

EJERCICIOS Y PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

secundaria



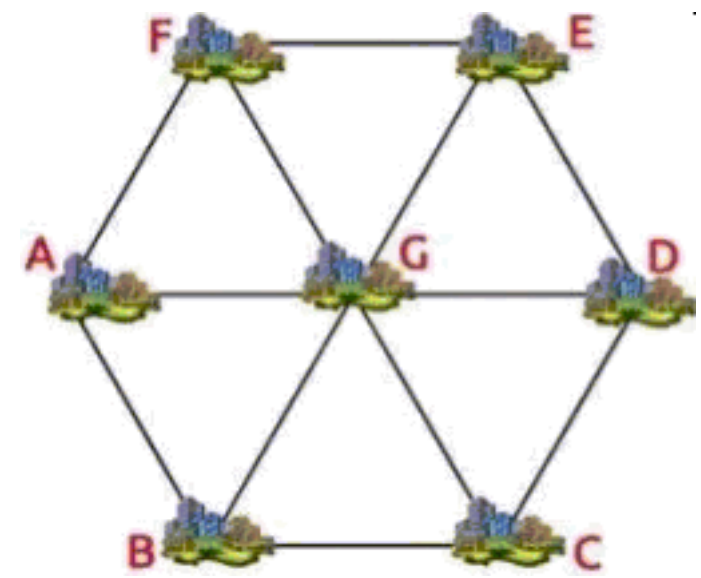
TOMO 4

Un vendedor tiene que visitar 7 ciudades situadas en los vértices y el centro de un hexágono regular.

Las ciudades están unidas por caminos que son los lados del exágono y las tres diagonales que unen vértices opuestos.

Empezando en el vértice A, no puede visitar ninguna ciudad más de una vez.

¿De cuántas maneras distintas puede hacer el recorrido?



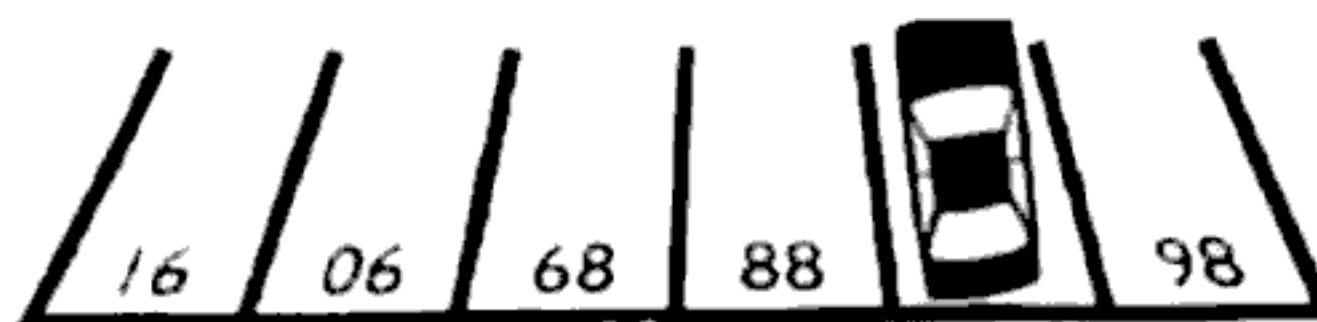
SOLUCIÓN

Las rutas posibles son:

- a) 8, desde A hacia B → ABCDEFG
ABCDEGF
ABCDGEF
ABCDGFE
ABCGDEF
ABCGFED
ABGCDEF
ABGFEDC
- b) 8, desde A hacia F → AFEDCBG
(simétricas AFEDCGB
de las anteriores) AFEDGCB
AFEDGBC
AFEGDCB
AFEGBCD
AFGEDCB
AFGBCDE
- c) 2, desde A hacia G → AGBCDEF
AGFEDCB

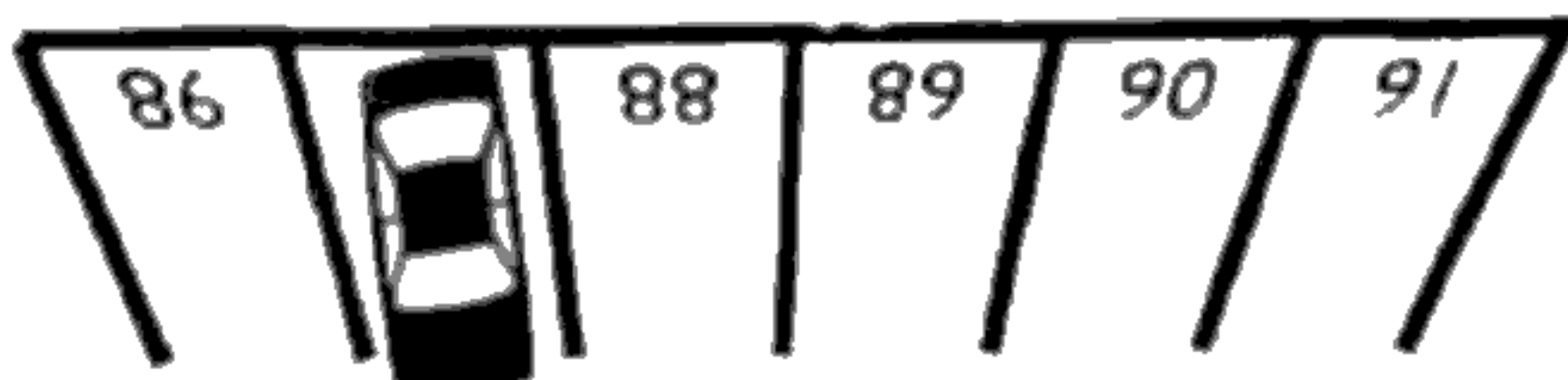
Hay 18 trayectos diferentes

¿En qué número de aparcamiento está estacionado el automóvil?



SOLUCIÓN

Basta ponernos en la posición adecuada para apreciar la secuencia de números:



El automóvil está aparcado en el número 87

En una competición artística los jueces califican a los participantes con puntuaciones enteras. La media de las puntuaciones concedidas a un concursante es 5,625.

¿Cuál es el menor número de jueces para que esto sea posible?

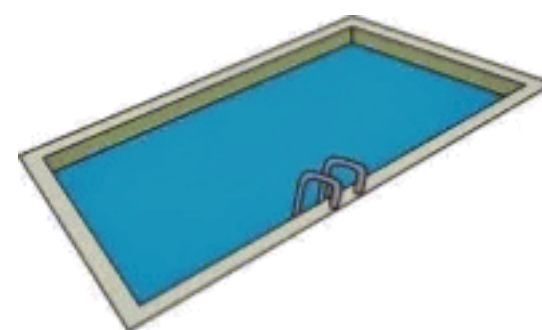


SOLUCIÓN

El menor número natural que, multiplicado por 5,625 , da un valor entero es 8 : $5,625 \times 8 = 37$, por lo que

el menor número de jueces es 8

Se pintan de rojo todos los puntos que distan menos de 2 metros del borde de una piscina rectangular de 50x20 metros, ¿cuál es, en m^2 , la superficie de la zona pintada de rojo?



SOLUCIÓN

Observando la figura se aprecia que la superficie consta de dos rectángulos de 50×2 metros, dos rectángulos de 20×2 metros y cuatro cuadrantes que hacen un círculo de 2 metros de radio.

Entonces, la superficie total cubierta de pintura roja es $2 \times 50 \times 2 + 2 \times 20 \times 2 + \pi \times 2^2 = 280 + 4\pi \text{ m}^2$



La superficie roja abarca $292,57 \text{ m}^2$

Una jarra tiene dos litros de *tinto de verano* con un 50 % de vino.

¿Cuántos litros de gaseosa hay que añadirle para que la concentración de vino se quede en un 40 %?



SOLUCIÓN

La mezcla actual contiene 1 litro de gaseosa y 1 litro de vino, y llamamos x a los litros de gaseosa que se deben añadir.

En el nuevo caso el total de la mezcla será de $2 + x$ litros y, entonces, la proporción de vino estará en

$$\frac{1}{2+x} = 40\% = \frac{40}{100} = \frac{2}{5} \rightarrow 4 + 2x = 5 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Por tanto

se deberá añadir medio litro de gaseosa

La suma de dos números consecutivos de dos cifras es igual al número obtenido permutando las cifras del mayor.

¿De qué números se trata?

$$x + (x + 1)$$

SOLUCIÓN

Los números son \overline{ab} y $\overline{ab} + 1$

Se cumple que $10a + b + 10a + b + 1 = 10 \times (b + 1) + a$ ya que la suma es de dos cifras y, por tanto, $b < 9$

$$\text{Entonces, } 10a + b + 10a + b + 1 = 10 \times (b + 1) + a \Rightarrow 8b = 19a - 9 \Rightarrow b = 2a - 1 + \frac{3a - 1}{8}$$

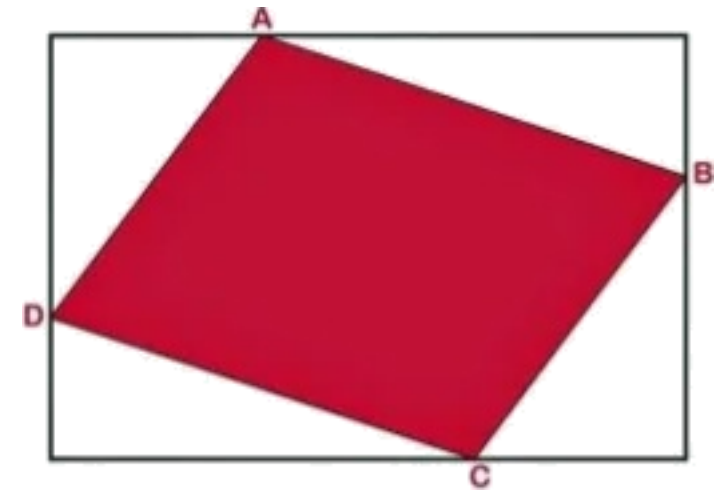
Como son cifras, la única posibilidad es que $a = 3 \Rightarrow b = 6$

Entonces,

los números son 36 y 37 (su suma es $36 + 37 = 73$)

Los puntos A, B, C y D dividen a los lados del rectángulo exterior en la proporción 1:2 como se ve en la figura.

Si la superficie del rectángulo es de 180 cm^2 , ¿cuál es el área de la superficie del paralelogramo rojo ABCD?



SOLUCIÓN

Suponemos, según el enunciado, que los lados del rectángulo son $3a$ y $3b$ y su área, por tanto, $9ab \text{ cm}^2$

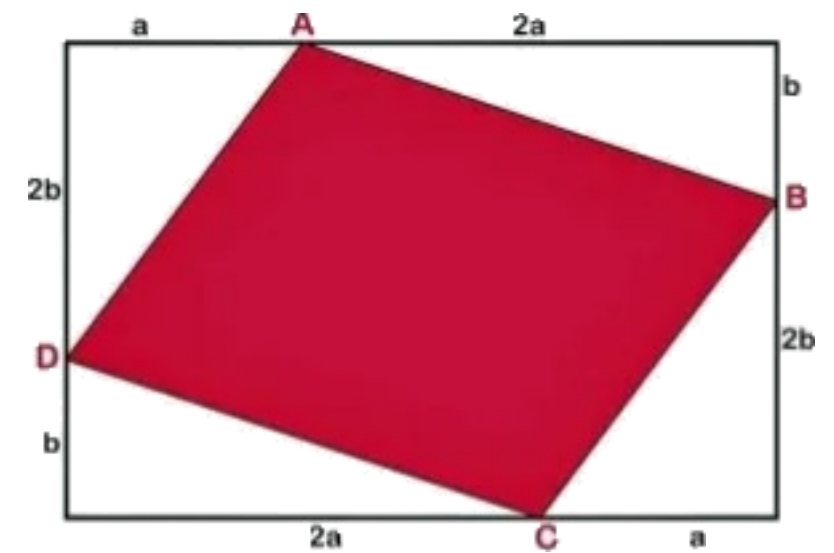
De ahí, $9ab = 180 \Rightarrow ab = 20 \text{ cm}^2$

Por otro lado la superficie de los cuatro triángulos que complementan a la superficie roja para cubrir todo el rectángulo es

$2 \times \frac{2ab}{2} + 2 \times \frac{2ba}{2} = 4ab = 80 \text{ cm}^2$, por lo que la superficie roja

tendrá un área de $180 - 80 = 100 \text{ cm}^2$

Es decir,



la superficie roja abarca 100 cm^2

La suma de dos números es 13 y su producto es 11.

¿Cuánto vale exactamente la suma de sus cubos?



SOLUCIÓN

Sean los números a y b : $a + b = 13$ y $ab = 11$

Según el Binomio de Newton, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \Rightarrow a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab \times (a + b) = 13^3 - 3 \times 11 \times 13 = 1768$

$$\mathbf{a^3 + b^3 = 1768}$$

Paco tiene una caja con 2000 caramelos de 5 colores. 387 de ellos son blancos, 396 amarillos, 402 rojos, 407 verdes y 408 marrones.

A partir del lunes, Paco decide comérselos de la siguiente manera: sin mirar, saca de la caja 3 caramelos. Si los tres son del mismo color se los come, en caso contrario los devuelve a la caja.

Continúa de esta forma a lo largo de la semana. El domingo por la noche Paco tiene un empacho considerable y sólo quedan en la caja dos caramelos del mismo color.

¿De qué color son?



SOLUCIÓN

Como siempre se come tres del mismo color, no quedará ningún caramelo del color cuya cantidad corresponda a un múltiplo de 3 como es el caso del conjunto de caramelos blancos ($387 = 129 \times 3$), amarillos ($396 = 132 \times 3$), rojos ($402 = 134 \times 3$) y marrones ($408 = 136 \times 3$).

En el caso de los caramelos verdes $407 = 135 \times 3 + 2$ por lo que

quedan 2 caramelos verdes

Tres holandeses, llamados Hendrick, Elas y Cornelius, y sus esposas Gurtrün, Katrün y Anna, compran cerdos.

Cada cual compra tantos como chelines puede dar por cada uno y cada esposo paga en total 63 chelines más que su esposa.

Hendrick compra 23 cerdos más que Katrün y Elas 11 más que Gurtrün.

¿Por quienes está formado cada matrimonio?



SOLUCIÓN

Llamamos a a la cantidad de cerdos (y chelines por cada uno) que compra cada hombre y b a la cantidad de cerdos (y chelines por cada uno) que compra su respectiva esposa. La diferencia entre los dos pagos es 63: $a \times a - b \times b = a^2 - b^2 = 63 \Rightarrow (a-b) \times (a+b) = 3^2 \times 7$

Las únicas posibilidades lógicas, en el contexto del problema, para esta igualdad son:

$$1. \quad \left. \begin{array}{l} a-b=1 \\ a+b=3^2 \times 7 = 63 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a=32 \\ b=31 \end{cases}$$

$$2. \quad \left. \begin{array}{l} a-b=3 \\ a+b=3 \times 7 = 21 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a=12 \\ b=9 \end{cases}$$

$$3. \quad \left. \begin{array}{l} a-b=7 \\ a+b=3^2 = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a=8 \\ b=1 \end{cases}$$

que se deben corresponder con cada uno de los tres matrimonios.

Como *Hendrick compra 23 cerdos más que Katrün*, Hendrick ($a = 32$) debe ser el hombre del primer matrimonio y Katrün ($b = 9$) la mujer del segundo matrimonio.

Como *Elas compra 11 cerdos más que Gurtrün*, Elas ($a = 12$) debe ser el hombre del segundo matrimonio y Gurtrün ($b = 1$) la mujer del tercer matrimonio.

Completando, Cornelius será el hombre del tercer matrimonio y Anna la mujer del primer matrimonio.

En conclusión,

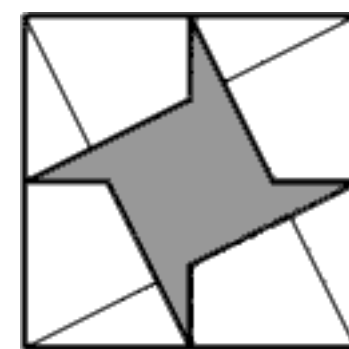
los matrimonios son:

Hendrick y Anna

Elas y Katrün

Cornelius y Gurtrün

Cada vértice de la estrella de la figura es el punto medio de cada uno de los lados del cuadrado grande. ¿Qué fracción del área del cuadrado cubre la estrella?



SOLUCIÓN

Llamamos a a la longitud del cuadrado exterior.

Marcamos los puntos y las líneas que aparecen en la figura y observamos que

- la estrella está formada por cuatro triángulos rectángulos iguales al CDE
- dicho triángulo es semejante al triángulo CAB con proporción entre sus lados 1:2, por lo que la proporción entre sus áreas será 1:4

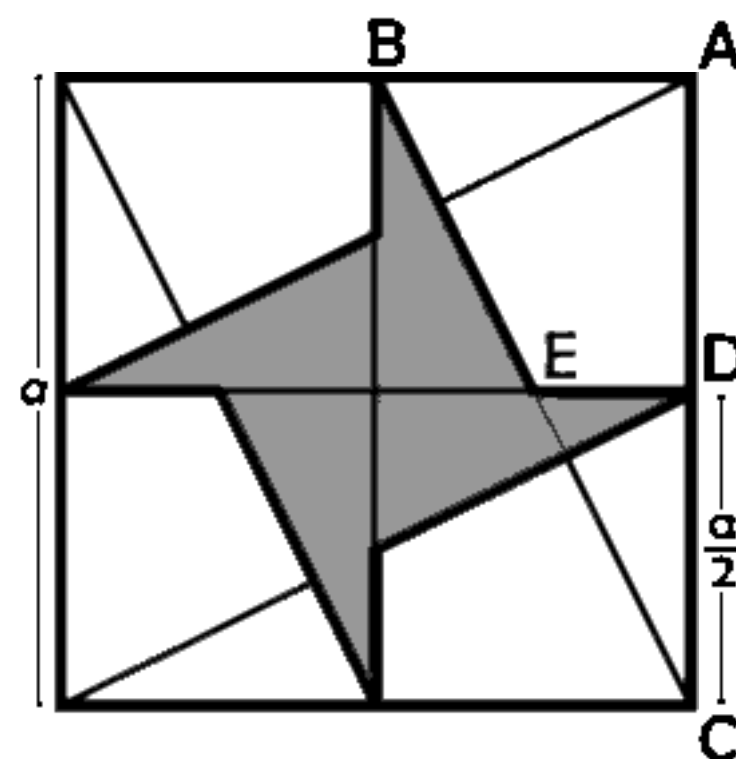
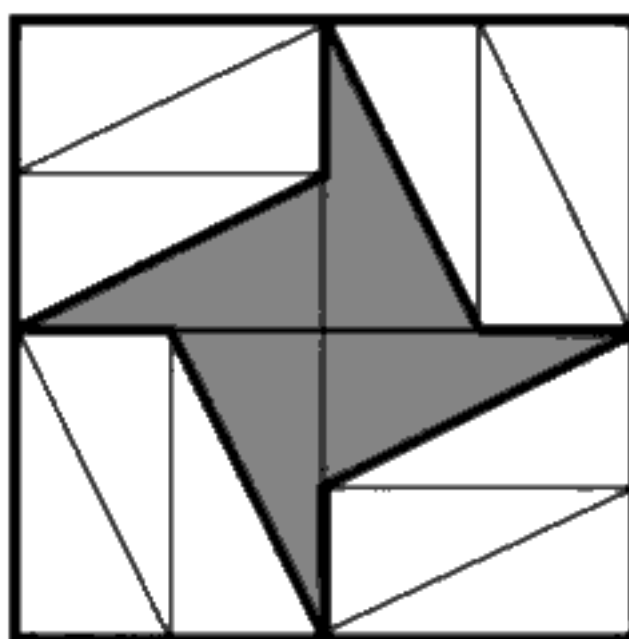
La medida de los catetos del triángulo CAB son a y $\frac{a}{2}$, por lo que su

$$\text{área es } \frac{a \times \frac{a}{2}}{2} = \frac{a^2}{4} \text{ y el área del triángulo } CDE \text{ es } \frac{1}{4} \times \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{16}$$

De lo anterior se deduce que el área de la estrella es $4 \times \frac{a^2}{16} = \frac{a^2}{4}$ y, como el área del cuadrado es a^2 , se sigue que

la estrella cubre la cuarta parte del cuadrado exterior

Otra forma de resolverlo es ver que, en el cuadrado, caben 16 triángulos rectángulos iguales, de los que cuatro forman la estrella:



El número $6ababab$ es múltiplo de 18, y si borramos la primera y la última cifra se convierte en un múltiplo de 6.

