

12

CAPÍTULO

La onda plana uniforme

En este capítulo se estudian las aplicaciones de las leyes de Maxwell en el problema de la propagación de ondas electromagnéticas. La onda plana uniforme representa el caso más simple, y en tanto que es apropiado como introducción tiene una gran importancia práctica. A menudo, se supone que en la práctica se presenta de esta forma. En este capítulo se estudiarán los principios fundamentales de la propagación de ondas electromagnéticas, y se comprenderán los procesos físicos que determinan la velocidad de propagación y el grado en el que se atenúa la señal. Se deducirá y utilizará el teorema de Poynting para encontrar la potencia de una onda electromagnética. Por último, se aprenderá cómo describir la polarización de dicha onda. ■

12.1 La propagación de la onda en el espacio libre

Se comienza con un repaso de las ecuaciones de Maxwell, en las cuales se buscan las claves del fenómeno ondulatorio. En el capítulo 11 se estudió cómo los voltajes y las corrientes se propagan en forma de ondas en las líneas de transmisión, y se sabe que la existencia de voltajes y corrientes implica la presencia de campos eléctricos y magnéticos. De tal forma que se puede identificar una línea de transmisión como una estructura que confina los campos a la vez que les permite viajar a lo largo de su longitud como ondas electromagnéticas. Se puede argüir que estos campos son los que generan el voltaje y la corriente de la onda en la línea de transmisión, y que —aunque no existiera ninguna estructura en la que el voltaje y la corriente pudieran existir— los campos existirían y se propagarían. En el espacio libre a los campos no los encierra ninguna estructura de confinamiento, por lo que pueden tener cualquier magnitud y dirección, las cuales se determinan por el dispositivo (por ejemplo, una antena) que las genere.

Cuando se consideran ondas electromagnéticas en el espacio libre se observa que el medio *carece de fuente* ($\rho_v = \mathbf{J} = 0$). En estas condiciones, las ecuaciones de Maxwell sólo se pueden escribir en términos de \mathbf{E} y \mathbf{H} en la siguiente forma,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (4)$$

Ahora se verá si es posible inferir el movimiento de la onda a partir de estas cuatro ecuaciones sin resolverlas realmente. La primera ecuación establece que si \mathbf{E} está cambiando con el tiempo en algún punto, entonces \mathbf{H} tiene rotacional en ese punto; por lo tanto, \mathbf{H} varía espacialmente en una dirección normal a su dirección de orientación. Además, si \mathbf{E} cambia con el tiempo, entonces, en general, también \mathbf{H} lo hará, aunque no necesariamente de la misma manera. Después, a partir de la ecuación (2), se observa que un campo \mathbf{H} cambiante produce un campo eléctrico \mathbf{E} , el cual, al tener un rotacional, varía espacialmente en la dirección normal a su orientación. Una vez más se tiene un campo eléctrico cambiante, nuestra hipótesis original; sin embargo, este campo está presente a una pequeña distancia del punto de la perturbación original. Se podría presuponer (en forma correcta) que la velocidad con la cual el efecto se propaga alejándose del punto original es la velocidad de la luz; sin embargo, esto se debe verificar por medio de un análisis más detallado de las ecuaciones de Maxwell.

Se presupone la existencia de una *onda plana uniforme* en la que ambos campos, \mathbf{E} y \mathbf{H} , se encuentran en el *plano transversal*, es decir, el plano cuya perpendicular es la dirección de propagación. Además, por definición, ambos campos tienen una magnitud constante en el plano transversal. Por esta razón, dicha onda a menudo se denomina *onda electromagnética transversal* (TEM, por sus siglas en inglés). La variación espacial que requieren ambos campos en la dirección normal a su orientación ocurrirá, por lo tanto, sólo en la dirección de la propagación de la onda, o perpendicular al plano transversal. Por ejemplo, supóngase que $\mathbf{E} = E_x \mathbf{a}_x$ o que el campo eléctrico está *polarizado* en la dirección de x . Si además se supone que la propagación de la onda es en la dirección de z , la variación espacial de \mathbf{E} solamente puede ser con z . Al utilizar la ecuación (2) se observa que con estas restricciones el rotacional de \mathbf{E} se reduce a una ecuación con un solo término:

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial z} \mathbf{a}_y = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \mathbf{a}_y \quad (5)$$

La dirección del rotacional de \mathbf{E} en (5) determina la dirección de \mathbf{H} , la cual se observa que es a lo largo de la dirección y . Por lo tanto, en una onda plana uniforme, las direcciones de \mathbf{E} , \mathbf{H} y la de propagación son mutuamente perpendiculares. Utilizando el campo magnético dirigido hacia y , y el hecho de que éste varía solamente con z , se simplifica la ecuación (1) a,

$$\nabla \times \mathbf{H} = -\frac{\partial H_y}{\partial z} \mathbf{a}_x = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \mathbf{a}_x \quad (6)$$

Las ecuaciones (5) y (6) pueden escribirse más sucintamente como:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} \quad (7)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z} = -\epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (8)$$

