnelle : $F(X) = \frac{X^4 + 1}{X^3 - 1}$

Exercice 3

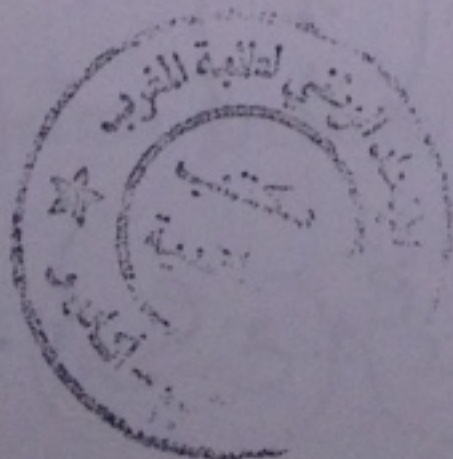
Soit A le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 défini par

$$A = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = x + y \}$$

1) Déterminer une base $\{e_1, e_2\}$ de A .

2) Soit B le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $e_3 = (1, 1, 1)$

Montrer que A et B sont supplémentaires.



Réponse d'Examen d'Algèbre

Janvier 2008

Exercice 1: Voir l'examen d'Algèbre
Précédente Exercice ①.

Exercice 3:

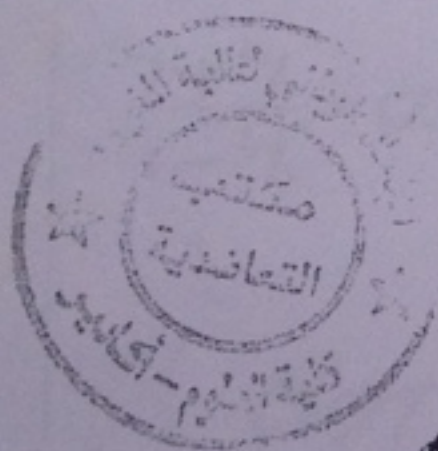
On a : $A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x + y \right\}$

1°/ $\{e_1, e_2\}$.

$\forall U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in A \quad z = x + y$

On a : $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix}$

$= x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



A lors $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Par suite $\{e_1, e_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

EX 1: On a $P(x) = x^3 + 5x^2 - 8x - 48$

Soient x_1 et x_2 les 2 racines de $P(x)$ de somme -1 :

$x_1 + x_2 = -1$; P sons $P = x_1 x_2$; Connaissent la somme et le produit de x_1 et x_2 ;

x_1 et x_2 sont solutions de l'équation $x^2 + x + P = 0$

C. à. d.

Donc $P(x)$ et $x^2 + x + P$ ont les m. racines, $x^2 + x + P$ doit donc diviser $P(x)$ donc le reste de leur division doit être nul, En divisant

$P(x)$ par $x^2 + x + P$ on trouve comme reste

$$R(x) = -(P + 12)x - 4(P + 12)$$

$$R(x) = 0 \Leftrightarrow P = -12$$

$$\text{D'où } x^2 + x - 12 = 0 \text{ avec } \Delta = 1 + 48 = 7^2 = 49$$

$$x_1 = \frac{1}{2}(-1 - 7) = -4 \text{ et } x_2 = \frac{1}{2}(-1 + 7) = 3$$

Pour trouver la 3^{ème} racine de $P(x)$,

on divise $P(x)$ par:

$(x-3)(x+4)$ et on trouve $x+4$ D'où

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-3)(x+4)(x+4) \\ &= (x-3)(x+4)^2 \end{aligned}$$