¿De qué número se trata?



SOLUCIÓN

Según el enunciado,

1. $\overline{6ababab} = 18$, por lo que b (última cifra) es par y, además, el número es múltiplo de 9 $\Rightarrow 6 + a + b + a + b + a + b = 9n \Rightarrow 6 + 3a + 3b = 9n$, con $n \in \mathbb{N}$
2. $\overline{ababa} = 6$, por lo que a (última cifra) es par y, además, el número es múltiplo de 3 $\Rightarrow a + b + a + b + a = 3m \Rightarrow 3a + 2b = 3m$, con $m \in \mathbb{N}$

De las dos conclusiones anteriores se deduce que $6 + 3m + b = 9n \Rightarrow b = 9n - 6 - 3m$ por lo que es, además de par, múltiplo de 3. La única cifra que cumple esas dos condiciones es 6 $\Rightarrow b = 6$

Entonces, del segundo apartado anterior, $3a + 2b = 3m \Rightarrow 3a + 12 = 3m \Rightarrow a + 4 = m \Rightarrow a = m - 4 \Rightarrow a \geq 4$

Y del primer apartado, $6 + 3a + 3b = 9n \Rightarrow 6 + 3a + 18 = 9n \Rightarrow 2 + a + 6 = 3n \Rightarrow a = 3n - 8$

Como a es cifra par, la única que cumple las dos condiciones últimas es 4 $\Rightarrow a = 4$

el número es 6464646

Hay cien montones de piedras con la misma cantidad de piedras en cada uno de ellos.

Se saca del primero una cantidad de piedras, del segundo el doble, del tercero el triple y así... del último se saca una cantidad de piedras igual a cien veces las sacadas en el primero.

En los montones quedan, en total, 14950 piedras, habiendo una sola en el último montón.

¿Cuántas piedras había, inicialmente, en cada montón?



SOLUCIÓN

Sea n el número de piedras de cada montón y x el número de piedras que se extrae del primer montón.

Según las condiciones expresadas en el enunciado, $n - x + n - 2x + n - 3x + \dots + n - 100x = 14950$ y $n - 100x = 1 \Rightarrow n = 1 + 100x$

Entonces,

$$100n - x \times (1 + 2 + 3 + \dots + 100) = 14950 \Rightarrow 100n - x \times \frac{(1+100) \times 100}{2} = 14950 \Rightarrow 100n - 5050x = 14950, \text{ según}$$

la fórmula que determina la suma de un número determinado de términos de una progresión aritmética.

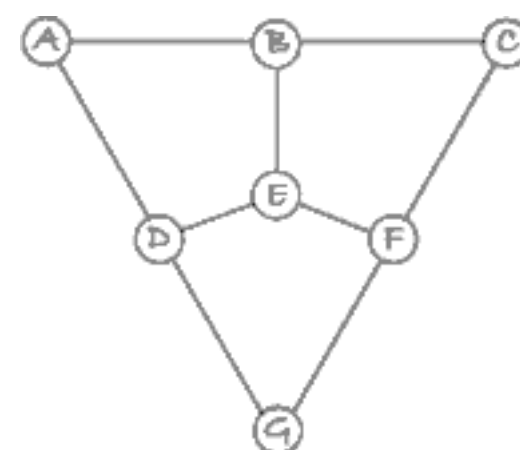
$$\begin{aligned} \text{Usando la otra condición inicial, } 100n - 5050x &= 14950 \Rightarrow 10n - 505x = 1495 \Rightarrow \\ \Rightarrow 10 \times (1 + 100x) - 505x &= 1495 \Rightarrow 495x = 1485 \Rightarrow x = 3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $n = 1 + 100x \Rightarrow n = 1 + 100 \times 3$ y

cada montón tenía, inicialmente, 301 piedras

Los números naturales de 1 a 7 están situados en las posiciones A, B, C, D, E, F, G de la figura de modo que la suma de los números en cada uno de los tres cuadriláteros es 15.

¿Cuál es el número situado en E?



SOLUCIÓN

Partimos de la base de que $A + B + C + D + E + F + G = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$

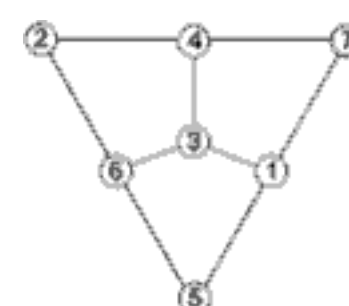
La suma de los vértices de cada cuadrilátero es impar y hay tres pares, por lo que

1. los tres pares deben estar en un único cuadrilátero sin ser ocupado E : por ejemplo, en A , B y D , o bien
2. cada uno de los tres pares debe estar en cada cuadrilátero y solo en uno: lugares A , C y G

En cualquiera de las dos posibilidades, el lugar E debe ser ocupado por un número impar.

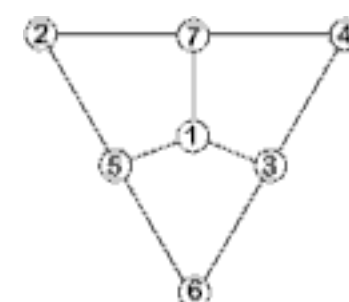
Analicemos cada caso:

1. En este caso, $E = 15 - (A + B + D) = 15 - (2 + 4 + 6) = 3$. Veamos si es coherente: debe cumplirse que
 $3E + 2 \times (B + D + F) + A + C + G = 9 + 2 \times (4 + 6 + 1) + 2 + 7 + 5 = 3 \times 15 = 45 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2 \times (B + D + F) + A + C + G = 36$. Además $A + B + C + D + F + G = 25 \Rightarrow$
 $\Rightarrow B + D + F = 11$ y $A + C + G = 14$



También, $A + B + D = 12$, $B + C + F = 12$, $D + F + G = 12$. De todo sale que $A - F = 1$, $G - B = 1$ y $C - D = 1 \Rightarrow A = 2$, $B = 4$, $D = 6$, $F = 1$, $G = 5$, $C = 7$ (u otra ordenación simétrica), quedando como indica la imagen.

2. Aquí $A + C + G = 2 + 4 + 6 = 12 \Rightarrow 3E + 2 \times (B + D + F) + A + C + G = 45 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 3E + 2 \times (B + D + F) + 12 = 45 \Rightarrow 3E + 2 \times (B + D + F) = 33$. Además,
 $B + E + D + F = 16 \Rightarrow B + D + F = 16 - E \Rightarrow 3E + 2 \times (16 - E) = 33 \Rightarrow E = 1$.
 Enseguida se puede armar la estructura de la imagen adjunta (u otra ordenación simétrica).



En resumen,

en E puede estar situado el 1 o el 3

Si $a = b - c$, $b = c - d$ y $c = d - a$, y los cuatro números distintos de cero, halla el valor de $a/b + b/c + c/d + d/a$



SOLUCIÓN

Las afirmaciones que son ciertas:

1. $a = b - c$
2. $b = c - d$
3. $c = d - a$

Operando con ellas se deduce:

$$(1) + (2) \Rightarrow a + b = b - c + c - d \Rightarrow a = -d$$

$$(1) - (3) \Rightarrow a - c = b - c - d + a \Rightarrow b = d$$

Con todo lo anterior y (3) $\Rightarrow c = d - a = d - (-d) = 2d$

Entonces $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = \frac{-d}{d} + \frac{d}{2d} + \frac{2d}{d} + \frac{d}{-d} = -1 + \frac{1}{2} + 2 - 1 = \frac{1}{2}$, por lo que el valor pedido es

$$\mathbf{1/2}$$

La Liebre de Marzo (personaje de Alicia en el País de las Maravillas) siempre miente de lunes a miércoles y dice la verdad el resto de la semana.

¿ Qué día puede haber dicho “mentí ayer y mentiré mañana”?



SOLUCIÓN

No puede decirlo un día en el que diga la verdad pues ‘ayer’ o ‘mañana’, al menos y respecto a ese día, dice la verdad.

Y no puede decirlo un día en el que mienta porque ‘ayer’ o ‘mañana’, al menos y respecto a ese día, miente y, por tanto, tendría que haber dicho que ese día decía la verdad.

Por tanto,

ningún día de la semana puede decir esa frase

Determina la veracidad o falsedad de cada uno de los diez enunciados siguientes:

1. Exactamente uno de los enunciados de esta lista es falso
2. Exactamente dos de los enunciados de esta lista son falsos
3. Exactamente tres de los enunciados de esta lista son falsos
4. Exactamente cuatro de los enunciados de esta lista son falsos
5. Exactamente cinco de los enunciados de esta lista son falsos
6. Exactamente seis de los enunciados de esta lista son falsos
7. Exactamente siete de los enunciados de esta lista son falsos
8. Exactamente ocho de los enunciados de esta lista son falsos
9. Exactamente nueve de los enunciados de esta lista son falsos
10. Exactamente diez de los enunciados de esta lista son falsos



SOLUCIÓN

Evidentemente todos los enunciados son incompatibles entre sí, por lo que solo habrá uno cierto y nueve falsos:

sólo es cierto el enunciado 9

Sísifo debe llevar cada día una piedra a la cima de una montaña. El primer día tarda 7 horas en subir y bajar.

La tarea es pesada y, cada día, tarda el doble que el anterior en subir y la mitad que el anterior en bajar.

Si tarda 8 horas en subir y bajar el segundo día, ¿cuántas horas tardará en subir y bajar el tercero?



SOLUCIÓN

Llamamos s y b a las horas que tarda, respectivamente, en subir y bajar el primer día.

$$\text{Entonces, } \left. \begin{array}{l} s + b = 7 \\ 2s + \frac{b}{2} = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2s + 2b = 14 \\ 2s + \frac{b}{2} = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{3b}{2} = 6 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow s = 3$$

$$\text{El tercer día tarda } 4s + \frac{b}{4} = 4 \times 3 + \frac{4}{4} = 13$$

El tercer día tarda 13 horas

¿Para qué valores naturales de n el producto $\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\left(1+\frac{1}{4}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{n}\right)$ es un número entero?

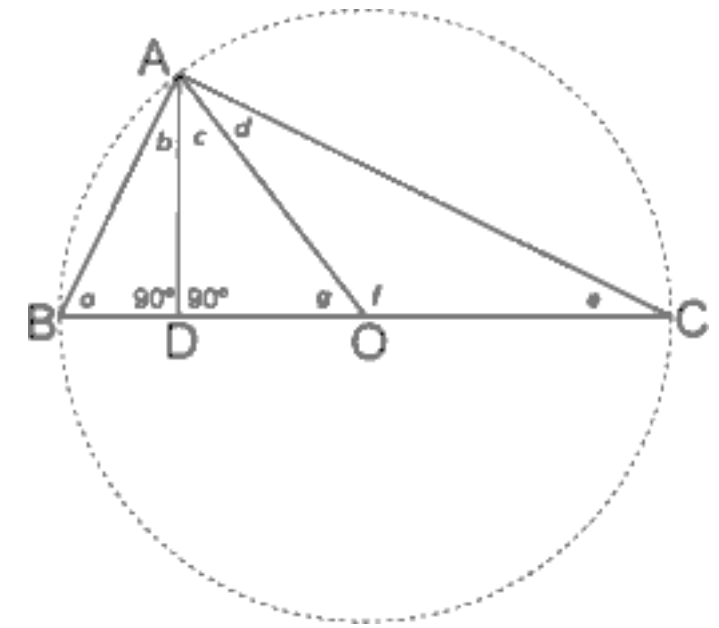
SOLUCIÓN

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{3}\right)\times\left(1+\frac{1}{4}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\times\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{3}{2}\times\frac{4}{3}\times\frac{5}{4}\times\cdots\times\frac{n}{n-1}\times\frac{n+1}{n}=\frac{n+1}{2}$$

Luego

el producto es entero cuando n es impar

Calcula el valor de todos los ángulos de la figura sabiendo que O es el centro del círculo y a vale 70°



SOLUCIÓN

Como $a = 70^\circ$, en el triángulo rectángulo BDA tenemos que
 $b = 180^\circ - 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$

Además AOB es un triángulo isósceles, por lo que $b + c = a \Rightarrow$
 $\Rightarrow c = a - b = 70^\circ - 20^\circ = 50^\circ$ y $g = 180^\circ - a - b - c = 180^\circ - 2 \times 70^\circ = 40^\circ$

El ángulo f es suplementario de $g \Rightarrow f = 180^\circ - g = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$

El triángulo CAB es rectángulo en A y, en consecuencia,
 $b + c + d = 90^\circ \Rightarrow d = 90^\circ - b - c = 90^\circ - 20^\circ - 50^\circ = 20^\circ$

Por lo tanto, se verifica que

$$a = 70^\circ, b = 20^\circ, c = 50^\circ, d = 20^\circ, e = 20^\circ, f = 140^\circ, g = 40^\circ$$

Hay enteros positivos a tales que la suma $a+2a+3a+4a+5a+6a+7a+8a+9a$ es un número cuyas cifras son todas iguales.

¿Cuál es el menor de ellos?



SOLUCIÓN

$$a + 2a + 3a + 4a + 5a + 6a + 7a + 8a + 9a = 45a = 5 \times 9 \times a$$

Como este número debe ser divisible por 5, ésta debe ser la cifra que se repite.

También debe ser divisible por 9 y como éste es primo con 5, el menor número con las cifras iguales a 5 y que es divisible por 9 es el que tiene nueve cincos: $45a = 555555555$

$$\text{Entonces, } a = \frac{555555555}{45} = 12345679$$

12345679

¿Qué número ocupa el lugar 2015 en la sucesión

1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, ...?

$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$

SOLUCIÓN

Revisamos la sucesión dada 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, ... y construimos, a partir de ella, la sucesión $a_n = m$ en donde m es el lugar que ocupa el último n de la sucesión original.

Entonces,

- $a_1 = 1$ porque el último 1 de la sucesión original ocupa el lugar 1
- $a_2 = 3$ porque el último 2 de la sucesión original ocupa el lugar 3
- $a_3 = 6$ porque el último 3 de la sucesión original ocupa el lugar 6
- $a_4 = 10$ porque el último 4 de la sucesión original ocupa el lugar 10
- ... y así sucesivamente...

Esta sucesión 1, 3, 6, 10, ... puede analizarse y observarse que cumple:

$$1 = \frac{2 \times 1}{2}, 3 = \frac{3 \times 2}{2}, 6 = \frac{4 \times 3}{2}, 10 = \frac{5 \times 4}{2}, \dots \Rightarrow a_n = \frac{(n+1) \times n}{2}$$

Hacemos entonces $a_n = \frac{(n+1) \times n}{2} = 2015 \Rightarrow n^2 + n = 4030 \Rightarrow n^2 + n - 4030 = 0 \Rightarrow n = 62,98425\dots$, entre 62 y 63 y desechando, según el contexto del problema, la solución negativa.

Calculamos $a_{62} = \frac{(62+1) \times 62}{2} = 1953$ y $a_{63} = \frac{(63+1) \times 63}{2} = 2016$, que quiere decir, según la construcción de la sucesión, que el número 63 se repite desde la posición 1954 hasta la posición 2016 en la sucesión original.

Concluimos que

la posición 2015 está ocupada por el número 63

Sabiendo que letras distintas se identifican con cifras distintas resuelve el criptograma

$$(ZOO)^2 = TOPAZ$$

SOLUCIÓN

Como $400^2 = 160000$ tiene 6 cifras y $300^2 = 90000$ tiene 5 cifras, se cumple que $Z < 4$

Además es evidente que $Z > 0 \Rightarrow Z = 1, 2 \text{ o } 3$

Entre los valores posibles, como Z es la última cifra de un cuadrado perfecto $\Rightarrow Z = 1$

Entonces, ZOO necesariamente acaba en 9 $\Rightarrow O = 9$

De ahí, $(ZOO)^2 = 199^2 = 39601 \Rightarrow T = 3, P = 6, A = 0$

$$199^2 = 39601$$

Manolito Wapo es un enamorado de las motos.

Ahora quiere comprar una Honda CB 1300 ABS de segunda mano que cuesta 5400 euros.

Cuando se le pregunta por sus ahorros, dice: “Si tuviera un quinto más de lo que tengo, me faltaría la cuarta parte menos de lo que me falta para poder pagarlo”.

¿Cuánto dinero tiene ahorrado Manolito?