Estas ecuaciones pueden compararse directamente con las del telegrafista para una línea de transmisión sin pérdidas [ecuaciones (20) y (21) del capítulo 11]. Manipulaciones adicionales de (7) y (8) pueden realizarse de la misma forma como se hizo con las ecuaciones del telegrafista. Específicamente, se deriva (7) con respecto a z y se obtiene:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 H_y}{\partial t \partial z} \quad (9)$$

Después, (8) se deriva con respecto a t :

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z \partial t} = -\epsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad (10)$$

Sustituyendo (10) en (9) se obtiene

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \quad (11)$$

Esta ecuación, análoga a la ecuación (13) del capítulo 11, se conoce como la ecuación de onda del campo eléctrico TEM polarizado en x en el espacio libre. Mediante la ecuación (11) se identifica, además, la velocidad de propagación:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s} = c \quad (12)$$

donde la letra c denota la velocidad de la luz en el espacio libre. Un procedimiento similar que incluya la derivada de (7) con respecto a t y (8) con respecto a z da como resultado la ecuación de onda del campo magnético; es idéntica en forma a (11):

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} \quad (13)$$

Como se estudió en el capítulo 11, la solución de las ecuaciones de la forma (11) y (13) serán ondas que se propagan hacia delante y hacia atrás que tienen la forma genérica [en este caso para la ecuación (11)]:

$$E_x(z, t) = f_1(t - z/v) + f_2(t + z/v) \quad (14)$$

donde, de nuevo, f_1 y f_2 pueden ser cualquier función cuyo argumento es de la forma $t \pm z/v$.

De ahora en adelante, inmediatamente se especializa en funciones sinusoidales con una frecuencia específica y se escribe la solución de (11) en la forma de cosenos que se propagan



Animaciones

hacia delante y hacia atrás. Puesto que las ondas son sinusoidales, su velocidad se expresa como la *velocidad de fase* v_p . Las ondas pueden escribirse como:

$$\begin{aligned}
 E_x(z, t) &= \mathcal{E}_x(z, t) + \mathcal{E}'_x(z, t) \\
 &= |E_{x0}| \cos [\omega(t - z/v_p) + \phi_1] + |E'_{x0}| \cos [\omega(t + z/v_p) + \phi_2] \\
 &= \underbrace{|E_{x0}| \cos [\omega t - k_0 z + \phi_1]}_{\text{propagación } z \text{ hacia adelante}} + \underbrace{|E'_{x0}| \cos [\omega t + k_0 z + \phi_2]}_{\text{propagación } z \text{ hacia atrás}} \quad (15)
 \end{aligned}$$

La escritura de la segunda línea de (15) se basa en el hecho de que las ondas se están propagando en el espacio libre, en cuyo caso la velocidad de fase, $v_p = c$. Además, el *número de onda* en el espacio libre se define como,

$$k_0 \equiv \frac{\omega}{c} \text{ rad/m} \quad (16)$$

En forma consistente con el estudio de las líneas de transmisión, las soluciones expresadas en (15) se conocen como las formas *instantáneas reales* del campo eléctrico. Ellas son las representaciones matemáticas de lo que uno mide de manera experimental. Los términos ωt y $k_0 z$, que aparecen en (15), tienen unidades angulares y, generalmente, se expresan en radianes. Se sabe que ω es la frecuencia radián, que mide el corrimiento de fase *por unidad de tiempo*; tiene unidades de *rad/s*. De forma similar, se puede observar que k_0 se interpretará como una frecuencia *espacial*, que en este caso mide el corrimiento en fase *por unidad de distancia* a lo largo de la dirección z en rad/m. Se puede ver que k_0 es la constante de fase de la propagación sin pérdidas de ondas planas uniformes en el espacio libre. La *longitud de onda* en el espacio libre es la distancia en la que la fase espacial experimenta un corrimiento de 2π radianes, suponiendo un tiempo constante, o,

$$k_0 z = k_0 \lambda = 2\pi \rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k_0} \text{ (espacio libre)} \quad (17)$$

La forma en la que se propagan las ondas es la misma que se encuentra en las líneas de transmisión. En específico, supóngase que se considera algún punto (por ejemplo, la cresta de una onda) en la función coseno de la onda que se propaga hacia delante de la ecuación (15). Para que se presente una cresta, el argumento del coseno debe ser un múltiplo entero de 2π . Considérese la m -ésima cresta de la onda, la condición se transforma en,

$$k_0 z = 2m\pi$$

Entonces, considérese el punto en el coseno seleccionado, y obsérvese qué pasa si se permite el incremento del tiempo. El requisito es que todo el argumento del coseno sea el mismo múltiplo de 2π todo el tiempo, con el fin de mantener el rastro del punto seleccionado. La condición se transforma en

$$\omega t - k_0 z = \omega(t - z/c) = 2m\pi \quad (18)$$

A medida que el tiempo se incrementa, la posición z también debe hacerlo para satisfacer (18). La cresta de la onda (y la onda completa) se desplaza en la dirección positiva de z a una velocidad de fase c (en el espacio libre). Utilizando un razonamiento similar, la onda de la ecuación (15) tiene una argumento coseno $(\omega t + k_0 z)$ que describe una onda que se mueve

en la dirección negativa de z , puesto que a medida que se incrementa el tiempo z debe disminuir y así mantener el argumento constante. Por simplicidad, se restringirá la atención en este capítulo sólo a ondas que se propagan en la dirección positiva de z .

Tal como se hizo se hizo con las ondas en las líneas de transmisión, los campos instantáneos reales de la ecuación (15) se expresan en términos de sus formas fasoriales. Utilizando el campo que se propaga hacia delante en la ecuación (15) se puede escribir:

$$\mathcal{E}_x(z, t) = \frac{1}{2} \underbrace{|E_{x0}| e^{j\phi_1}}_{E_{xs}} e^{-jk_0 z} e^{j\omega t} + c.c. = \frac{1}{2} E_{xs} e^{j\omega t} + c.c. = \text{Re}[E_{xs} e^{j\omega t}] \quad (19)$$

donde $c.c.$ expresa el complejo conjugado y se identifica al *campo eléctrico fasorial* como $E_{xs} = E_{x0} e^{-jk_0 z}$. Como se indica en (19), E_{x0} es la amplitud *compleja* (la cual incluye la fase, ϕ_1).

EJEMPLO 12.1

Exprésese $\mathcal{E}_y(z, t) = 100 \cos(10^8 t - 0.5z + 30^\circ)$ V/m como un fasor.

Solución. Antes que nada, se expresa en forma exponencial,

$$\mathcal{E}_y(z, t) = \text{Re}[100 e^{j(10^8 t - 0.5z + 30^\circ)}]$$

y después se elimina Re y se suprime $e^{j10^8 t}$, obteniendo el fasor,

$$E_{ys}(z) = 100 e^{-j0.5z + j30^\circ}$$

Nótese que, en este caso, se utiliza una nomenclatura mezclada para el ángulo; esto es, $0.5z$ está en radianes, mientras que 30° , en grados. Dada una componente escalar o un vector expresado como un fasor, fácilmente se puede recuperar la expresión en el dominio del tiempo.

EJEMPLO 12.2

Dada la amplitud compleja de campo eléctrico de una onda plana uniforme, $\mathbf{E}_0 = 100\mathbf{a}_x + 20\angle 30^\circ \mathbf{a}_y$ V/m, constrúyase el fasor y los campos instantáneos reales si se sabe que la onda se propaga hacia delante en la dirección de z en el espacio libre y que tiene una frecuencia de 10 MHz.

Solución. Se comienza construyendo la expresión para el fasor general:

$$\mathbf{E}_s(z) = [100\mathbf{a}_x + 20e^{j30^\circ} \mathbf{a}_y] e^{-jk_0 z}$$

donde $k_0 = \omega/c = 2\pi \times 10^7/3 \times 10^8 = 0.21$ rad/m. La forma real instantánea entonces se encuentra por medio de la regla expresada en la ecuación (19).

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(z, t) &= \text{Re}[100 e^{-j0.21z} e^{j2\pi \times 10^7 t} \mathbf{a}_x + 20 e^{j30^\circ} e^{-j0.21z} e^{j2\pi \times 10^7 t} \mathbf{a}_y] \\ &= \text{Re}[100 e^{j(2\pi \times 10^7 t - 0.21z)} \mathbf{a}_x + 20 e^{j(2\pi \times 10^7 t - 0.21z + 30^\circ)} \mathbf{a}_y] \\ &= 100 \cos(2\pi \times 10^7 t - 0.21z) \mathbf{a}_x + 20 \cos(2\pi \times 10^7 t - 0.21z + 30^\circ) \mathbf{a}_y \end{aligned}$$

Es evidente que calcular la derivada parcial de cualquier campo con respecto al tiempo equivale a multiplicar el fasor correspondiente por $j\omega$. Como ejemplo, se puede expresar la ecuación (8) (utilizando campos sinusoidales) como

$$\frac{\partial \mathcal{H}_y}{\partial z} = -\epsilon_0 \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial t} \quad (20)$$

donde, de forma consistente con (19):

$$\mathcal{E}_x(z, t) = \frac{1}{2} E_{xs}(z) e^{j\omega t} + c.c. \quad \text{y} \quad \mathcal{H}_y(z, t) = \frac{1}{2} H_{ys}(z) e^{j\omega t} + c.c. \quad (21)$$

Sustituyendo los campos de (21) en (20), esta última ecuación se simplifica a,

$$\frac{dH_{ys}(z)}{dz} = -j\omega\epsilon_0 E_{xs}(z) \quad (22)$$

En el proceso para obtener esta ecuación se observa, primero, que los términos complejos conjugados de (21) originan su propia ecuación independiente, redundante con (22); segundo, los factores $e^{j\omega t}$, que son comunes en ambos lados, se eliminan; tercero, la derivada parcial con respecto a z se convierte en la derivada total, puesto que el fasor H_{ys} sólo depende de z .

Enseguida, este resultado se aplica a las ecuaciones de Maxwell para obtenerlas en forma fasorial. Sustituyendo el campo expresado en (21) en las ecuaciones (1) a (4), se obtiene,

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = j\omega\epsilon_0 \mathbf{E}_s \quad (23)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu_0 \mathbf{H}_s \quad (24)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E}_s = 0 \quad (25)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H}_s = 0 \quad (26)$$

Obsérvese que (25) y (26) ya no son relaciones independientes, pues se pueden obtener calculando la divergencia de (23) y (24), respectivamente.