SOLUCIÓN

Llamamos x a los euros que tiene y planteamos la ecuación interpretando el enunciado:

- “Si tuviera un quinto más de lo que tengo”: tendría $x + \frac{x}{5} = \frac{6x}{5}$ y me faltaría $5400 - \frac{6x}{5}$
- “Me falta” para pagarla: $5400 - x$
- “Me faltaría una cuarta parte menos de lo que me falta para poder pagarlo”: me faltaría una cuarta parte menos de $5400 - x$: $5400 - x - \frac{5400 - x}{4} = \frac{3 \times (5400 - x)}{4}$

$$\text{Entonces, } \frac{3 \times (5400 - x)}{4} = 5400 - \frac{6x}{5} \Rightarrow 15 \times 5400 - 15x = 20 \times 5400 - 24x \Rightarrow 9x = 5 \times 5400 = 27000 \Rightarrow$$

$$x = \frac{27000}{9} = 3000 \text{ euros}$$

Es decir,

Manolito Wapo tiene 3000 euros ahorrados

¿Cuál es el número más pequeño que multiplicado por 10! da un cubo perfecto?

$$n! = \prod_{k=1}^n k$$

SOLUCIÓN

$$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 2 \times 5 \times 3^2 \times 2^3 \times 7 \times 2 \times 3 \times 5 \times 2^2 \times 3 \times 2 = 2^8 \times 3^4 \times 5^2 \times 7 = 3628800$$

Para llegar a construir un cubo perfecto, en el resultado del producto todos los exponentes de los factores primos de su descomposición deben ser múltiplos de 3, por lo que le faltan los factores para completarlo:

$$2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2 = 4410$$

Entonces,

el número más pequeño es 4410

Tengo 5 hijos, que han nacido cada cuatro años.

La edad del mayor es nueve veces la edad del pequeño.

¿Cuál es la edad de mi tercer hijo?



SOLUCIÓN

Llamando n a la edad del pequeño, las demás edades son $n+4$, $n+8$, $n+12$ y $n+16$

Según el enunciado, $n+16 = 9n \Rightarrow 8n = 16 \Rightarrow n = 2$, y la edad del tercero es $n+8$ por lo que

el tercero tiene 10 años

Halla el valor de x en la ecuación

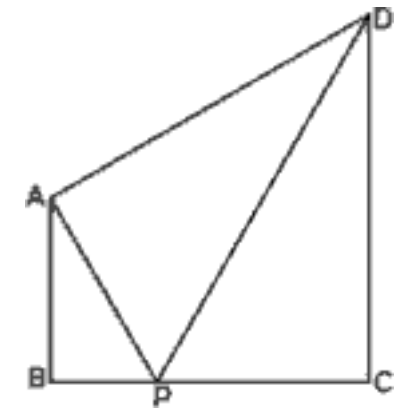
$$2^{1994} + 4^{997} + 8^{665} = 16^x$$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} 2^{1994} + 4^{997} + 8^{665} &= 16^x \Rightarrow 2^{1994} + (2^2)^{997} + (2^3)^{665} = (2^4)^x \Rightarrow 2^{1994} + 2^{2 \times 997} + 2^{3 \times 665} = 2^{4x} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2^{1994} + 2^{1994} + 2^{1995} &= 2^{4x} \Rightarrow 2^{1994} \times (1 + 1 + 2) = 2^{4x} \Rightarrow 2^{1994} \times 4 = 2^{4x} \Rightarrow 2^{1994} \times 2^2 = 2^{4x} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2^{1994 + 2} &= 2^{4x} \Rightarrow 2^{1996} = 2^{4x} \Rightarrow 4x = 1996 \Rightarrow x = \frac{1996}{4} = 499 \end{aligned}$$

$$\mathbf{x = 499}$$

Los tres triángulos de la figura son rectángulos y semejantes. Si el triángulo ABP tiene de área 12 cm^2 , ¿cuál es el área del trapecio $ABCD$?



SOLUCIÓN

Evidentemente, al tener hipotenusa común, los triángulos DAP y DCP tienen las mismas longitudes en sus lados respectivos e idéntica área.

Sea k la razón de semejanza entre los lados de los triángulos. El área de los dos triángulos DAP y DCP es, en cada caso, $12k^2 \text{ cm}^2$ y se verifica también que $\overline{DC} = \overline{AB}k$ y $\overline{PC} = \overline{BP}k$

Y está claro que

- $\frac{\overline{AB} \times \overline{BP}}{2} = 12 \Rightarrow \overline{AB} \times \overline{BP} = 24$
- $\frac{\overline{DC} \times \overline{PC}}{2} = 12k^2 \Rightarrow \overline{DC} \times \overline{PC} = 24k^2$

$$\begin{aligned} \text{El área del trapecio es la semisuma de las bases por la altura: } & \frac{(\overline{AB} + \overline{DC}) \times (\overline{BP} + \overline{PC})}{2} = \\ & = \frac{\overline{AB} \times \overline{BP} + \overline{AB} \times \overline{PC} + \overline{DC} \times \overline{BP} + \overline{DC} \times \overline{PC}}{2} = \frac{24 + \overline{AB} \times \overline{BP}k + \overline{AB}k \times \overline{BP} + 24k^2}{2} = \\ & = \frac{24 + 24k + 24k + 24k^2}{2} = 12 + 24k + 12k^2 \end{aligned}$$

Por otro lado, el área del trapecio es la suma de las áreas de los triángulos: $12 + 12k^2 + 12k^2 = 12 + 24k^2$

Iguando las dos expresiones obtenemos $12 + 24k^2 = 12 + 24k + 12k^2 \Rightarrow 12k^2 = 24k \Rightarrow 12k = 24 \Rightarrow k = 2$

Entonces, el área del trapecio es $12 + 24k^2 = 12 + 24 \times 2^2 = 12 + 96 = 108 \text{ cm}^2$

El área del trapecio $ABCD$ es 108 cm^2

Al intentar multiplicar dos enteros de dos cifras Manolo se equivoca e invierte el orden de las cifras de uno de los números (que no tiene ninguna cifra nula), obteniendo un resultado que supera al correcto en 3816.

¿Cuál será el resultado correcto?



SOLUCIÓN

Sean \overline{ab} y \overline{cd} los números que tiene Manolo.

Multiplicando correctamente obtendría $\overline{ab} \times \overline{cd} = (10a + b) \times (10c + d)$, pero ha hecho $\overline{ab} \times \overline{dc} = (10a + b) \times (10d + c)$

Según el enunciado, $\overline{ab} \times \overline{cd} - \overline{ab} \times \overline{dc} = (10a + b) \times (10c + d) - (10a + b) \times (10d + c) = 3816 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (10a + b) \times (10c + d - 10d - c) = 3816 \Rightarrow (10a + b) \times (9c - 9d) = 3816 \Rightarrow (10a + b) \times 9 \times (c - d) = 3816$

Simplificando, $(10a + b) \times (c - d) = 424 = 53 \times 8$

Como los dos números son de dos cifras y 53 es primo, necesariamente $\overline{ab} = 53$ y $c - d = 8 \Rightarrow c = 9$ y $d = 1 \Rightarrow \overline{cd} = 91$

En resumen, el resultado correcto sería

$$\mathbf{53 \times 91 = 4823}$$

Tenemos seis palitos de longitudes 1, 3, 5, 7, 11 y 13 cm.

¿Cuántos triángulos diferentes pueden construirse utilizando tres de esos seis palitos?



SOLUCIÓN

Para poder construir un triángulo la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera debe ser, siempre mayor que la longitud del tercero.

Por tanto, con el palito de 1 cm no puede construirse ningún triángulo.

Con el palito de 3 cm se pueden construir los triángulos de 3, 5 y 7 cm y 3, 11 y 13 cm

Con el palito de 5 cm se pueden construir los triángulos de 5, 7 y 11 cm y 5, 11 y 13 cm, además del ya citado anteriormente.

Con el palito de 7 cm se pueden construir el triángulo de 7, 11 y 13 cm, además de los ya citados anteriormente.

Y con los palitos de 11 y 13 cm ya hemos citado los que se pueden construir.

En conclusión,

se pueden construir 5 triángulos

Un filatélico compra sellos de 1, 4 y 12 euros por un total de 100 euros.
Si compra 40, ¿cuántos son de cada clase?

SOLUCIÓN

Sean x, y, z las cantidades respectivas de sellos de 1, 4, 12 euros.

Según el enunciado, $\left. \begin{array}{l} x + 4y + 12z = 100 \\ x + y + z = 40 \end{array} \right\}$. Restando ambas expresiones tenemos

$$\text{que } 3y + 11z = 60 \Rightarrow y = \frac{60 - 11z}{3} = 20 - 3z - \frac{2z}{3}$$

Si $z = 3$ (valor inicial admisible al deber ser $y > 0$ entero), $y = 9 \Rightarrow x = 40 - y - z = 28$

Si $z = 6 \Rightarrow y = -2$, lo cual es imposible y también sucede para valores superiores de z .

Por ello,

compra 28 sellos de 1 euro, 9 sellos de 4 euros y 3 sellos de 12 euros



En un comercio los productos reducen su precio durante unas rebajas.

Los bolsos azul y rojo cuestan, en principio, 10 euros cada uno y se rebaja el bolso azul el 10% y el bolso rojo el 20%.

Después de las rebajas el comerciante decide aumentar los precios: el bolso azul se incrementa en el 10% y el bolso rojo en el 20%.

¿Qué bolso es ahora más barato?



SOLUCIÓN

Con las rebajas el bolso azul pasa a costar $10 - 10\% \times 10 = 10 - \frac{100}{100} = 10 - 1 = 9$ euros y el bolso rojo vale

$$10 - 20\% \times 10 = 10 - \frac{200}{100} = 10 - 2 = 8 \text{ euros.}$$

Después de la subida el bolso azul costará $9 + 10\% \times 9 = 9 + \frac{90}{100} = \frac{990}{100} = 9,9$ euros y el bolso rojo valdrá

$$8 + 20\% \times 8 = 8 + \frac{160}{100} = \frac{960}{100} = 9,6 \text{ euros, por lo que}$$

después de la subida es más barato el bolso rojo

La edad de Lourdes tiene las mismas cifras que las de su sobrino Guille pero con el orden cambiado.

Dentro de cinco años Lourdes tendrá el doble de la edad que Guille.

¿Cuál es la actual diferencia de edad entre ellos?



SOLUCIÓN

Sea \overline{ab} la edad de Lourdes y \overline{ba} la edad de Guille.

$$\begin{aligned}\text{Según el enunciado, } \overline{ab} + 5 &= 2 \times (\overline{ba} + 5) \Rightarrow 10a + b + 5 = 2 \times (10b + a + 5) = 20b + 2a + 10 \Rightarrow \\ \Rightarrow 8a &= 19b + 5 \Rightarrow a = 2b + \frac{3b + 5}{8}\end{aligned}$$

Como a y b son cifras, la única posibilidad válida es para $b = 1 > a - 3$, por lo que Lourdes tiene 31 años y Guille tiene 13 años y

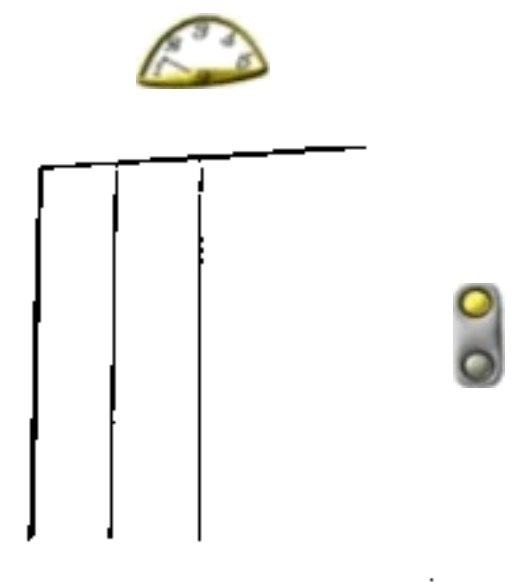
se llevan actualmente 18 años

Cuatro amigos entran en un ascensor, que puede transportar un máximo de 380 kg.

Antonio es el que pesa más: si los otros tres pesasen lo mismo que él sonaría la alarma del ascensor por exceso de peso, y Benito es el más ligero: el ascensor puede transportar, sin problemas, a cinco como él.

Carlos pesa 14 kg menos que Antonio y 6 menos que Dámaso, y éste último pesa 17 kg más que Benito.

Si el peso de Benito es múltiplo de cinco, ¿cuánto pesa cada uno?



SOLUCIÓN

Llamamos a , b , c y d a los pesos respectivos de Antonio, Benito, Carlos y Dámaso.

Por el enunciado, se verifica que:

- i. $4a > 380$
- ii. $5b < 380$
- iii. $c = a - 14$
- iv. $c = d - 6$
- v. $d = b + 17$
- vi. $b = 5x$

Usando las igualdades se obtiene que $c = a - 14 \Rightarrow a = c + 14$, $d = c + 6$, $d = b + 17 \Rightarrow b = d - 17$, $b = c + 21$ y, con las dos desigualdades indicadas, $5b < 380 < 4a \Rightarrow 25x < 380 < 4 \times (5x + 25) \Rightarrow$

$$25x < 380 < 20x + 100 \Rightarrow 5x < 76 < 4x + 20 \Rightarrow \begin{cases} 5x < 76 \Rightarrow x < \frac{76}{5} = 15.2 \Rightarrow x \leq 15 \\ 4x + 20 > 76 \Rightarrow 4x > 56 \Rightarrow x > \frac{56}{4} = 14 \Rightarrow x > 14 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14 < x \leq 15 \Rightarrow x = 15$$

De ahí, $b = 5x = 75$, $a = b + 25 = 100$, $c = a - 14 = 86$ y $d = b + 17 = 92$, y se concluye que

Antonio pesa 100 kg

Benito pesa 75 kg

Carlos pesa 86 kg

Dámaso pesa 92 kg

Un libro tiene, además del prólogo, 213 páginas y está dividido en 12 capítulos que tienen 25, 20 ó 16 páginas cada uno.

¿Cuántos capítulos tienen 25 páginas?



SOLUCIÓN

Sean a , b y c la cantidad de capítulos de 25, 20 y 16 páginas respectivamente.

$$\text{Se cumple que } \left. \begin{array}{l} 25a + 20b + 16c = 213 \\ a + b + c = 12 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} 25a + 20b + 16c = 213 \\ c = 12 - a - b \end{array} \right\} \rightarrow 25a + 20b + 16 \times (12 - a - b) = 213 \rightarrow$$

$$\Rightarrow 9a + 4b + 192 = 213 \Rightarrow 9a + 4b = 21 \Rightarrow a = 2 + \frac{3-4b}{9}$$

Como $0 < a, b < 12$ y enteros, la única posibilidad es que $b = 3 \Rightarrow a = 1 (\Rightarrow c = 8)$

Por lo tanto,

hay un solo capítulo de 25 páginas

Ana y Bea salen, al mismo tiempo, de dos puntos diametralmente opuestos en una pista circular a distintas velocidades y en sentidos contrarios.

Cuando se cruzan por primera vez, Ana lleva recorridos 100 metros y, desde ese instante hasta que se encuentran por segunda vez, Bea ha recorrido 150 metros.

Si ambas velocidades son constantes, ¿cuántos metros tiene la pista?



SOLUCIÓN

Sea r el radio de la pista circular.

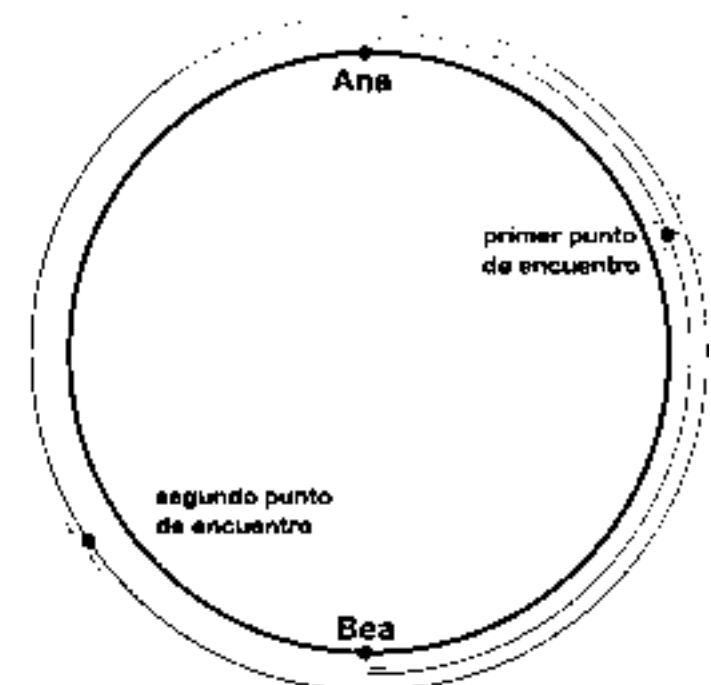
La primera vez que se encuentran ambas han recorrido, entre las dos, media pista como se ve en el esquema, por lo que Ana ha recorrido 100 metros y Bea ha recorrido $\pi r - 100$ metros.

La segunda vez que coinciden habrán completado una vuelta completa entre las dos, por lo que Bea ha recorrido 150 metros y Ana $2\pi r - 150$ metros.

Al ir a velocidad constante los recorridos serán proporcionales en los mismos tiempos, por lo que

$$\frac{100}{\pi r - 100} = \frac{2\pi r - 150}{150} \Rightarrow 15000 = (\pi r - 100) \times (2\pi r - 150) \Rightarrow 15000 = 2\pi^2 r^2 - 350\pi r + 15000 \Rightarrow$$

$$= 2\pi^2 r^2 - 350\pi r = 0 \Rightarrow 2\pi r = 350 \text{ metros, que es la longitud de la pista.}$$



La pista tiene 350 metros de longitud

El número de lotería que compré para Navidad es curiosísimo: capicúa, al sumar sus cinco cifras da el mismo resultado que si se multiplican.

Además, la primera cifra de la izquierda es la edad de mi sobrino más pequeño, las dos siguientes forman la edad de mi sobrino mediano y las dos últimas la de mi sobrino mayor, que es dos años más que la del mediano.

¿Cuál es el número?



SOLUCIÓN

Sea $abcba$ el número que se busca.

Se cumple que $a + b + c + b + a = a \times b \times c \times b \times a \Rightarrow 2a + 2b + c = a^2 \times b^2 \times c$, luego $a, b, c > 0$

Además, $\overline{ba} = \overline{bc} + 1 \Rightarrow 10b + a = 10b + c + 2 \Rightarrow a = c + 2$

Por lo tanto, $2a + 2b + c = a^2 \times b^2 \times c \Rightarrow 2 \times (c + 2) + 2b + c = (c + 2)^2 \times b^2 \times c \Rightarrow$
 $\Rightarrow 3c + 2b + 4 = (c + 2)^2 \times c \times b^2 \Rightarrow (c + 2)^2 \times c \times b^2 - 2b - 3c - 4 = 0$

Resolvemos la ecuación de segundo grado para b : $b = \frac{1 + \sqrt{1 + (c + 2)^2 \times c \times (3c + 4)}}{(c + 2)^2 \times c}$, usando la fórmula

simplificada cuando el término de primer grado tiene coeficiente par y eligiendo únicamente la opción adecuada.