Las ecuaciones (23) a (26) pueden utilizarse para obtener la forma vectorial sinusoidal en estado estable de la ecuación de onda en el espacio libre. Se comienza calculando el rotacional en ambos lados de (24):

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu_0 \nabla \times \mathbf{H}_s = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}_s) - \nabla^2 \mathbf{E}_s \quad (27)$$

donde la última igualdad es una identidad que define el *vector laplaciano* de \mathbf{E}_s :

$$\nabla^2 \mathbf{E}_s = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}_s) - \nabla \times \nabla \times \mathbf{E}_s$$

Por la ecuación (25) se puede ver que $\nabla \cdot \mathbf{E}_s = 0$. Utilizando esta ecuación y sustituyendo (23) en (27), se obtiene,

$$\nabla^2 \mathbf{E}_s = -k_0^2 \mathbf{E}_s \quad (28)$$

donde, de nuevo, $k_0 = \omega/c = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$. La ecuación (28) se conoce como la ecuación vectorial de Helmholtz para el espacio libre.¹ Cuando dicha expresión se expande resulta una ecuación enorme, aun en coordenadas cartesianas, ya que resultan tres ecuaciones fasoriales (una para cada componente vectorial), y cada una tiene cuatro términos. La componente x de (28), aunque se utilice la notación con el operador del, se convierte en,

$$\nabla^2 E_{xs} = -k_0^2 E_{xs} \quad (29)$$

y la expansión del operador lleva a la ecuación diferencial parcial de segundo orden,

$$\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2} = -k_0^2 E_{xs}$$

De nuevo, suponiendo una onda plana uniforme en la que E_{xs} no varía con x o y , las dos derivadas correspondientes son cero, y se obtiene

$$\frac{d^2 E_{xs}}{dz^2} = -k_0^2 E_{xs} \quad (30)$$

ecuación cuya solución ya se conoce:

$$E_{xs}(z) = E_{x0}e^{-jk_0z} + E'_{x0}e^{jk_0z} \quad (31)$$

Vuélvase a las ecuaciones de Maxwell, (23) a (26), y determínese la forma del campo \mathbf{H} . Dado \mathbf{E}_s , \mathbf{H}_s se obtiene muy fácilmente de (24):

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -j\omega\mu_0\mathbf{H}_s \quad (24)$$

la cual se simplifica enormemente para una sola componente E_{xs} variando únicamente con z ,

$$\frac{dE_{xs}}{dz} = -j\omega\mu_0 H_{ys}$$

Utilizando (31) en E_{xs} , se tiene,

$$\begin{aligned} H_{ys} &= -\frac{1}{j\omega\mu_0} [(-jk_0)E_{x0}e^{-jk_0z} + (jk_0)E'_{x0}e^{jk_0z}] \\ &= E_{x0}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}e^{-jk_0z} - E'_{x0}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}e^{jk_0z} = H_{y0}e^{-jk_0z} + H'_{y0}e^{jk_0z} \end{aligned} \quad (32)$$

En la forma instantánea real esto se convierte en:

$$H_y(z, t) = E_{x0}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\cos(\omega t - k_0z) - E'_{x0}\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}\cos(\omega t + k_0z) \quad (33)$$

donde se supone que E_{x0} y E'_{x0} son reales.

¹ Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821-1894) fue profesor en Berlín, y se dedicaba a investigaciones en los campos de la fisiología, la electrodinámica y la óptica. Hertz fue uno de sus alumnos.

En general, a partir de (32) se encuentra que las amplitudes de los campos eléctrico y magnético de la onda que se propaga hacia delante en el espacio libre se relacionan por

$$E_{x0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H_{y0} = \eta_0 H_{y0} \quad (34a)$$

También se observa que las amplitudes de las ondas que se propagan hacia atrás se relacionan por medio de

$$E'_{x0} = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} H'_{y0} = -\eta_0 H'_{y0} \quad (34b)$$

donde la *impedancia intrínseca* del espacio libre se define como

$$\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377 \doteq 120\pi \, \Omega \quad (35)$$

La magnitud de η_0 en ohms es evidente, de manera inmediata, de su definición como el cociente de E (en unidades de V/m) sobre H (en unidades de A/m). Está en directa analogía con la impedancia característica, Z_0 , de una línea de transmisión, donde se define esta última como el cociente del voltaje sobre la corriente en una onda de propagación. Obsérvese que la diferencia entre (34a) y (34b) es el signo menos. Esto es consistente con la analogía de la línea de transmisión que condujo a las ecuaciones (25a) y (25b) del capítulo 11. Dichas ecuaciones incluyeron las definiciones de las corrientes positivas y negativas asociadas con las ondas de voltaje hacia delante y hacia atrás. De manera similar, la ecuación (34a) especifica que en una onda plana uniforme que se propaga hacia delante en el eje z —cuyo vector de campo eléctrico se encuentra en la dirección positiva de x en un determinado punto en el tiempo y espacio— el vector de campo magnético está en la dirección *positiva* de y en las mismas coordenadas de tiempo y espacio. En el caso de una onda de propagación hacia atrás en z que tenga un campo eléctrico positivo en dirección de x , el vector de campo magnético está en la dirección *negativa* de y . El significado físico de esto se relaciona con la definición de flujo de potencia en la onda, como lo especifica el vector Poynting, $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ (en watts/m²). El producto vectorial de \mathbf{E} y \mathbf{H} debe proporcionar la dirección correcta de propagación de la onda, por lo que es aparente la necesidad del signo menos en (34b). Los asuntos relacionados con la transmisión de potencia se estudiarán en la sección 12.3.