Como $0 < b < 10$ es una cifra, $\Delta = 1 + (c + 2)^2 \times c \times (3c + 4)$ debe ser un cuadrado perfecto. Vemos las posibilidades:

- $c = 1 \Rightarrow \Delta = 1 + 3^2 \times 1 \times 7 = 64 \Rightarrow b = \frac{1 + \sqrt{64}}{9} = \frac{1 + 8}{9} = 1$, y $a = c + 2 = 3$
- $c > 1$: el cociente que da lugar a la expresión de b es menor que la unidad, por lo que es imposible...

Entonces,

el número de lotería es 31113

El producto de las edades de las hijas de Vicente es 1664, y la más pequeña tiene la mitad de la edad de la mayor.

¿Cuántas hijas tiene Vicente?



SOLUCIÓN

Como $1664 = 2^7 \times 13$ mediana tendrá 13 años, la mayor debe tener más de 13 años y el pequeño menos, siendo la edad de éste la mitad de la del mayor.

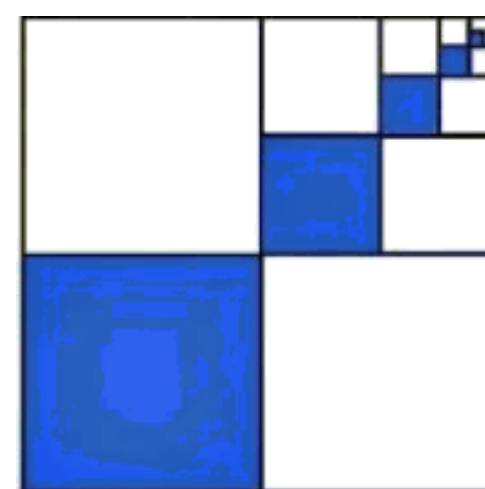
La única posibilidad es que las edades correspondan, respectivamente, a $2^3 = 8$, 13 y $2^4 = 16$ años.

Por eso,

Vicente tiene tres hijas

Se divide un cuadrado en cuatro cuadrados mediante dos segmentos, como se ve en la figura, y pintamos de azul el cuadrado inferior izquierdo resultante. Con el cuadrado superior derecho repetimos el mismo proceso y, así, indefinidamente.

¿Qué fracción del cuadrado original queda pintada de azul?



SOLUCIÓN

Si damos 1 al valor de la superficie del cuadrado externo, la parte pintada de azul será:

$$S = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \dots$$

O sea, la suma infinita de una progresión geométrica de razón $r = \frac{1}{4}$ y cuyo primer término es $a_1 = \frac{1}{4}$. Por

$$\text{tanto, su valor será } S = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \dots = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

Si no se está familiarizado con las progresiones geométricas, puede hacerse de otra manera:

$$S = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \dots \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}S \Rightarrow S - \frac{1}{4}S = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{3}{4}S = \frac{1}{4} \Rightarrow S = \frac{1}{3}$$

En resumen,

**área pintada de azul es la tercera parte
de la superficie total del cuadrado original**

Halla los dígitos que faltan en el producto siguiente:

$$\begin{array}{r}
 2 _ _ \\
 \times _ _ \\
 \hline
 _ 6 1 \\
 _ _ _ \\
 \hline
 _ _ 0 1
 \end{array}$$

SOLUCIÓN

En principio nombramos a todos los dígitos que faltan como se ve en la figura.

Si el resultado de cada producto parcial es un número de tres dígitos, debe ser $C, D \leq 4$.

Además, es evidente que $H = 4$

Como el producto $D \times B$ acaba en 1, con las limitaciones deducidas D es impar menor de 4 y caben estas posibilidades:

- a) $D = 1 \Rightarrow B = 1 \Rightarrow A = 6, E = 2$, y como $H = 4 \Rightarrow C = 4 \Rightarrow G = 4, J = 7$ y tendríamos, obligatoriamente, que $F = 10$: ¡imposible!
- b) $D = 3 \Rightarrow B = 7 \Rightarrow A = 8, C = 2 \Rightarrow E = 8, G = 7, F = 5 \Rightarrow J = 6, I = 6$ (lo cual es válido) quedando completada así la multiplicación:

$$\begin{array}{r}
 287 \\
 \times 23 \\
 \hline
 861 \\
 574 \\
 \hline
 6601
 \end{array}$$

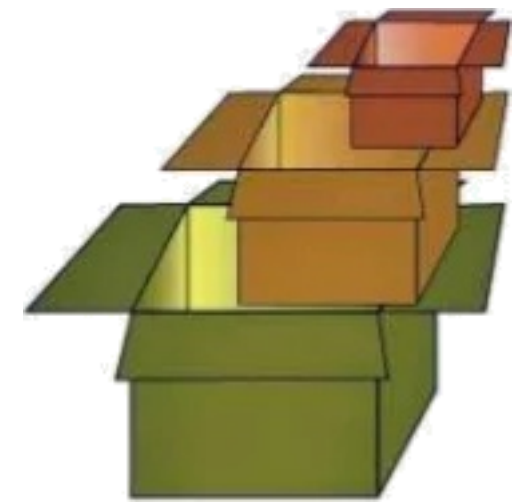
$$\begin{array}{r}
 2AB \\
 \times CD \\
 \hline
 E61 \\
 FGH \\
 \hline
 IJ01
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 261 \\
 \times 41 \\
 \hline
 261 \\
 F44 \\
 \hline
 I701
 \end{array}$$

Tenemos 11 cajas grandes.

Algunas de ellas contienen, cada una, 8 cajas medianas. A su vez algunas de éstas contienen, cada una, 8 cajas pequeñas.

Si hay 102 cajas vacías, ¿cuántas cajas hay en total?



SOLUCIÓN

Llamamos a y b el número respectivo de cajas vacías grandes y medianas. Las pequeñas, evidentemente, están todas vacías.

Como hay 11 cajas grandes, habrá $11 - a$ cajas grandes con alguna caja en su interior, por lo que hay, en total, $(11 - a) \times 8$ cajas medianas.

De éstas últimas hay b vacías, por lo que habrá $(11 - a) \times 8 - b$ con cajas pequeñas en su interior, luego hay $((11 - a) \times 8 - b) \times 8$ cajas pequeñas, todas vacías.

En resumen, hay $a + b + ((11 - a) \times 8 - b) \times 8$ cajas vacías en total: $a + b + ((11 - a) \times 8 - b) \times 8 = 102 \Rightarrow$
 $\Rightarrow a + b + ((11 - a) \times 8 - b) \times 8 = 102 \Rightarrow a + b + 704 - 64a - 8b = 102 \Rightarrow 63a + 7b = 704 - 102 = 602 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 63a + 7b = 602 \Rightarrow 9a + b = 86 \Rightarrow b = 86 - 9a$

La cantidad de cajas será, entonces,

$$\begin{aligned} 11 + (11 - a) \times 8 + ((11 - a) \times 8 - b) \times 8 &= 11 + (11 - a) \times 8 + ((11 - a) \times 8 - (86 - 9a)) \times 8 = \\ &= 11 + 88 - 8a + (88 - 8a - 86 + 9a) \times 8 = 11 + 88 - 8a + (2 + a) \times 8 = 99 - 8a + 16 + 8a = 115 \end{aligned}$$

Hay 115 cajas

A es un número de 2015 dígitos divisible por 18.

Si B es la suma de los dígitos de A, C la suma de los dígitos de B y D la suma de los dígitos de C, ¿cuánto vale D?



SOLUCIÓN

Según las condiciones del enunciado, el mayor número posible B correspondería al valor de $A = \overset{2014\text{dígitos}}{999\dots9}0$, o $A = \overset{2013\text{dígitos}}{999\dots9}18$, $A = \overset{2013\text{dígitos}}{999\dots9}36$, $A = \overset{2013\text{dígitos}}{999\dots9}54$, $A = \overset{2013\text{dígitos}}{999\dots9}72$. En cualquiera de esos casos, $B = 2014 \times 9 = 18126$, mayor valor posible.

El menor valor de B corresponde a $A = \overset{2014\text{dígitos}}{1000\dots0}8$ o similares (en este contexto): $B = 9$

Por tanto B, múltiplo de 9 cumple que $9 \leq B \leq 18126$

Está claro que el mayor valor posible de C corresponde a $B = 9999$ o similares: $C = 36$ y su menor valor es, evidentemente, $9 \Rightarrow 9 \leq C \leq 36$ y múltiplo de 9

Claramente $D = 9$ al ser la suma de los dígitos de C

$$\mathbf{D = 9}$$

El caballo de Ana es más oscuro que el de Carlos, pero más rápido y más viejo que el de Daniel, que es todavía más lento que el de Luisa, que es más joven que el de Ana, que es más viejo que el de Carlos, que es más claro que el de Luisa, aunque el de Daniel es más lento y más oscuro que el de Carlos.

¿Cuál es más viejo, cuál más lento y cuál más claro?



SOLUCIÓN

Llamamos a , c , d , l a los caballos respectivos de Ana, Carlos, Daniel y Luisa.

Según el enunciado,

- en la cuestión de ser “más viejo que” ($= '>'$), se cumple que $a > d$, $a > l$, $a > c \Rightarrow a$ es el más viejo.
- en la cuestión de ser “más lento que” ($= '>'$), se cumple que $d > a$, $d > l$, $d > c \Rightarrow d$ es el más lento.
- en la cuestión de ser “más claro que” ($= '>'$), se cumple que $c > a$, $c > l$, $c > d \Rightarrow c$ es el más claro.

Resumiendo,

**es más viejo el de Ana,
es más lento el de Daniel,
es más claro el de Carlos**

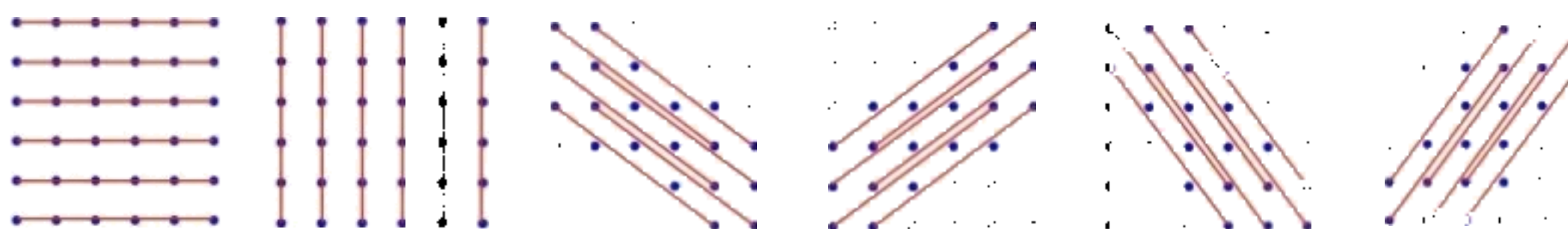
En el retículo de la figura, la distancia entre dos puntos contiguos (horizontal o verticalmente) es 1 cm. Se unen dos puntos formando un segmento de longitud 5 cm.

¿Cuántos segmentos como ése se pueden trazar en el retículo?



SOLUCIÓN

Son los siguientes, en grupos de 6 :



Los cuatro últimos tipos de segmentos están contruidos como hipotenusas de triángulos rectángulos con catetos iguales a 3 y 4 cm.

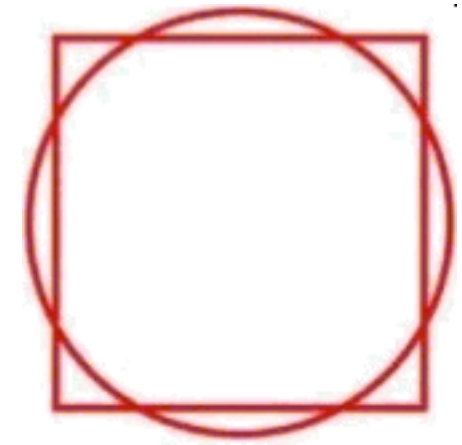
En consecuencia,

se pueden trazar 36 segmentos de 5 cm

Un cuadrado, de 2 cm de lado, y un círculo son concéntricos.

El área de la región del círculo que es exterior al cuadrado es igual al área de la región del cuadrado que es exterior al círculo.

¿Cuál es el radio del círculo?



SOLUCIÓN

El enunciado nos está indicando claramente, que las áreas de círculo y cuadrado son iguales (: los “sobrantes” de círculo y cuadrado, respecto de la parte común, tienen el mismo área) por lo que si r es el

radio del círculo, $\pi \times r^2 = 2^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{2^2}{\pi}} = \sqrt{\frac{4}{\pi}} = 1,1284 \text{ cm}$

Es decir,

el radio del círculo mide 1,1284 cm

En una carpintería hay listones de tres longitudes.

Usando la misma cantidad de listones de cada una de las longitudes, y colocándolos uno a continuación del otro, se pueden completar exactamente 62,79 metros.

La misma longitud exacta puede completarse usando solo listones de la misma longitud de cualquiera de las tres posibles.

¿Qué longitudes tienen los listones?



SOLUCIÓN

Llamamos a , b , c a las longitudes de los tres tipos de listones en centímetros.

Según el enunciado, puede usarse el mismo número de listones de cada una de las longitudes para completar la longitud total: $n \times (a + b + c) = 62,79 \text{ m} = 6279 \text{ cm} \Rightarrow a + b + c$ es divisor de 6279

Además se puede completar, alternativamente, la longitud citada con listones del mismo tipo por lo que, usando la misma lógica de antes, a , b , c son divisores de 6279

Como $6279 = 3 \times 7 \times 13 \times 23$ y $3 + 7 + 13 = 23$, es evidente que

las longitudes de los listones son 3, 7 y 13 cm

Halla los números enteros positivos tales que, suprimiéndoles las dos últimas cifras, se hacen 123 veces menores.

abcd... ..xx

SOLUCIÓN

Sea el número $\overline{Nab} = 100N + 10a + b$, con a, b cifras

Si cumple la condición del enunciado, $\overline{Nab} = 100N + 10a + b = 123N \Rightarrow 23N = 10a + b \Rightarrow N = \frac{10a + b}{23}$

Las únicas posibilidades son:

- $a = 2, b = 3 \Rightarrow N = 1 \Rightarrow \overline{Nab} = 123$
- $a = 4, b = 6 \Rightarrow N = 2 \Rightarrow \overline{Nab} = 246$
- $a = 6, b = 9 \Rightarrow N = 3 \Rightarrow \overline{Nab} = 369$
- $a = 9, b = 2 \Rightarrow N = 4 \Rightarrow \overline{Nab} = 492$

Por tanto, los números son

123, 246, 369, 492

En la gráfica adjunta aparecen los resultados de un entrenamiento de un equipo de corredores.

Ordena, de más rápido a más lento, a todos los corredores.

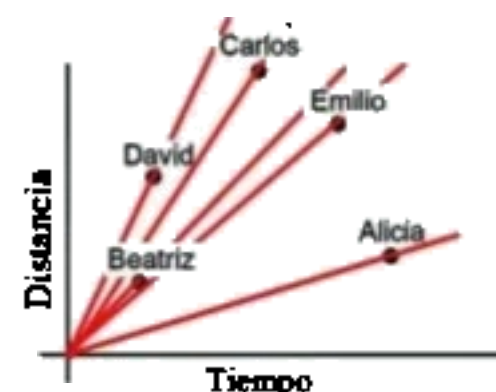


SOLUCIÓN

Como $velocidad = \frac{distancia}{tiempo}$, la inclinación (pendiente) de cada recta que une el

origen de coordenadas con cada punto nos determinará el orden: a mayor ángulo de inclinación, mayor velocidad.

Según se aprecia en la figura adjunta, la ordenación (de mayor rapidez a menos) es



David – Carlos – Beatriz – Emilio – Alicia

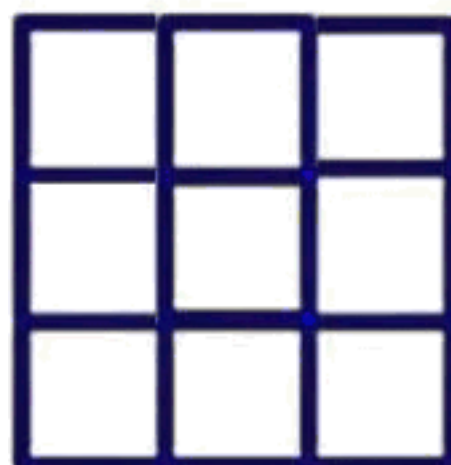
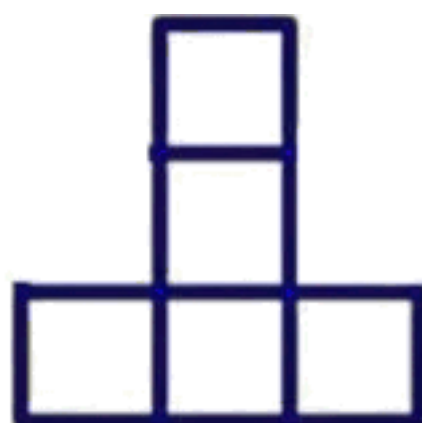
En la figura se ve una construcción hecha con cubos, desde la izquierda y desde el frente respectivamente.

¿Cuántos cubos pueden haberse usado?



SOLUCIÓN

La cantidad está entre la mínima, que correspondería a esta vista cenital (desde arriba): 10 cubos

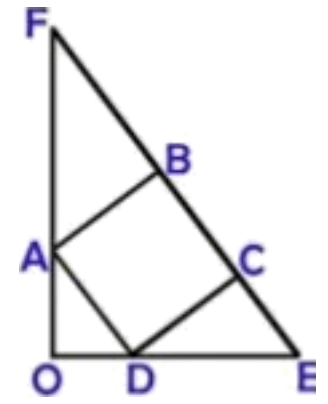


y la máxima, con esta vista cenital: 16 cubos

Entre 10 y 16 cubos, ambas cantidades inclusive

En la figura adjunta, el triángulo OEF es rectángulo y $ABCD$ es un cuadrado.

Si $OA = 48$ cm y $OD = 36$ cm, ¿cuál es la longitud de la hipotenusa EF ?



SOLUCIÓN

Al ser $ABCD$ un cuadrado y OEF un triángulo rectángulo, la estructura de la imagen determina que los triángulos ODA , CDE y BFA son rectángulos y semejantes, al tener los tres ángulos iguales. Por tanto, los lados respectivos son proporcionales.

Además, en el triángulo rectángulo ODA , $DA = \sqrt{OA^2 + OD^2} = \sqrt{48^2 + 36^2} = 60$ cm, luego $CD = BC = AB = DA = 60$ cm

Al ser ODA y CDE semejantes, $\frac{OA}{OD} = \frac{CD}{CE} \Rightarrow \frac{48}{36} = \frac{60}{CE} \Rightarrow CE = \frac{60 \times 36}{48} = 45$ cm

Al ser ODA y BFA semejantes, $\frac{OA}{OD} = \frac{FB}{AB} \Rightarrow \frac{48}{36} = \frac{FB}{60} \Rightarrow FB = \frac{60 \times 48}{36} = 80$ cm

Por lo tanto, $EF = FB + BC + CE = 80 + 60 + 45 = 185$ cm

$$\mathbf{EF = 185 \text{ cm}}$$

Un número *desnudo* es aquel cuyos dígitos son todos divisores del número.

Halla todos los números desnudos de 3 dígitos que sean capicúas y que no tengan todas las cifras iguales.



SOLUCIÓN

Tomamos el número capicúa $\overline{aba} = 100a + 10b + a = 101a + 10b$, siendo a y b cifras distintas.

Para que sea desnudo debe cumplirse que

- $101a + 10b = mb \Rightarrow m = 10 + \frac{101a}{b}$. Como 101 es primo, a debe ser múltiplo de b para que m sea entero positivo.
- $101a + 10b = na \Rightarrow n = 101 + \frac{10b}{a}$, y n debe ser entero positivo y también $\frac{10b}{a}$

De lo anterior se concluye que $a = 2b$ ó $a = 5$ y $b = 1$

Las cinco posibilidades que aparecen, secuencialmente, son:

1. $a = 2$ y $b = 1 \Rightarrow n = 106$ y $m = 212 \Rightarrow 212$
2. $a = 4$ y $b = 2 \Rightarrow n = 106$ y $m = 212 \Rightarrow 424$
3. $a = 5$ y $b = 1 \Rightarrow n = 103$ y $m = 515 \Rightarrow 515$
4. $a = 6$ y $b = 3 \Rightarrow n = 106$ y $m = 212 \Rightarrow 636$
5. $a = 8$ y $b = 4 \Rightarrow n = 106$ y $m = 212 \Rightarrow 848$

212 – 424 – 515 – 636 – 848

Un triángulo equilátero CDE se dibuja exteriormente al cuadrado $ABCD$.

¿Cuánto mide el ángulo AEC ?

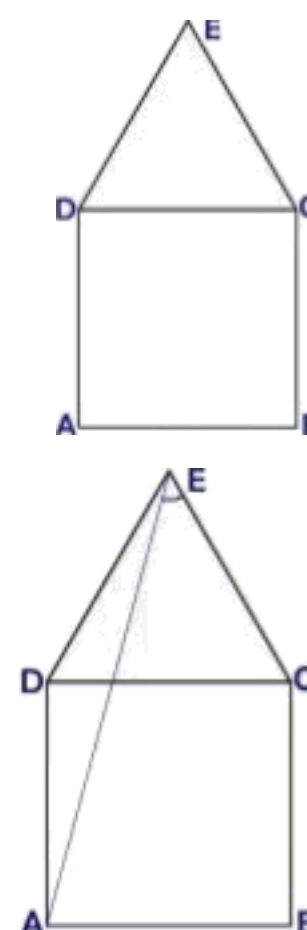
SOLUCIÓN

El ángulo $ADE = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$ y, como el triángulo ADE es isósceles (los lados AD y DE son iguales, por construcción), los ángulos $DEA = EAD = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ$

Como el ángulo $DEC = 60^\circ \rightarrow AEC = DEC - DEA = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ$

Es decir,

$$\mathbf{AEC = 45^\circ}$$



¿Cuántos números de cuatro cifras verifican que la suma de la cifra de las unidades, la cifra de las decenas y el número formado por las dos primeras cifras es igual al número formado por las dos últimas cifras?



SOLUCIÓN

Según el enunciado, los números buscados son \overline{abcd} tales que $d + c + \overline{ab} = \overline{cd}$

Entonces, $d + c + \overline{ab} = \overline{cd} \Rightarrow d + c + 10a + b = 10c + d \Rightarrow 10a + b = \overline{cd} = 9c$.

Es decir, \overline{ab} es múltiplo de 9 y, además, $c = \frac{\overline{ab}}{9}$

Los números, entonces, son:

- $\overline{ab} = 18, c = 2 \Rightarrow 1820, 1821, 1822, \dots, 1829$
- $\overline{ab} = 27, c = 3 \Rightarrow 2730, 2731, 2732, \dots, 2739$
- $\overline{ab} = 36, c = 4 \Rightarrow 3640, 3641, 3642, \dots, 3649$
- \dots
- $\overline{ab} = 81, c = 9 \Rightarrow 8190, 8191, 8192, \dots, 8199$

En total, $10 \times 8 =$

80 números

Halla la superficie de cada una de las piezas del tringam triangular si el triángulo equilátero que forman todas es de 216 centímetros cuadrados.

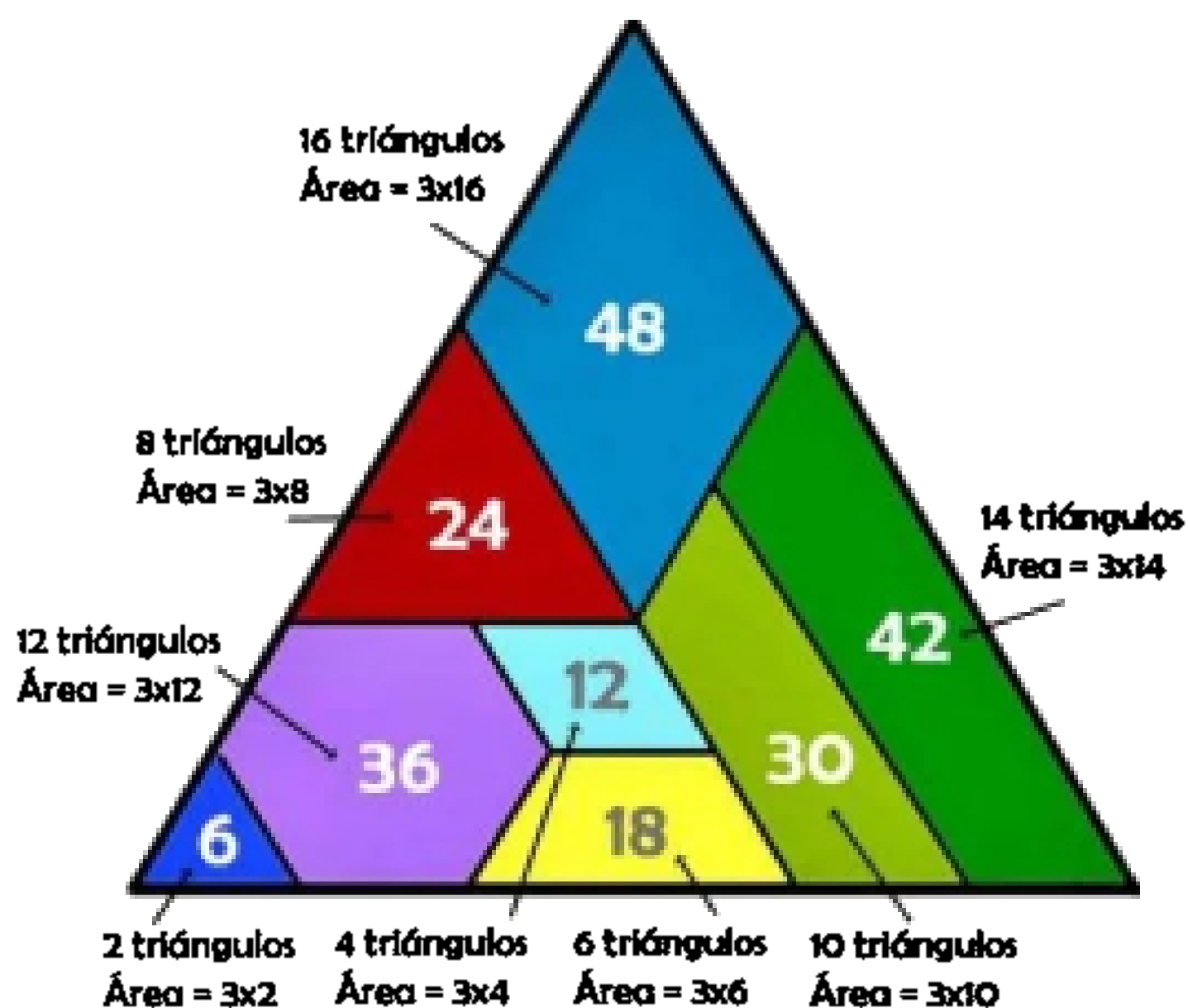


SOLUCIÓN

Si hacemos un teselado en toda la figura y la descomponemos en triángulos rectángulos iguales, obtenemos



Son $2 + 6 + 10 + 14 + 18 + 22 = 72$ triángulos. A partir de ahí obtenemos las respectivas áreas teniendo en cuenta que cada triángulo tiene de área $\frac{216}{72} = 3 \text{ cm}^2$



y todas las superficies medidas en centímetros cuadrados.

¿Cuál es la anchura del rectángulo si mide 2 centímetros de altura?

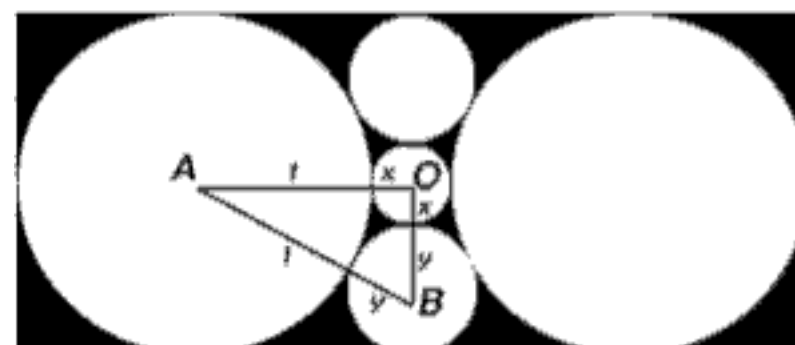


SOLUCIÓN

Como la altura es 2 cm, el radio de los círculos mayores será 1 cm.

Vamos a hallar los radios de los otros dos tipos de círculos, que permitirán determinar la solución.

Llamamos x al radio del círculo pequeño e y el de los medianos, y construimos el triángulo rectángulo AOB uniendo los radios de los tres círculos de distinto tamaño que se ve en la figura y, por el teorema de Pitágoras, se cumple que $(x + y)^2 + (1 + x)^2 = (1 + y)^2$



$$\text{De aquí, } (x + y)^2 + (1 + x)^2 = (1 + y)^2 \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 + 1 + 2x + x^2 = 1 + 2y + y^2 \Rightarrow x^2 + xy + x - y = 0$$

Por otro lado, observemos que $2y + 2x + 2y = 2$ cm, lado vertical del rectángulo:

$$2y + 2x + 2y = 2 \Rightarrow 2y + x = 1 \Rightarrow y = \frac{1 - x}{2}$$

De ambas expresiones obtenemos

$$x^2 + xy + x - y = 0 \Rightarrow x^2 + x \times \frac{1 - x}{2} + x - \frac{1 - x}{2} = 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 1 = 0 \Rightarrow x = \sqrt{5} - 2, \text{ desechando la solución negativa según el contexto del problema.}$$

$$\text{La anchura del rectángulo es } 2 + 2x + 2 = 2 + 2 \times (\sqrt{5} - 2) + 2 = 2 \times \sqrt{5}$$

$$\mathbf{2 \times \sqrt{5} = 4,47 \text{ cm}}$$

En una granja, entre patos y conejos, hay 28 animales al menos.

El número de conejos es superior al doble de la diferencia entre el número de patos y 12, y el número de patos es superior a 9 veces la diferencia entre el número de conejos y 10.



¿Cuál es la diferencia entre el número de patos y el número de conejos?

SOLUCIÓN

Llamamos p al número de patos y c al número de conejos de la granja.

Según el enunciado, $p + c \geq 28$

$$\text{Además, } \begin{cases} c > 2 \times (p - 12) \\ p > 9 \times (c - 10) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c > 2p - 24 \\ p > 9c - 90 \end{cases}$$

Obtengamos ahora límites para los valores de las dos variables:

$$\begin{cases} c > 2p - 24 \\ p > 9c - 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c > 2p - 24 \\ 2p > 18c - 180 \end{cases} \Rightarrow 2p + c > 2p - 24 + 18c - 180 \Rightarrow 204 > 17c \Rightarrow c < 12$$

$$\begin{cases} c > 2p - 24 \\ p > 9c - 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9c > 18p - 216 \\ p > 9c - 90 \end{cases} \Rightarrow p + 9c > 18p - 216 + 9c - 90 \Rightarrow 306 > 17p \Rightarrow p < 18$$

Como $p + c \geq 28$, la única posibilidad lógica es que $c = 11$ y $p = 17$

Hay, pues, 11 conejos y 17 patos. La diferencia entre los números de esos animales es

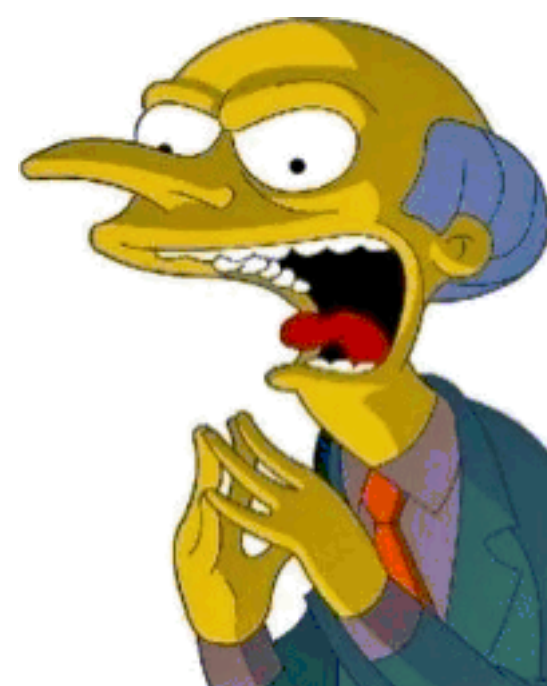
6

Cuentan que un ávaro, con propósito solidario y poco calculador, llevaba cierto dinero en el bolsillo y se encontró, sucesivamente, con cinco magos que aceptaban sistemáticamente una sola petición común.

Con afán de obtener un óptimo y rápido rendimiento de su capital y ser magnánimo a la vez, a los cinco les hizo la misma propuesta: *“Dóblame el dinero que tengo en el bolsillo y, a cambio, te doy mil euros para que entregues a obras de caridad”*.

Al intentar cumplir su acuerdo con el último mago, buscó y rebuscó en su bolsillo y no encontró un solo billete ni una sola moneda.

¿Con cuantos euros comenzó su decepcionante andadura económica?



SOLUCIÓN

Sea x la cantidad inicial de euros que tenía en el bolsillo.

Con el primer mago, consiguió tener en el bolsillo $2x - 1000$ euros.

Con el segundo, $2 \times (2x - 1000) - 1000 = 4x - 3000$ euros.

Y, con el tercero, $2 \times (4x - 3000) - 1000 = 8x - 7000$ euros.

Por fin, y sin enterarse, al final de cumplir con el cuarto mago se encontró con

$2 \times (8x - 7000) - 1000 = 16x - 15000$ euros, que le produjo la situación ya indicada con el quinto mago:

$$16x - 15000 = 0 \Rightarrow x = \frac{15000}{16} =$$

937,5 euros

Para un número entero n calculamos la suma de sus cifras y luego hallamos la suma de las cifras del número así obtenido, y así sucesivamente, hasta obtener un número de una sola cifra, que representaremos así: $L(n)$.

Halla $L(2015^{2015})$.

$L(n)$

SOLUCIÓN

Esta función, por la propia definición y por las propiedades del producto (considérese la *famosa* prueba del producto) cumple que $L(a \times b) = L(L(a) \times L(b))$

Si calculamos la función dada para las potencias sucesivas,

- $L(2015) = 8$
- $L(2015^2) = L(8^2) = L(64) = 1$
- $L(2015^3) = L(8^3) = L(512) = 8 = L(L(8^2) \times L(8))$
- $L(2015^4) = L(8^4) = L(4096) = 1 = L(L(8^2) \times L(8^2))$
-

Observamos que, para potencia impar, el resultado siempre es 8, por lo que

$$L(2015^{2015}) = 8$$

Sea el menor entero positivo divisible por 36 y que, escrito en notación usual, sólo tiene cuatros y nueves y, al menos, uno de cada. ¿De qué número se trata?



SOLUCIÓN

Como es divisible por 36 debe ser divisible por 4, luego las dos últimas cifras, según las condiciones del problema, deben ser 44

Además debe ser divisible por 9, que es primo con 4, por lo que tendrá 4 nueves y debe tener, al menos, un 9.

El número más pequeño, con las características citadas, es

4444444944

Si a y b son dos números naturales consecutivos, halla $\sqrt{a^2 + b^2 + (a \times b)^2}$

SOLUCIÓN

Sean $a = x$, $b = x + 1$

$$\begin{aligned}\text{Entonces, } \sqrt{a^2 + b^2 + (a \times b)^2} &= \sqrt{x^2 + (x+1)^2 + (x \times (x+1))^2} = \sqrt{x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^4 + 2x^3 + x^2} = \\ &= \sqrt{x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1} = \sqrt{(x^2 + x + 1)^2} = x^2 + x + 1 =\end{aligned}$$

$$\mathbf{a^2 + b}$$

Halla

$$2 \int_0^{12} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{\dots}}}}} dx$$

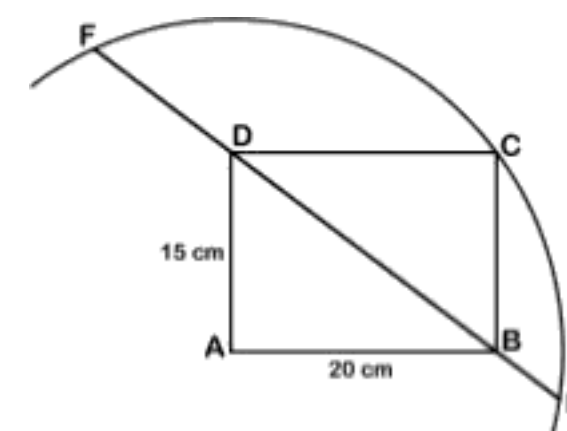
SOLUCIÓN

Calculamos $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{\dots}}}}} = \sqrt{x + y} \Rightarrow y^2 = x + y \Rightarrow y^2 - y - x = 0 \Rightarrow y = \frac{1 + \sqrt{1 + 4x}}{2}$
desechando, obviamente, la opción negativa.

$$\begin{aligned} \text{Entonces, } 2 \int_0^{12} \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{\dots}}}}} dx &= 2 \int_0^{12} \frac{1 + \sqrt{1 + 4x}}{2} dx = \int_0^{12} (1 + \sqrt{1 + 4x}) dx = x + \frac{1}{4} \times \frac{2(1 + 4x)^{\frac{3}{2}}}{3} \Bigg|_0^{12} \\ &= x + \frac{(1 + 4x)^{\frac{3}{2}}}{6} \Bigg|_0^{12} = \left(12 + \frac{(1 + 4 \times 12)^{\frac{3}{2}}}{6} \right) - \left(0 + \frac{(1 + 4 \times 0)^{\frac{3}{2}}}{6} \right) = 12 + \frac{343}{6} - \frac{1}{6} = 12 + 57 = \end{aligned}$$

Sea el rectángulo $ABCD$ de 15×20 cm. Se dibuja un círculo de centro A y que pasa por C .