Mediante las figuras 12.1a y 12.1b se puede intuir la forma en la que los campos varían en el espacio. La intensidad de campo eléctrico de la figura 12.1a se muestra en $t = 0$, y el valor instantáneo del campo se representa a lo largo de tres líneas, el eje z y las líneas arbitrarias paralelas al eje z en los planos $x = 0$ y $y = 0$. Puesto que el campo es uniforme en planos perpendiculares al eje z , la variación a lo largo de las tres líneas es la misma. En una longitud de onda λ transcurre un ciclo completo de la variación. Los valores de H_y para los mismos tiempo y posición se muestran en la figura 12.1b.

Una onda plana uniforme no puede existir físicamente, pues se extendería hasta el infinito al menos en dos dimensiones y representaría una cantidad infinita de energía. Sin embargo, el campo distante de una antena transmisora es esencialmente una onda plana uniforme en alguna región limitada; por ejemplo, una señal de radar que choca con un objetivo distante es casi una onda plana uniforme.

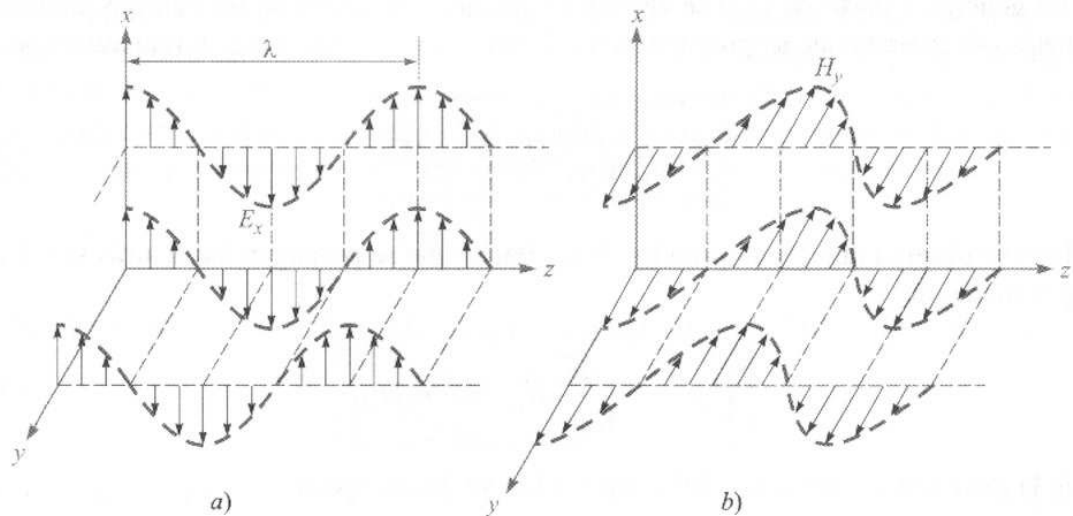


Figura 12.1 a) Las flechas representan los valores instantáneos de $E_{x0} \cos[\omega(t - z/c)]$ en $t = 0$ a lo largo del eje z , a lo largo de una línea arbitraria en el plano $x = 0$ paralela al eje z , y a lo largo de una línea arbitraria en el plano $y = 0$ paralela al eje z . b) Los valores correspondientes de H_y están indicados. Nótese que E_x y H_y están en fase en todo punto y para todo instante.



Animaciones

Aunque solamente se ha considerado una onda que varía de forma sinusoidal con el tiempo y el espacio, es posible elaborar una combinación apropiada de soluciones de la ecuación de onda con el fin de llegar a una onda de cualquier forma deseada, pero que satisfaga la ecuación (14). La suma de un número infinito de armónicas utilizando una serie de Fourier puede producir una onda periódica de forma cuadrada o triangular, tanto en el espacio como en el tiempo. Las ondas no periódicas pueden obtenerse de la solución básica empleando métodos integrales de Fourier. Estos temas se estudian en libros más avanzados sobre teoría electromagnética.

D12.1 La amplitud de campo eléctrico de una onda plana uniforme que se propaga en la dirección \mathbf{a}_z es de 250 V/m. Si $\mathbf{E} = E_x \mathbf{a}_x$ y $\omega = 1.00$ Mrad/s, encuentrese: a) la frecuencia; b) la longitud de onda; c) el periodo; d) la amplitud de \mathbf{H} .

Respuesta: 159 kHz; 1.88 km; 6.28 μ s; 0.663 A/m

D12.2 Sea $\mathbf{H}_s = (2\angle -40^\circ \mathbf{a}_x - 3\angle 20^\circ \mathbf{a}_y) e^{-j0.07z}$ A/m para una onda plana uniforme que viaja en el espacio libre. Encuéntrese: a) ω ; b) H_x en $P(1, 2, 3)$ en $t = 31$ ns; c) $|\mathbf{H}|$ en $t = 0$ en el origen.

Respuesta: 21.0 Mrad/s; 1.934 A/m; 3.22 A/m

12.2 Propagación de ondas en dieléctricos

El tratamiento analítico de la onda plana uniforme se amplía a la propagación en un material dieléctrico de permitividad ϵ y permeabilidad μ . Se supone que el medio es homogéneo

(los parámetros μ y ϵ son constantes respecto a la posición) e isotrópico (en el que μ y ϵ no cambian con la orientación del campo). La ecuación de Helmholtz es,

$$\nabla^2 \mathbf{E}_s = -k^2 \mathbf{E}_s \quad (36)$$

donde el número de onda es una función de las propiedades del material, como lo describen μ y ϵ :

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon} = k_0 \sqrt{\mu_r \epsilon_r} \quad (37)$$

Para E_{xs} , se tiene,

$$\frac{d^2 E_{xs}}{dz^2} = -k^2 E_{xs} \quad (38)$$

Una característica importante de la propagación de ondas en dieléctricos es que k puede tener un valor complejo y, como tal, se conoce con el nombre de *constante de propagación compleja*. De hecho, una solución general de (38) permite la posibilidad de un complejo k , y es muy común escribirlo en términos de sus partes real e imaginaria de la manera siguiente:

$$jk = \alpha + j\beta \quad (39)$$

Una solución de (38) será:

$$E_{xs} = E_{x0} e^{-jkz} = E_{x0} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad (40)$$

Multiplicando (40) por $e^{j\omega t}$ y tomando la parte real se obtiene una forma del campo que puede visualizarse de una manera más fácil:

$$E_x = E_{x0} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \quad (41)$$

Esto se conoce como una onda plana uniforme que se propaga hacia delante en la dirección z con fase constante τ , pero que (para valores positivos de α) pierde amplitud al incrementarse z de acuerdo con el factor $e^{-\alpha z}$. Por lo tanto, el efecto general de una k con valor complejo es la obtención de una onda de propagación que cambia su amplitud con la distancia. Si α es positivo, se le llama *coeficiente de atenuación*. Si α es negativo, aumenta en amplitud con la distancia y a α se le llama *coeficiente de ganancia*. Este último efecto podría presentarse, por ejemplo, en amplificadores láser. En la presente y futuras exposiciones en este libro, sólo se considerarán medios pasivos, en los cuales están presentes uno o más mecanismos de pérdida y, por lo tanto, producirán un valor de α positivo.

El coeficiente de atenuación se mide en nepers por metro (Np/m), de tal forma que el exponente de e se mide en unidades adimensionales llamadas nepers. Por lo tanto, si $\alpha = 0.01$ Np/m, la amplitud de la cresta de la onda en $z = 50$ será $e^{-0.5}/e^{-0} = 0.607$ de su valor en $z = 0$. La amplitud de la onda se reduce en un factor con el cual el lector está familiarizado de e^{-1} o 0.368, al propagarse la onda una distancia $1/\alpha$ en la dirección $+z$.

Las formas en que los procesos físicos en un material pueden afectar el campo eléctrico de la onda se describen por medio de la *permitividad compleja* de la forma

$$\epsilon = \epsilon' - j\epsilon'' = \epsilon_0(\epsilon'_r - j\epsilon''_r) \quad (42)$$

Dos importantes mecanismos que originan una permitividad constante (y, por lo tanto, generan pérdidas en la onda) son el electrón ligado u oscilaciones iónicas y el relajamiento dipolar; ambos se estudian en el apéndice D. Un mecanismo adicional es la conducción de electrones libres o huecos, los cuales se estudian a fondo en este capítulo.

También pueden presentarse pérdidas que surgen como respuesta del medio al campo magnético y éstas se modelan a través de una *permeabilidad compleja*, $\mu = \mu' - j\mu'' = \mu_0 (\mu_r' - j\mu_r'')$. Como ejemplos de dichos medios están los materiales *ferrimagnéticos* o *ferritas*. La respuesta magnética es, en general, muy débil comparada con la respuesta del dieléctrico en la mayoría de los materiales destinados para la propagación de ondas; en dichos materiales, $\mu \approx \mu_0$. En consecuencia, el estudio acerca de los mecanismos de pérdida se restringirá a los descritos por medio de la permitividad compleja, y se supondrá que μ es totalmente real en este estudio.