¿Cuál es la longitud de la cuerda EF que pasa por B y por D ?

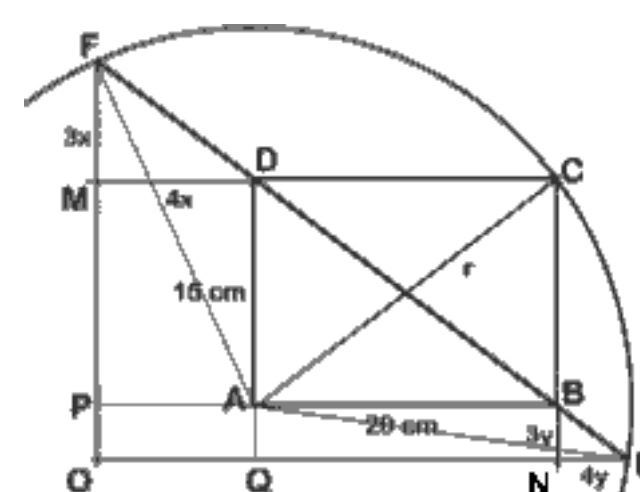


SOLUCIÓN

Llamamos $r (= AC = DB)$ al radio del círculo. En el triángulo rectángulo BAD es evidente que $r^2 = 15^2 + 20^2 = 625 \Rightarrow r = 25$ cm

Por otro lado, los triángulos BAD , DMF y ENB son rectángulos y semejantes, por lo que podemos escribir $DM = 4x$, $FM = 3x$, $FD = 5x$ y $EN = 4y$, $BN = 3y$, $BE = 5y$, manteniendo las proporciones del primer triángulo citado.

La cuerda mide, pues, $EF = 5x + 5y + 25$ cm



En el triángulo rectángulo APF se cumple que $FP^2 + PA^2 = FA^2 = r^2 \Rightarrow (3x + 15)^2 + (4x)^2 = 25^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 9x^2 + 90x + 225 + 16x^2 = 625 \Rightarrow 25x^2 + 90x - 400 = 0 \Rightarrow 5x^2 + 18x - 80 = 0 \Rightarrow x = \frac{-9 + \sqrt{481}}{5}$ cm

En el triángulo rectángulo EQA se cumple que $AQ^2 + QE^2 = AE^2 = r^2 \Rightarrow (3y)^2 + (20 + 4y)^2 = 25^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 9y^2 + 400 + 160y + 16y^2 = 625 \Rightarrow 25y^2 + 160y - 225 = 0 \Rightarrow 5y^2 + 32y - 45 = 0 \Rightarrow y = \frac{-16 + \sqrt{481}}{5}$ cm

De ambas expresiones se deduce que $EF = 5x + 5y + 25 = 5 \times \left(\frac{-9 + \sqrt{481}}{5} \right) + 5 \times \left(\frac{-16 + \sqrt{481}}{5} \right) + 25 \Rightarrow$
 $\Rightarrow EF = -9 + \sqrt{481} - 16 + \sqrt{481} + 25 \Rightarrow 2 \times \sqrt{481} =$

43,8634 centímetros

En un mercadillo, el precio de 5 peras, 3 naranjas y 2 melones es de 3,18 euros, y el de 4 peras, 8 naranjas y 3 melones es de 4,49 euros.

¿Cuántos céntimos de euro es más cara una pera que una naranja?



SOLUCIÓN

Llamamos p , n , m al precio respectivo (en céntimos de euro) de una pera, una naranja y un melón.

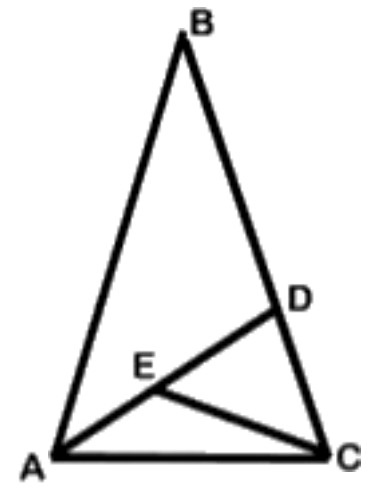
Según el enunciado,

$$\left. \begin{array}{l} 5p + 3n + 2m = 318 \\ 4p + 8n + 3m = 449 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 15p + 9n + 6m = 954 \\ 8p + 16n + 6m = 898 \end{array} \right\} \Rightarrow 7p - 7n = 56 \Rightarrow p - n = 8 \Rightarrow p = n + 8$$

Una pera vale 8 céntimos de euro más que una naranja

El triángulo ABC es isósceles , con $AB = BC$, y el ángulo B es de 34° . Los triángulos CAD y EDC son también isósceles, con $AD = AC$ y $ED = DC$.

¿Cuánto mide el ángulo AEC ?



SOLUCIÓN

En el triángulo ABC , isósceles en $ABC = 34^\circ$, el ángulo $BCA = \frac{180^\circ - 34^\circ}{2} = 73^\circ$

En el triángulo CAD , isósceles en CAD , el ángulo $ADC = DCA = BCA = 73^\circ$

Por lo tanto en el triángulo EDC , isósceles en $EDC = ADC = 73^\circ$, el ángulo $CED = \frac{180^\circ - 73^\circ}{2} = 53^\circ 30'$

Entonces, $AEC = 180^\circ - 53^\circ 30' \Rightarrow$

$$\mathbf{AEC = 136^\circ 30'}$$

En un sudoku resuelto leemos cada una de las nueve filas como un número de nueve cifras. ¿Cuánto suman esos nueve números?

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

SOLUCIÓN

Según se construye la solución del sudoku, cada uno de los nueve números tienen las cifras de 1 a 9 colocadas en distinto orden decimal respecto a los demás números contruidos.

La suma será $(1+2+\dots+9)\times 10^8 + (1+2+\dots+9)\times 10^7 + \dots + (1+2+\dots+9)\times 10 + (1+2+\dots+9) =$
 $= (1+2+\dots+9)\times (10^8 + 10^7 + \dots + 10 + 1) = 45\times 111111111 =$

4999999995

Los dos primeros términos de una sucesión son 2 y 6. Los demás términos se forman dividiendo el último obtenido por el anterior.

¿Cuánto vale la suma de los primeros 2016 elementos de la sucesión?



SOLUCIÓN

Construimos la sucesión y observamos que es cíclica:

$$a_1 = 2, a_2 = 6, a_3 = \frac{6}{2} = 3, a_4 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, a_5 = \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}, a_6 = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3},$$

$$a_7 = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}} = 2, a_8 = \frac{2}{\frac{1}{3}} = 6, a_9 = \frac{6}{2} = 3, a_{10} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, a_{11} = \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}, a_{12} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3},$$

... ..

Por lo tanto, como $2016 = 336 \times 6$,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2016} = 336 \times (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6) = 336 \times \left(2 + 6 + 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \right) = 336 \times 12 =$$

4032

Desplazando cuatro lugares a la derecha la coma decimal de cierto número real positivo obtenemos un nuevo número que es el cuádruple del inverso del número original.

¿Qué número es el original?



SOLUCIÓN

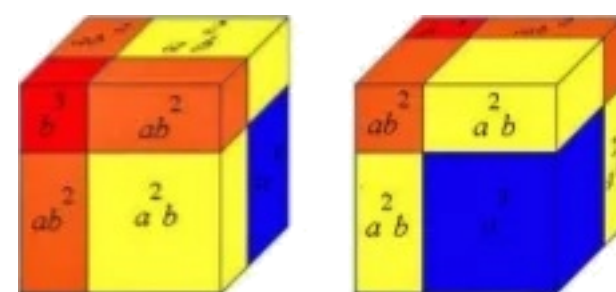
Sea u el número original del problema. Desplazar cuatro lugares a la derecha la coma decimal equivale a multiplicar el número por diez mil convirtiéndolo en $10^4 u$

Entonces, el enunciado dice que $10^4 u = 4 \times \frac{1}{u} \Rightarrow 10^4 u^2 = 4 \Rightarrow \sqrt{10^4 u^2} = \sqrt{4} \Rightarrow 10^2 u = 2 \Rightarrow u = \frac{2}{10^2}$

Por lo tanto el número original es

0,02

La suma de dos números es 1 y la suma de sus cuadrados, 2. ¿Cuánto vale la suma de sus cubos?



SOLUCIÓN

Sean a y b los números tales que se busca $a^3 + b^3$

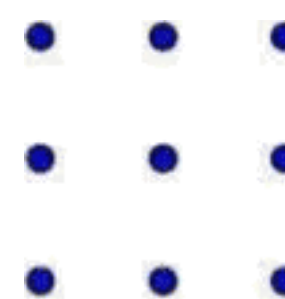
$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \Rightarrow 1^2 = 2 + 2ab \Rightarrow ab = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Por otro lado, } (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \Rightarrow 1^3 = a^3 + 3ab \times (a+b) + b^3 = a^3 + 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times 1 + b^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^3 + b^3 = 1 + \frac{3}{2} =$$

5/2

Si elegimos 3 puntos al azar del retículo adjunto, ¿cuál es la probabilidad de que estén alineados?

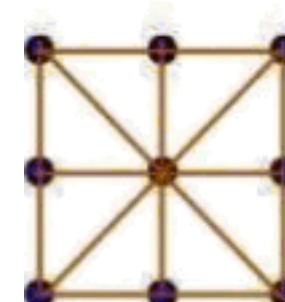


SOLUCIÓN

El número de posibles elecciones de tres puntos será el número de combinaciones de los nueve puntos tomados de tres en tres.

Que estén alineados sólo sucede en ocho casos, como se ve en la figura.

Entonces, la probabilidad es



$$P = \frac{8}{\binom{9}{3}} = \frac{8}{\frac{9!}{6 \times 3!}} = \frac{8}{\frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2}} = \frac{6}{63} = \frac{2}{21} =$$

0,095

De un grupo de chicos y chicas, se van 15 chicas, con lo que quedan 2 chicos por cada chica.

Luego se van 45 chicos, con lo que quedan 5 chicas por cada chico.

¿Cuántas chicas había inicialmente en el grupo?



SOLUCIÓN

Sean x el número inicial de chicos e y el número inicial de chicas.

Cuando se van las 15 chicas se verifica que $2 \times (y - 15) = x$, y cuando, posteriormente, se van los 45 chicos, se cumple que $5 \times (x - 45) = y - 15$

Entonces, $5 \times (x - 45) = y - 15 \Rightarrow 10 \times (x - 45) = 2 \times (y - 15) = x \Rightarrow 10x - 450 = x \Rightarrow 9x = 450 \Rightarrow x = 50$

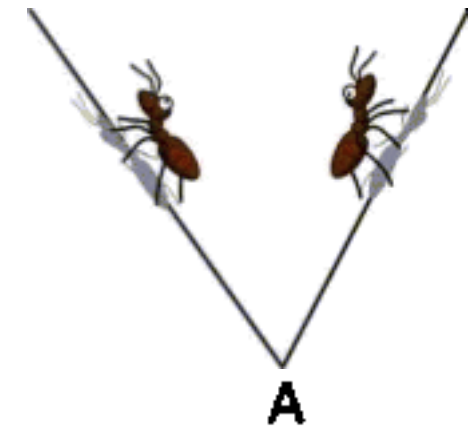
Hay inicialmente 50 chicos, por lo que $2 \times (y - 15) = 50 \Rightarrow 2y - 30 = 50 \Rightarrow 2y = 80 \Rightarrow y = 40$

Es decir,

inicialmente hay 40 chicas

Los lados de un triángulo ABC tienen de longitud $AB = 5$ cm, $BC = 6$ cm y $AC = 7$ cm. Dos hormigas parten, simultáneamente y a la misma velocidad constante, del vértice A en direcciones opuestas recorriendo el perímetro del triángulo hasta que se encuentran en un punto.

¿A que distancia está el punto de encuentro del punto de inicio?



SOLUCIÓN

Dibujando el esquema se observa que lo que se pide es la longitud del segmento $AD = x$, siendo A el punto de inicio y D el punto de encuentro.

Como el perímetro del triángulo es de $AB + BC + AC = 18$ cm, cada hormiga recorrerá, hasta encontrarse con la otra, 9 cm, por lo que $CD = 2$ cm y $BD = 4$ cm.

Si $AH = h$ es la altura del triángulo ABC llamamos $HB = y$, y consideramos ahora tres triángulos rectángulos en los que aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$\text{Triángulo } AHB : h^2 + y^2 = 5^2 = 25$$

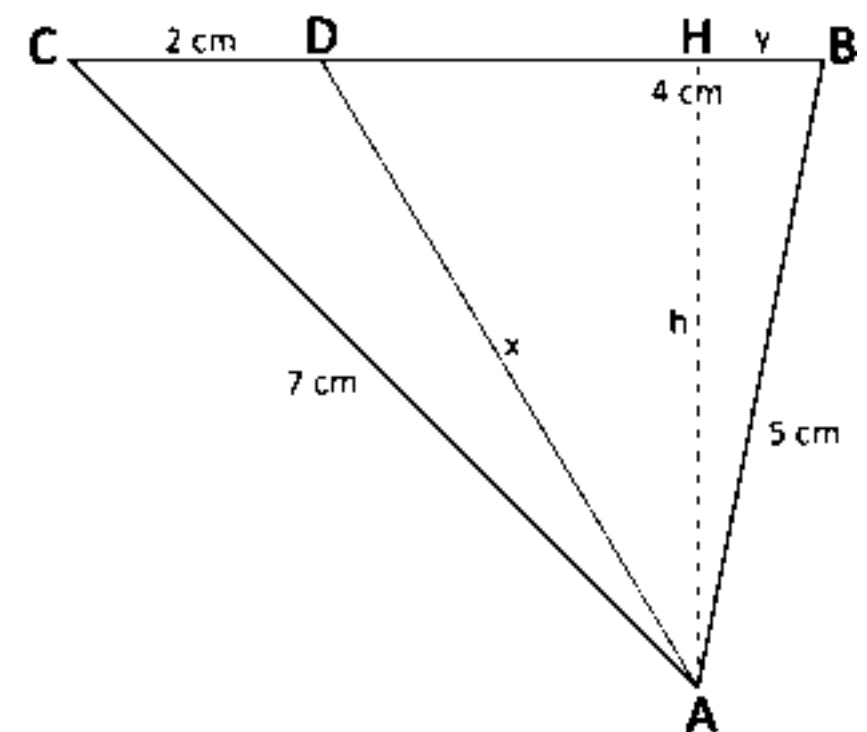
$$\text{Triángulo } AHC : h^2 + (6 - y)^2 = 7^2 = 49$$

$$\text{Triángulo } AHD : h^2 + (4 - y)^2 = x^2$$

$$\begin{aligned} \text{Restando las dos primeras expresiones obtenemos } h^2 + y^2 - (h^2 + (6 - y)^2) &= 25 - 49 \Rightarrow \\ \Rightarrow h^2 + y^2 - h^2 - 36 + 12y - y^2 &= -24 \Rightarrow 12y = 36 - 24 = 12 \Rightarrow y = 1 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\text{Y de la primera expresión se obtiene que } h^2 + y^2 = 25 \Rightarrow h^2 + 1 = 25 \Rightarrow h^2 = 24$$

$$\begin{aligned} \text{Usando ahora la tercera expresión con los dos valores obtenidos, } h^2 + (4 - y)^2 &= x^2 \Rightarrow x^2 = 24 + (4 - 1)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 = 33 \Rightarrow x &= \sqrt{33} = \end{aligned}$$



5,74456 centímetros

El alfabeto de una extraña lengua está formado por las seis letras A, D, E, L, N, R en este orden.

Las palabras de esta lengua tienen todas seis letras, sin que se pueda repetir ninguna letra en una palabra.

¿Cuál es la palabra que ocupa el lugar 537 en el diccionario?



SOLUCIÓN

La cantidad de palabras distintas del diccionario es el número de permutaciones distintas que pueden hacerse con las seis letras citadas: $P_6 = 6! = 720$ palabras, de las que $P_5 = 5! = 120$ empiezan por cada una de las letras.

Es decir, hay $4P_5 = 4 \times 5! = 4 \times 120 = 480$ palabras antes de la primera que empieza por N (quinta letra) y la última que empieza por dicha letra es la que ocupa el lugar $480 + 120 = 600$

Por lo tanto, la palabra que buscamos empieza por N . Palabras que empiecen por dicha letra y tengan la segunda igual hay, en cada caso, $P_4 = 4! = 24$

Como $537 = 4 \times 120 + 2 \times 24 + 9$, la palabra buscada empezará por NE , ya que E es la letra que ocupa el tercer lugar de la secuencia. La primera de esas palabras ocupa el lugar número $480 + 2 \times 24 + 1 = 529$ y la última el lugar $480 + 3 \times 24 = 552$

Palabras que empiecen por NE y tengan la tercera igual hay $P_3 = 3! = 6$ en cada caso por lo que, como $537 = 4 \times 120 + 2 \times 24 + 1 \times 6 + 3$, la palabra empezará por NED , ya que D es la que ocupa el segundo lugar de la secuencia de letras (excluidas las usadas).

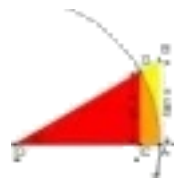
Por último, habrá $P_2 = 2! = 2$ palabras que empiecen por NED y tengan la cuarta letra idéntica.

Desglosando $537 = 4 \times 120 + 2 \times 24 + 1 \times 6 + 1 \times 2 + 1$, determinamos que la palabra será la primera que empiece por $NEDL$, ya que L es la segunda letra de las que quedan sin usar.

En resumen, la palabra que ocupa el lugar 537 en el diccionario es

NEDLAR

¿Cuánto vale la suma $\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots + \cos 358^\circ + \cos 359^\circ$?



SOLUCIÓN

Como $\cos \alpha = \cos(360^\circ - \alpha)$,

$$\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots + \cos 358^\circ + \cos 359^\circ = 2 \times (\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots + \cos 178^\circ + \cos 179^\circ) + \cos 180^\circ =$$
$$= 2 \times (\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots + \cos 178^\circ + \cos 179^\circ) - 1 = 2 \times \cos 90^\circ - 1, \text{ pues } \cos \alpha + \cos(180^\circ - \alpha) = 0$$

Y como $\cos 90^\circ = 0$, $\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \dots + \cos 358^\circ + \cos 359^\circ = 2 \times \cos 90^\circ - 1 =$

-1

Diez equipos juegan un torneo de fútbol en el que cada equipo juega exactamente una vez con todos los demás.

En cada partido el ganador obtiene 3 puntos, el que pierde 0 puntos y, si hay empate, cada uno obtiene 1 punto.

El número total de puntos de todos los equipos es 130.

¿Cuántos partidos se han empatado?



SOLUCIÓN

El número de partidos jugado es el número de combinaciones de los 10 equipos tomados 2 a 2:

$$C_{10,2} = \binom{10}{2} = \frac{10!}{2! \times 8!} = \frac{10 \times 9}{2} = 45 \text{ partidos}$$

En los partidos empatados se reparten 2 puntos, uno para cada equipo, y en los no empatados 3 puntos para el vencedor, uno más que en el caso de los empatados.

Entonces, si ningún partido se hubiera empatado se habrían conseguido, en total, $45 \times 3 = 135$ puntos. Son 5 más que los realmente obtenidos, por lo que se ha perdido un punto en 5 partidos, que han sido los empatados.

Es decir, ha habido un total de

5 partidos empatados

Sean los dígitos a, b, c con a no nulo y sea n un número natural.

Los números enteros, de tres cifras, abc y acb dividen al intervalo $[n^2, (n+1)^2]$ en tres partes iguales.



Halla el valor de la suma $a + b + c$

SOLUCIÓN

Según el enunciado, se verificará que $(n+1)^2 - n^2 = 3 \times (\overline{acb} - \overline{abc}) \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2n+1 = 3 \times (100a+10c+b-100a-10b-c) \Rightarrow 2n+1 = 27 \times (c-b)$

Si llamamos $k = c-b \Rightarrow 2n+1 = 27k \Rightarrow 2n = 27k-1 \Rightarrow n = 13k + \frac{k-1}{2}$, número natural.

Estudiemos los valores de k admisibles en el contexto del problema:

- $k = 1 \Rightarrow n = 13$. De aquí: $n^2 = 13^2 = 169$ y $(n+1)^2 = 14^2 = 196$. La longitud del intervalo es $196 - 169 = 27$ y los números que lo dividen en tres partes iguales son $169 + 9 = 178$ y $169 + 2 \times 9 = 187$
- $k = 3 \Rightarrow n = 40$. De aquí: $n^2 = 40^2 = 1600$, que sobrepasa los valores admisibles. Evidentemente, con cualquier valor posterior pasará lo mismo.

Por tanto, $a = 1, b = 7, c = 8$ y

$$\mathbf{a + b + c = 1 + 7 + 8 = 16}$$

En una sucesión de números positivos cada término, excepto los dos primeros, es igual a la suma de todos los que le preceden.



Si el undécimo término de la sucesión es 2560 y el primer término es 1, ¿cuál es el segundo término?

SOLUCIÓN

Llamamos x_n al término general de la sucesión. Sabemos que $x_1 = 1$ y $x_{11} = 2560$

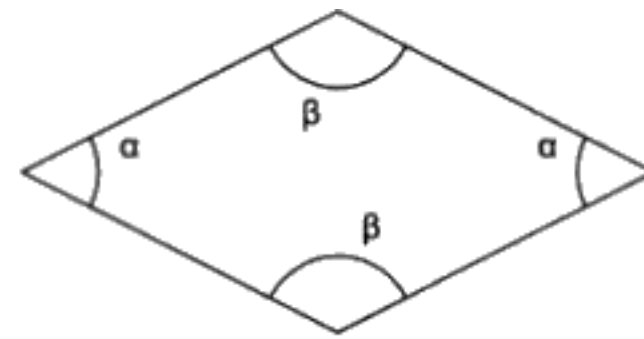
Según el enunciado, $x_3 = x_1 + x_2$; $x_4 = x_1 + x_2 + x_3 = 2 \times (x_1 + x_2)$; $x_5 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \times (x_1 + x_2)$; $x_6 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 8 \times (x_1 + x_2)$; ...

Si nos fijamos, vemos que $x_3 = 2^0 \times (x_1 + x_2)$; $x_4 = 2^1 \times (x_1 + x_2)$; $x_5 = 2^2 \times (x_1 + x_2)$; $x_6 = 2^3 \times (x_1 + x_2)$; ... y podemos deducir que $x_n = 2^{n-3} \times (x_1 + x_2)$ si $n > 2$

En suma, $x_{11} = 2^8 \times (x_1 + x_2) \Rightarrow 256 \times (1 + x_2) = 2560 \Rightarrow 1 + x_2 = 10 \Rightarrow x_2 = 9$

$$\mathbf{x_2 = 9}$$

¿Cuál es el valor del ángulo agudo de un rombo cuyo lado es la media geométrica de sus diagonales?



SOLUCIÓN

Sean x el lado del rombo, d y D las diagonales y α el ángulo agudo del rombo.

Evidentemente, en el triángulo rectángulo marcado de amarillo, se cumple que:

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \frac{d/2}{x} = \frac{d}{2x} \text{ y } \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{D/2}{x} = \frac{D}{2x}, \text{ por lo que}$$

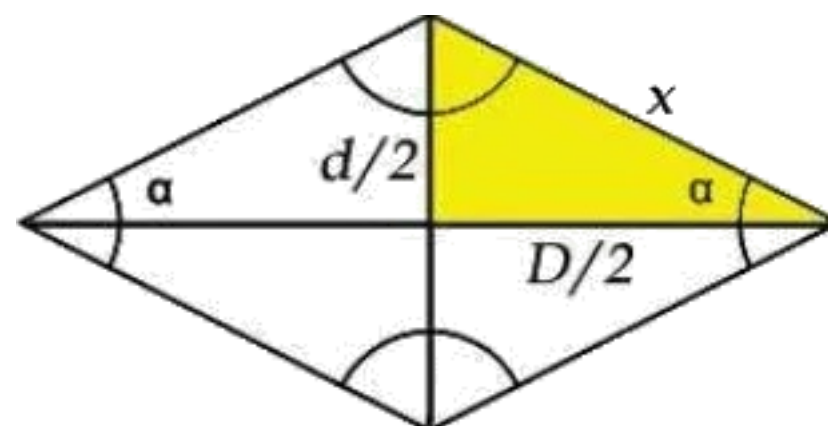
$$\operatorname{sen} \alpha = 2 \times \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \times \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \times \frac{d}{2x} \times \frac{D}{2x} = \frac{d \times D}{2x^2}$$

Ahora bien, el enunciado dice que $\sqrt{d \times D} = x \Rightarrow d \times D = x^2$ y, por tanto, $\operatorname{sen} \alpha = \frac{d \times D}{2x^2} = \frac{x^2}{2x^2} \Rightarrow$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ, \text{ por ser el ángulo agudo.}$$

En resumen,

el ángulo agudo del rombo mide 30°



¿Qué condición debe cumplir k para que tres segmentos de longitudes $1, k, 2k$ determinen un triángulo con superficie no nula?



SOLUCIÓN

Evidentemente, $k > 0$.

Además, deberá cumplirse que la suma de las longitudes de dos cualesquiera de los lados debe ser mayor que la longitud del tercero.

Por eso $k < 1 + 2k$, lo cual es evidente, $2k < 1 + k \Rightarrow k < 1$ y $1 < 2k + k \Rightarrow 1 < 3k \Rightarrow \frac{1}{3} < k$

La condición debe ser que

$$\mathbf{\frac{1}{3} < k < 1}$$

Sea a un número entero y b un número positivo tales que $a \times b = \log_{10} b$

¿Cuál es la mediana del conjunto formado por los números $0, 1, a, b, 1/b$?



SOLUCIÓN

Recordemos que la mediana de un conjunto de números es el valor que ocupa la posición central si dichos números están ordenados de menor a mayor (o viceversa).

Estudiamos varios casos:

- $a < 0 \Rightarrow \log_{10} b = a \times b < 0 \Rightarrow 0 < b < 1 \Rightarrow \frac{1}{b} > 1$. Ordenado el conjunto, de menor a mayor, tendríamos $a < 0 < b < 1 < \frac{1}{b}$, por lo que la mediana sería b
- $a = 0 \Rightarrow \log_{10} b = a \times b = 0 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow \frac{1}{b} = 1$. Ordenado el conjunto, de menor a mayor, tendríamos $a = 0 < b = 1 = \frac{1}{b}$, por lo que la mediana sería $b = 1$
- $a \geq 1 \Rightarrow \log_{10} b = a \times b \geq b$: ¡imposible!, pues siempre $\log_{10} b < b$

Por tanto,

la mediana del conjunto es, siempre, b

En la tabla de la figura debe haber, en cada fila y columna, dos cuadrados rojos y dos verdes.

¿Qué colores debe haber en las casillas X e Y?

■		■	
		■	
	X		■
	Y		

SOLUCIÓN

En la tercera columna, las dos casillas que faltan por colorear deben ser verdes:

■		■	
		■	
	X	■	■
	Y	■	

Por tanto, la tercera fila se completa con dos casillas de color rojo:

■		■	
		■	
■	X	■	■
	Y	■	

Y la primera columna con dos casillas de color verde:

■		■	
■		■	
■	X	■	■
■	Y	■	

Completando la última fila con dos casillas de color rojo:

■		■	
■		■	
■	X	■	■
■	Y	■	■

Y, aunque no sea necesario, se puede completar fácilmente la cuadrícula:

■	■	■	■
■	■	■	■
■	X	■	■
■	Y	■	■

Las casillas X e Y deben ser de color rojo

Al dividir un número de tres cifras por el que resulta de suprimir su primera cifra obtenemos 30 de cociente y 4 de resto. ¿De qué número se trata?



SOLUCIÓN

Sea el número \overline{abc} . El enunciado nos dice que $\overline{abc} = 30 \times \overline{bc} + 4 \Rightarrow 100a + 10b + c = 30 \times (10b + c) + 4$

De ahí, $100a + 10b + c = 300b + 30c + 4 \Rightarrow 29c = 100a - 290b - 4 \Rightarrow c = 3a - 10b + \frac{13a - 4}{29}$

Llamando $t = \frac{13a - 4}{29} \Rightarrow 13a = 29t + 4 \Rightarrow a = 2t + \frac{3t + 4}{13}$ y, haciendo $s = \frac{3t + 4}{13} \Rightarrow 3t = 13s - 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 4s - 1 + \frac{s - 1}{3}$, con t, s enteros.

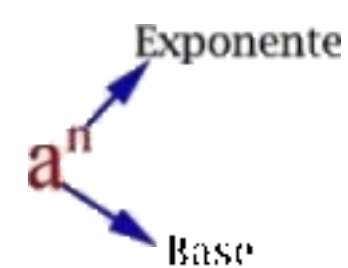
Teniendo en cuenta que a, b, c son dígitos, estudiamos los posibles valores admisibles:

- $s = 1 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow a = 7$ y $c = 24 - 10b \Rightarrow b = 2$ y $c = 4$
- $s = 4 \Rightarrow t = 16 \Rightarrow a > 10$, lo que no tiene sentido... igualmente para valores superiores de s

El número buscado es

724

¿A qué exponente debemos elevar el número 4^4 para obtener el número 8^8 ?



SOLUCIÓN

Según las reglas de la exponenciación, $4^4 = (2^2)^4 = 2^{2 \times 4} = 2^8$ y $8^8 = (2^3)^8 = 2^{3 \times 8} = 2^{24}$

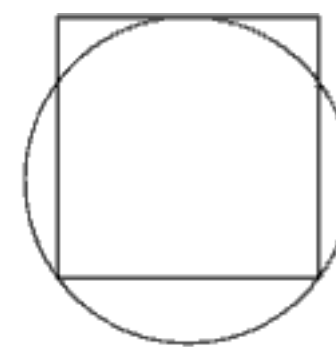
Por lo tanto, $8^8 = 2^{24} = 2^{8 \times 3} = (2^8)^3 = (4^4)^3$

El exponente buscado es

3

Un cuadrado de 16 cm de lado tiene un lado tangente a una circunferencia, siendo los vértices opuestos pertenecientes a dicha circunferencia.

¿Cuánto mide el radio de la circunferencia?



SOLUCIÓN

Sea r el radio de la circunferencia.

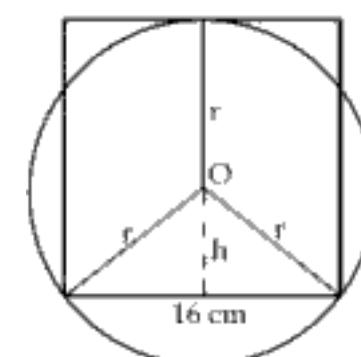
Puede observarse que $r + h = 16$ y, en el triángulo isósceles dibujado, $r^2 - h^2 = 8^2 = 64$ aplicando el teorema de Pitágoras.

Resolvemos el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} r + h = 16 \\ r^2 - h^2 = 64 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} r + h = 16 \\ (r + h) \times (r - h) = 64 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} r + h = 16 \\ r - h = \frac{64}{16} = 4 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} r = 10 \\ h = 6 \end{array} \right\}$$

El radio de la circunferencia mide

10 cm



Un coche marcha, a las 9 de la noche, a una velocidad de 100 km/h. A esa velocidad tiene gasolina para viajar 80 km, y la gasolinera más próxima está a 100 km de donde se encuentra.

El consumo de gasolina del coche, por kilómetro, es proporcional a la velocidad. ¿Cuál es la hora más temprana a la que puede llegar a la gasolinera?



SOLUCIÓN

Evidentemente, a más velocidad, más consumo, por lo que el ahorro de gasolina es inversamente proporcional a la velocidad del coche.

Si va a 100 km/h y con esa velocidad puede recorrer 80 km pero le faltan 100 km hasta la gasolinera y la velocidad máxima para llegar a ella es de x km/h, se debe cumplir que $100x = 100 \times 80 \Rightarrow x = 80$ km/h, máxima velocidad a la que puede ir para llegar a la gasolinera.

Por lo tanto, 100 km a esa velocidad le costará $t = \frac{e}{v} = \frac{100}{80} = 1,25$ horas: hora y cuarto desde las 9 de la noche.

La hora más temprana a la que puede llegar es a las

22 horas 15 minutos

Estudiando los comportamientos alimenticios de una rata durante unos días se observó que.

- La rata comía, como mucho, una vez al día: bien por la mañana o bien por la tarde.
- En total comió 9 veces.
- Hubo 6 mañanas, exactamente, en que no comió.
- Hubo 7 tardes, exactamente, en que no comió.

¿Cuántos días duró el estudio?



SOLUCIÓN

Suponemos que el estudio se realizó durante x días.

El enunciado nos dice que comió durante $x - 6$ mañanas y durante $x - 7$ tardes. 9 días en total:

$$x - 6 + x - 7 = 9 \Rightarrow 2x = 22 \Rightarrow x = 11$$

El estudio duró

11 días

x es el menor número con la siguiente propiedad: $10x$ es un cuadrado perfecto y $6x$ es un cubo perfecto.

¿Cuántos divisores positivos tiene x ?



SOLUCIÓN

Si $10x = 2 \times 5 \times x$ es un cuadrado perfecto, x tiene, como factores, potencias impares de 2 y de 5 ($:1, 3, 5, \dots$)

Si $6x = 2 \times 3 \times x$ es un cubo perfecto, x tiene, como factores, potencias de tipo $3n-1$ de 2 y de 3 ($:2, 5, 8, \dots$)

Evidentemente, por las dos condiciones, x tendrá potencias pares de 3 ($:2, 4, 6, \dots$) y potencias de tipo $3n$ de 5 ($:3, 6, 9, \dots$)

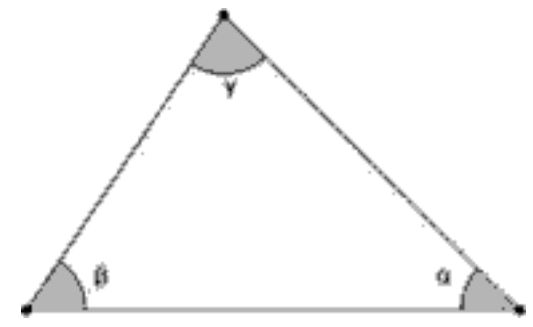
Conjugando todas las condiciones, se debe cumplir que $x = 2^5 \times 3^2 \times 5^3 \times k$

El menor número posible es $x = 2^5 \times 3^2 \times 5^3 = 36000$, y el número de divisores (según la fórmula conocida) es:
 $(5+1) \times (2+1) \times (3+1) = 6 \times 3 \times 4 =$

72

En un triángulo acutángulo el ángulo menor es un quinto del ángulo mayor.

Si la medida de cada ángulo viene dada por un número entero, ¿cuáles son las medidas de los tres ángulos del triángulo?



SOLUCIÓN

Sean los ángulos del triángulo $\alpha < \beta < \gamma < 90^\circ$. Se verifica que $\alpha = \frac{1}{5} \times \gamma$

$$\begin{aligned}\text{Entonces, } \alpha + \beta + \gamma &= 180^\circ \Rightarrow \frac{1}{5} \times \gamma + \beta + \gamma = 180^\circ \Rightarrow \beta + \frac{6}{5} \times \gamma = 180^\circ \Rightarrow 5\beta + 6\gamma = 900^\circ \Rightarrow \\ \Rightarrow \beta &= \frac{900^\circ - 6\gamma}{5} \Rightarrow \beta = 180^\circ - \gamma - \frac{\gamma}{5}\end{aligned}$$

Buscamos, ahora, las posibilidades admisibles a partir de los máximos valores del ángulo mayor γ :

- $\gamma = 85^\circ \Rightarrow \beta = 180^\circ - 85^\circ - \frac{85^\circ}{5} = 95^\circ - 17^\circ = 78^\circ$; $\alpha = \frac{\gamma}{5} = 17^\circ$
- $\gamma = 80^\circ \Rightarrow \beta = 180^\circ - 80^\circ - \frac{80^\circ}{5} = 100^\circ - 16^\circ = 84^\circ$: Imposible, pues debe ser $\gamma > \beta$
- ... y para valores menores sucede lo mismo que en el caso anterior

Entonces, los ángulos son

17°, 78° y 85°

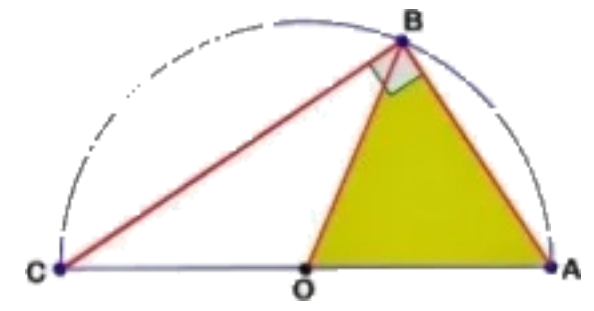
Si el área del triángulo ABO es de 7 cm^2 , ¿cuál es el área del triángulo ABC ?