Es posible sustituir (42) en (37), lo que resulta en,

$$k = \omega \sqrt{\mu(\epsilon' - j\epsilon'')} = \omega \sqrt{\mu\epsilon'} \sqrt{1 - j \frac{\epsilon''}{\epsilon'}} \quad (43)$$

Nótese la presencia de un segundo factor radical en (43), que se hace unitario (y real) a medida que ϵ'' desaparece. Para un valor de ϵ'' diferente de cero, k es compleja por lo que se presentan pérdidas que pueden cuantificarse por medio del coeficiente de atenuación, α , en (39). La constante de fase, β (y, en consecuencia, la longitud de onda y la velocidad de fase) también será afectada por ϵ'' . α y β se encuentran calculando las partes real e imaginaria de jk de (43). Se obtiene

$$\alpha = \text{Re}\{jk\} = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon'}{2}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2} - 1 \right)^{1/2} \quad (44)$$

$$\beta = \text{Im}\{jk\} = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon'}{2}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\epsilon''}{\epsilon'}\right)^2} + 1 \right)^{1/2} \quad (45)$$

Se puede observar que un valor de α (y, por lo tanto, de pérdidas) se obtiene si la parte imaginaria de la permitividad, ϵ'' , está presente. Asimismo, se puede observar en (44) y (45) la presencia de la relación ϵ''/ϵ' , la cual se conoce con el nombre de *tangente de pérdidas*. El significado del término se demostrará cuando se investigue el caso específico del medio conductor. La importancia práctica de esta relación estriba en su magnitud comparada con la unidad, la cual permite la simplificación de (44) y (45).

Ya sea que se presenten pérdidas o no, se puede ver a partir de (41) que la velocidad de fase de la onda está dada por

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \quad (46)$$

La longitud de onda es la distancia que se requiere para efectuar un cambio de fase de 2π radianes.

$$\beta\lambda = 2\pi$$

la cual conduce a la definición fundamental de longitud de onda

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (47)$$

Puesto que se tiene una onda plana uniforme, el campo magnético se puede encontrar por medio de

$$H_{ys} = \frac{E_{x0}}{\eta} e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}$$

donde la impedancia intrínseca es ahora una cantidad compleja,

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon' - j\epsilon''}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \frac{1}{\sqrt{1 - j(\epsilon''/\epsilon')}} \quad (48)$$

Los campos eléctrico y magnético ya no están en fase.

Un caso especial es el de un medio libre de pérdidas o un *dieléctrico perfecto*, en el que $\epsilon'' = 0$, por lo que $\epsilon = \epsilon'$. De (44), esto conduce a $\alpha = 0$, y de (45),

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon'} \quad (\text{medio libre de pérdidas}) \quad (49)$$

Con $\alpha = 0$, el campo real asume la forma,

$$E_x = E_{x0} \cos(\omega t - \beta z) \quad (50)$$

Esto se puede interpretar como una onda que viaja en la dirección $+z$ a una velocidad de fase v_p , donde

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon'}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r\epsilon'_r}}$$

La longitud de onda es

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\epsilon'}} = \frac{1}{f\sqrt{\mu\epsilon'}} = \frac{c}{f\sqrt{\mu_r\epsilon'_r}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\mu_r\epsilon'_r}} \quad (\text{medio libre de pérdidas}) \quad (51)$$

donde λ_0 es la longitud de onda en el espacio libre. Nótese que $\mu_r\epsilon'_r > 1$ y, por lo tanto, la longitud de onda es más corta y la velocidad es menor en todos los medios reales que en el espacio libre.

Asociado con E_x se encuentra la intensidad de campo magnético

$$H_y = \frac{E_{x0}}{\eta} \cos(\omega t - \beta z)$$

donde la impedancia intrínseca es,

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (52)$$

Una vez más, los dos campos son perpendiculares entre sí, perpendiculares a la dirección de propagación y están en fase entre sí en cualquier punto. Nótese que cuando a \mathbf{E} y a \mathbf{H} se les aplica el producto vectorial, el vector resultante está en la dirección de propagación. El fundamento de lo anterior se estudiará al analizar vector de Poynting.

EJEMPLO 12.3

Aplíquense estos resultados a una onda plana de 1 MHz en agua fresca. A esta frecuencia las pérdidas en el agua son despreciables, lo que significa que se puede suponer que $\epsilon'' = 0$. En el agua, $\mu_r = 1$ y a 1 MHz, $\epsilon' = 81$.

Solución. Se comenzará calculando la constante de fase. Utilizando (45) con $\epsilon'' = 0$, se tiene,

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon'} = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}\sqrt{\epsilon'_r} = \frac{\omega\sqrt{\epsilon'_r}}{c} = \frac{2\pi \times 10^6 \sqrt{81}}{3.0 \times 10^8} = 0.19 \text{ rad/m}$$

Utilizando este resultado se puede determinar la longitud de onda y la velocidad de fase:

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{.19} = 33 \text{ m}$$

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \times 10^6}{.19} = 3.3 \times 10^7 \text{ m/s}$$

La longitud de onda en el aire hubiera sido de 300 m. Al continuar con los cálculos se encuentra que la impedancia intrínseca utilizando (48) con $\epsilon'' = 0$:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} = \frac{\eta_0}{\sqrt{\epsilon'_r}} = \frac{377}{9} = 42 \Omega$$

Si se deja que la intensidad de campo eléctrico tenga una amplitud máxima de 0.1 V/m, entonces,

$$E_x = 0.1 \cos(2\pi 10^6 t - .19z) \text{ V/m}$$

$$H_y = \frac{E_x}{\eta} = (2.4 \times 10^{-3}) \cos(2\pi 10^6 t - .19z) \text{ A/m}$$

D12.3 Una onda plana uniforme de 9.375 GHz se propaga en polietileno (véase apéndice C). Si la amplitud del vector intensidad de campo eléctrico es de 500 V/m y se supone que el material está libre de pérdidas, encuentrese: a) la constante de fase; b) la longitud de onda en el polietileno; c) la velocidad de propagación; d) la impedancia intrínseca; e) la amplitud del vector intensidad de campo magnético.