SOLUCIÓN

Está claro que las alturas de ambos triángulos son idénticas y que la base del triángulo ABC mide el doble de la del triángulo ABO .

Por lo tanto el área buscada será, también, el doble de la dada:

$$14 \text{ cm}^2$$



¿Cuál es la longitud de la línea quebrada construida en el rectángulo de la figura, cuyos lados miden 6 y 8 cm?

SOLUCIÓN

Aplicando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo determinado por la diagonal y los lados del rectángulo, la diagonal vale $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ cm

La altura de dicho triángulo, a , podemos obtenerla a partir de los dos triángulos rectángulos que determina en el triángulo anterior aplicando el teorema de Pitágoras:

$$a^2 + c^2 = 6^2 = 36$$

$$a^2 + (b + c)^2 = 8^2 = 64$$

$$\text{Además, } b + 2c = 10 \Rightarrow b + c = 10 - c$$

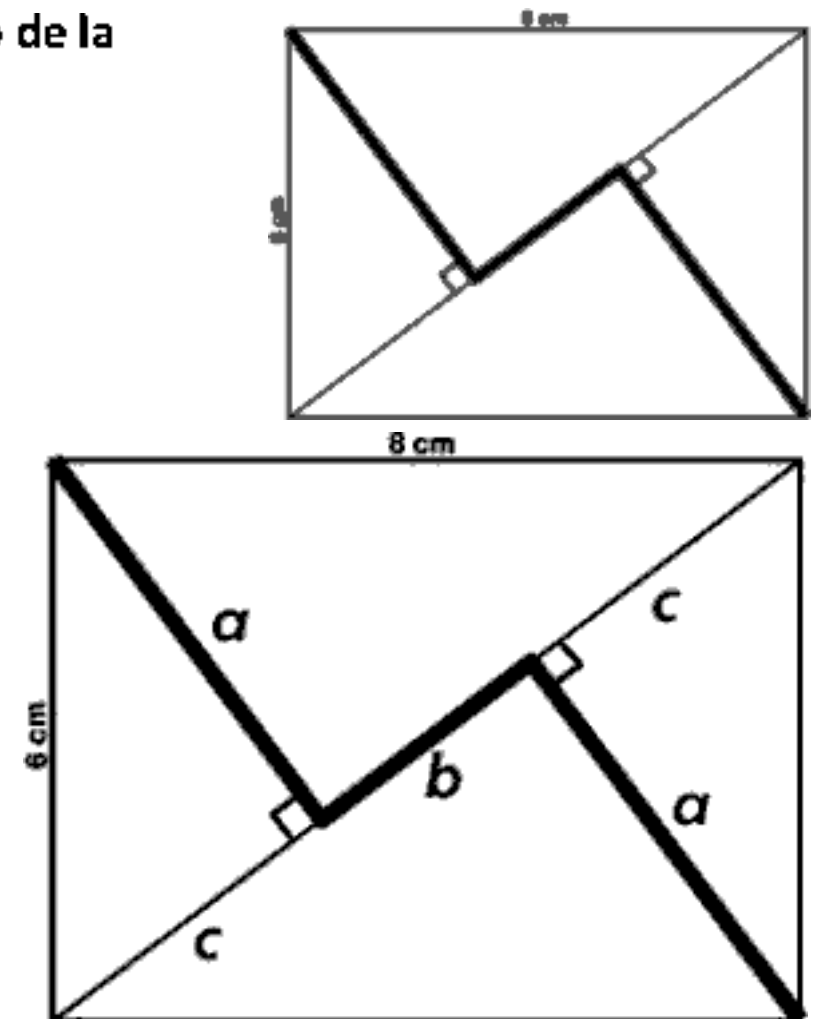
De las tres expresiones obtenemos:

$$\left. \begin{array}{l} a^2 + c^2 = 36 \\ a^2 + (10 - c)^2 = 64 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a^2 + c^2 = 36 \\ a^2 + 100 - 20c + c^2 = 64 \end{array} \right\} \Rightarrow 100 - 20c = 64 - 36 = 28 \Rightarrow 20c = 72 \Rightarrow c = \frac{18}{5} = 3,6 \text{ cm}$$

$$\text{De ahí, } b + 2c = 10 \Rightarrow b = 10 - 2c = 10 - 7,2 = 2,8 \text{ cm y } a^2 + c^2 = 36 \Rightarrow a^2 = 36 - c^2 = 36 - 12,96 = 23,04 \Rightarrow a = 4,8 \text{ cm}$$

$$\text{La longitud pedida es } 2a + b = 2 \times 4,8 + 2,8 =$$

12,4 cm



Los antiguos egipcios usaban una cuerda con dos nudos para construir un ángulo recto.

Si la longitud de la cuerda es 12 m y uno de los nudos está en X , a 3 m de un extremo de la cuerda, ¿a qué distancia del otro extremo hay que poner el segundo nudo para obtener un ángulo recto en X ?



SOLUCIÓN

Llamamos a , b , c a las longitudes de los tres tramos. Se pide el valor de c

Según el enunciado, $a = 3$ m y $a + b + c = 12$ m.

Además, deben formar un triángulo rectángulo, con el ángulo recto, por operatividad, en uno de los nudos.

Como el primer tramo es un cateto porque, conocidos los datos, no puede ser el lado de mayor longitud, el segundo tramo también lo deberá ser para que, en X , se encuentre el ángulo recto.

Por tanto, se deberá cumplir que $c^2 = a^2 + b^2$

Usando las tres condiciones de igualdad, $3 + b + c = 12 \Rightarrow b = 9 - c \Rightarrow c^2 = 3^2 + (9 - c)^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow c^2 = 9 + 81 - 18c + c^2 \Rightarrow 18c = 90 \Rightarrow c = 5$ m

La distancia es

5 m

El número de cuatro cifras $aabb$ es un cuadrado perfecto.

¿Cuánto vale la suma de sus cifras?



SOLUCIÓN

El número es $\overline{aabb} = 1100a + 11b = 11 \times (100a + b) = 11 \times \overline{a0b}$.

Como es un cuadrado perfecto, $\overline{a0b}$ debe ser divisible por 11 $\Rightarrow a + b - 0 = a + b = 11$, aplicando los criterios de divisibilidad.

Entonces, la suma de sus cifras es

$$a + a + b + b = 22$$

(el número es $7744 = 88^2$)

Si $2^{x+1} + 2^x = 3^{y+2} - 3^y$, calcula el valor de x e y , números enteros.



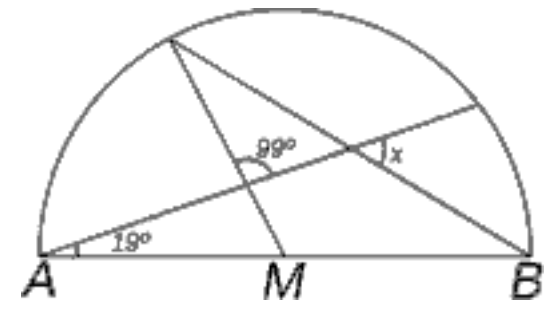
SOLUCIÓN

Está claro que $2^{x+1} + 2^x = 3^{y+2} - 3^y \Rightarrow 2^x \times (2+1) = 3^y \times (3^2 - 1) \Rightarrow 2^x \times 3 = 8 \times 3^y \Rightarrow 2^x \times 3^1 = 2^3 \times 3^y$

Por lo tanto, al ser las bases de las potencias números primos entre sí,

$$\mathbf{x = 3, y = 1}$$

Si M es el centro de la semicircunferencia de la figura, ¿cuál es el valor del ángulo x ?



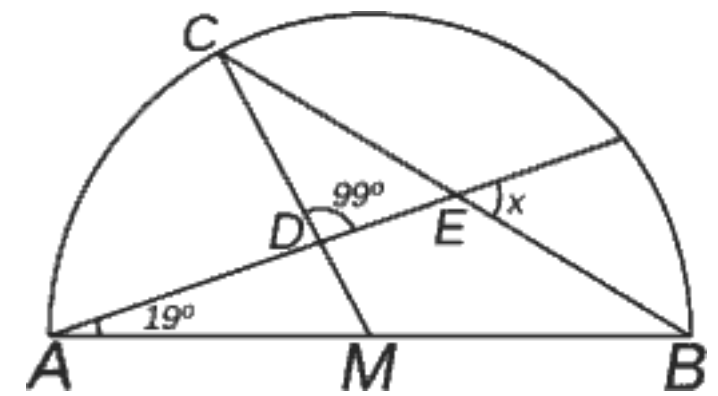
SOLUCIÓN

Marcamos los vértices que se indican en la figura adjunta y observamos que el ángulo M del triángulo ADM es $M = 180^\circ - 19^\circ - 99^\circ = 62^\circ$, por lo que el ángulo M del triángulo isósceles (formado por dos radios) MBC es $M = 180^\circ - 62^\circ = 118^\circ$

Entonces, en el triángulo MBC , $C = \frac{180^\circ - 118^\circ}{2} = 31^\circ$

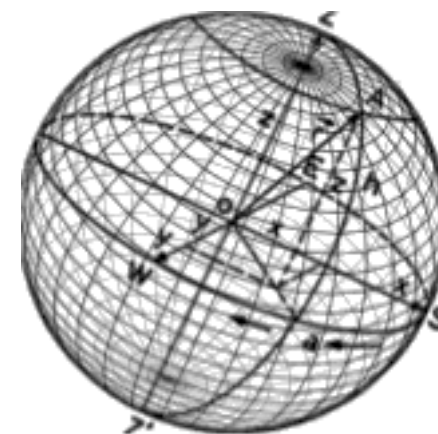
De aquí se sigue que, en el triángulo CDE , $x = E = 180^\circ - C - D = 180^\circ - 99^\circ - 31^\circ = 50^\circ$

$$x = 50^\circ$$



Se considera una esfera de radio 3 con centro en el origen de un sistema coordenado cartesiano en el espacio.

¿Cuántos puntos de la superficie de esa esfera tienen coordenadas enteras?



SOLUCIÓN

Las coordenadas de todo punto de la superficie de la esfera cumplen que

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = 3^2 = 9$$

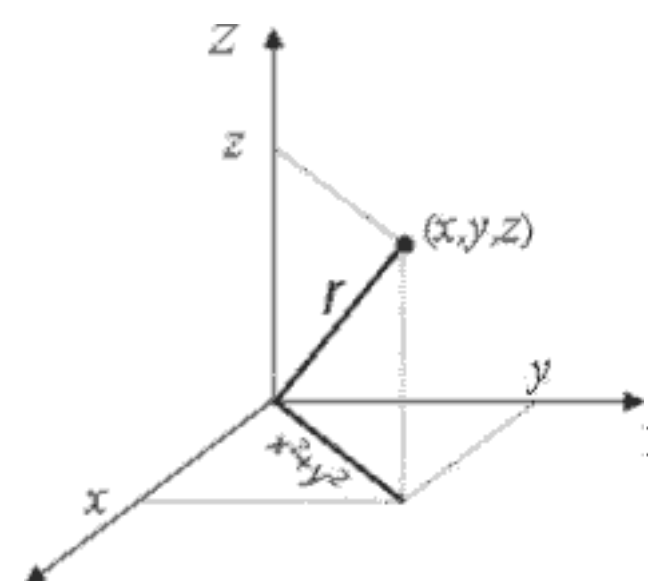
Además, $0 \leq |x|, |y|, |z| \leq 3$ y deben ser x, y, z valores enteros

De lo anterior, las únicas posibilidades son:

- $x = 0, y = 0, z = \pm 3 \Rightarrow (0,0,-3), (0,0,3)$. Dos puntos
- $x = 0, y = \pm 3, z = 0 \Rightarrow (0,-3,0), (0,3,0)$. Dos puntos
- $x = \pm 3, y = 0, z = 0 \Rightarrow (-3,0,0), (3,0,0)$. Dos puntos
- $x = \pm 1, y = \pm 2, z = \pm 2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (-1,-2,-2), (-1,-2,2), (-1,2,-2), (-1,2,2), (1,-2,-2), (1,-2,2), (1,2,-2), (1,2,2)$. Ocho puntos
- $x = \pm 2, y = \pm 1, z = \pm 2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (-2,-1,-2), (-2,-1,2), (-2,1,-2), (-2,1,2), (2,-1,-2), (2,-1,2), (2,1,-2), (2,1,2)$. Ocho puntos
- $x = \pm 2, y = \pm 2, z = \pm 1 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (-2,-2,-1), (-2,-2,1), (-2,2,-1), (-2,2,1), (2,-2,-1), (2,-2,1), (2,2,-1), (2,2,1)$. Ocho puntos

En conclusión, en la superficie de la esfera hay

30 puntos con coordenadas enteras



Si el número $\frac{n}{20-n}$ es el cuadrado de un número entero, ¿cuántos y qué valores enteros puede tomar n ?

SOLUCIÓN

Si $\frac{n}{20-n}$ es un cuadrado de un entero, siendo n entero, se verifica que $20-n \leq n > n \geq 10$ o $n=0$ y,

además, $n \leq 20 > 10 \leq n \leq 20$ o $n=0$

Las posibilidades son

- $n=0 \Rightarrow \frac{n}{20-n} = 0 = 0^2$
- $n=10 \Rightarrow \frac{n}{20-n} = 1 = 1^2$
- $n=16 \Rightarrow \frac{n}{20-n} = 4 = 2^2$
- $n=18 \Rightarrow \frac{n}{20-n} = 9 = 3^2$

Puede tomar cuatro valores: 0, 10, 16, 18

Halla el valor de $\frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}$

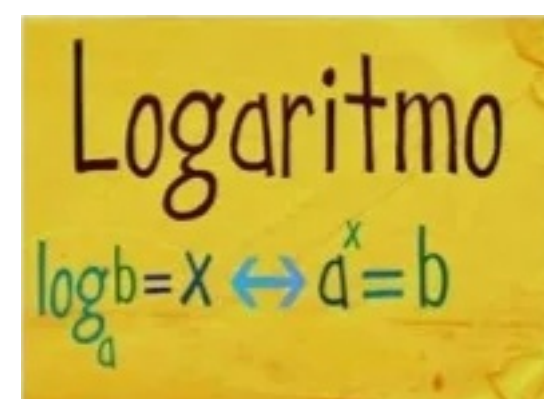
SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2+\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}} + \frac{1}{5\sqrt{4}+4\sqrt{5}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}} = \\ & = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{6} + \frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{4}}{12} + \frac{5\sqrt{4}-4\sqrt{5}}{20} + \dots + \frac{100\sqrt{99}-99\sqrt{100}}{9900} = \\ & = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{4}}{4} + \frac{\sqrt{4}}{4} - \frac{\sqrt{5}}{5} + \dots + \frac{\sqrt{99}}{99} - \frac{\sqrt{100}}{100} = 1 - \frac{\sqrt{100}}{100} = 1 - \frac{10}{100} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10} = \end{aligned}$$

0,9

Se define, para cada entero n positivo, la función $f(n) = \log_{2015}(n^2)$.

Si $T = f(5) + f(13) + f(31)$, ¿cuál es el valor de $2015 - T$?



SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} f(n) = \log_{2015}(n^2) &\Rightarrow T = \log_{2015}(5^2) + \log_{2015}(13^2) + \log_{2015}(31^2) = \log_{2015}(5^2 \times 13^2 \times 31^2) = \log_{2015}(5 \times 13 \times 31)^2 = \\ &= \log_{2015} 2015^2 = 2 \times \log_{2015} 2015 = 2 \end{aligned}$$

Entonces, $2015 - T = 2015 - 2 =$

2013

El profesor pide a Antonio, Blas y César encontrar tres números naturales a , b y c tales que $2015 = a^3 + b^2 + c$

Antonio calcula el máximo valor que puede tomar a y Blas, teniendo en cuenta el número calculado por Antonio, el máximo valor que puede tomar b .

¿Cuál es el valor c que halla César sabiendo los valores hallados por sus compañeros?



SOLUCIÓN

Como $\sqrt[3]{2015} = 12,63\dots$, $2015 = 12^3 + b^2 + c$, siendo 12 el mayor valor posible que cumple la condición y, por tanto, el valor de a calculado por Antonio.

$$2015 = 12^3 + b^2 + c \Rightarrow b^2 + c = 2015 - 12^3 = 2015 - 1728 = 287$$

$\sqrt{287} = 16,94\dots$, por lo que $2015 = 12^3 + 16^2 + c$, siendo 16 el mayor valor posible que cumple la condición y, por tanto, el valor de b calculado por Blas.

De lo anterior César obtiene $c = 2015 - 12^3 - 16^2 = 2015 - 1728 - 256 =$

31

Si $49^x + 49^{-x} = 7$, halla el valor de

$$7^x + 7^{-x}$$

SOLUCIÓN

$$49^x + 49^{-x} = 7 \Rightarrow 7^{2x} + 7^{-2x} = 7$$

$$\text{Ahora bien, } (7^x + 7^{-x})^2 = 7^{2x} + 2 \times 7^x \times 7^{-x} + 7^{-2x} = 7^{2x} + 7^{-2x} + 2 = 7 + 2 = 9$$

Por lo tanto,

$$7^x + 7^{-x} = 3$$

En el torneo de lucha de los Juegos Olímpicos se establece un sistema de eliminatorias completo de manera que el que pierde queda eliminado.

Si, después de la competición, ha habido 32 participantes que han ganado más combates de los que han perdido, ¿cuántos luchadores han participado?



SOLUCIÓN

En el momento de perder uno solo de los encuentros el luchador queda eliminado, por lo que 32 participantes han ganado, al menos, 2 combates

De ahí todos ellos han salido victoriosos de la segunda eliminatoria, en la que había $2 \times 32 = 64$ luchadores.

Al principio, pues, había $2 \times 64 =$

128 luchadores