Respuesta: 295 rad/m; 2.13 cm; 1.99×10^8 m/s; 251 Ω ; 1.99 A/m

EJEMPLO 12.4

Considérese de nuevo la propagación de ondas planas en el agua, pero a la frecuencia mucho más alta de microondas de 2.5 GHz. A frecuencias dentro de este rango o mayores los fenómenos de relajación dipolar y de resonancia en las moléculas de agua son considerablemente significativos.² Las partes real e imaginaria de la permitividad están presentes y ambas varían con la frecuencia. A frecuencias por debajo de la luz visible ambos mecanismos producen un valor de ϵ'' que aumenta al incrementarse la frecuencia y alcanza su máximo valor alrededor de los 10^{13} Hz. ϵ' disminuye al aumentar la frecuencia, y alcanza un mínimo también en la vecindad de 10^{13} Hz. La lectura complementaria 3 proporciona los detalles específicos. A 2.5 GHz los efectos de la relajación dipolar dominan. Los valores de la permitividad son $\epsilon'_r = 78$ y $\epsilon''_r = 7$. De (44), se tiene,

$$\alpha = \frac{(2\pi \times 2.5 \times 10^9)\sqrt{78}}{(3.0 \times 10^8)\sqrt{2}} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{7}{78}\right)^2} - 1 \right)^{1/2} = 21 \text{ Np/m}$$

Este primer cálculo demuestra el principio de operación del *horno de microondas*. Casi todos los alimentos contienen agua, por lo que pueden cocinarse cuando la radiación incidente en el rango de las microondas se absorbe y se convierte en calor. Nótese que el campo se atenuará a un valor e^{-1} veces su valor inicial a una distancia de $1/\alpha = 4.8$ cm. A esta distancia se le llama *profundidad de penetración* del material y, por supuesto, depende de la frecuencia. El valor de 4.8 cm de profundidad es un valor razonable en el cocimiento de alimentos, puesto que llevará a un incremento de temperatura muy uniforme a lo largo de la profundidad del material. A muy altas frecuencias, donde el valor de ϵ'' es mayor, la profundidad de penetración disminuye y se absorbe mucha potencia en la superficie; a frecuencias más bajas, la profundidad de penetración aumenta y no se presenta la suficiente absorción total. Los hornos de microondas comerciales operan a frecuencias de alrededor de 2.5 GHz.

Al utilizar (45) y realizar los cálculos de una manera muy similar a los de α se encuentra que $\beta = 464$ rad/m. La longitud de onda es $\lambda = 2\pi/\beta = 1.4$ cm, mientras que en el espacio libre esto hubiera sido $\lambda_0 = c/f = 12$ cm.

Al emplear (48) se encuentra el valor de la impedancia intrínseca,

$$\eta = \frac{377}{\sqrt{78}} \frac{1}{\sqrt{1 - j(7/78)}} = 43 + j1.9 = 43 \angle 2.6^\circ \Omega$$

y E_x está adelantada en tiempo con respecto a H_y por 2.6° en cualquier punto.

A continuación considérese el caso de materiales conductivos. En éstos las corrientes se forman por el movimiento de los electrones libres y huecos bajo la influencia de un campo eléctrico. La relación que gobierna lo anterior es $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$, donde σ es la conductividad del material. Con una conductividad infinita, la onda pierde potencia por medio del calentamiento resistivo del material. Se buscará una interpretación de la permitividad compleja

² La descripción de estos mecanismos y de cómo producen una permitividad compleja se encuentra en el apéndice D. Además, para un tratamiento más general de los efectos de relajación y resonancia en la propagación de ondas, se recomienda al lector revisar las pp. 73-84 de la lectura complementaria 1 y las pp. 678-682 de la 2. Los estudios y la información referente al agua se presentan en las pp. 314-316 de la lectura complementaria 3.

en relación con la conductividad. Considérese la ecuación rotacional de Maxwell (23), que, utilizando (42), se convierte en,

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = j\omega(\epsilon' - j\epsilon'')\mathbf{E}_s = \omega\epsilon''\mathbf{E}_s + j\omega\epsilon'\mathbf{E}_s \quad (53)$$

Esta ecuación puede expresarse de una forma más familiar en la que se incluya la corriente de conducción:

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = \mathbf{J}_s + j\omega\epsilon'\mathbf{E}_s \quad (54)$$

Posteriormente, se utiliza $\mathbf{J}_s = \sigma\mathbf{E}_s$ y se interpreta ϵ en (54) como ϵ' . Esta última ecuación se convierte en:

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = (\sigma + j\omega\epsilon')\mathbf{E}_s = \mathbf{J}_{\sigma s} + \mathbf{J}_{ds} \quad (55)$$

la cual se ha expresado en términos de la densidad de corriente de conducción, $\mathbf{J}_{\sigma s} = \sigma\mathbf{E}_s$ y la densidad de corriente de desplazamiento, $\mathbf{J}_{ds} = j\omega\epsilon'\mathbf{E}_s$. Al comparar las ecuaciones (53) y (55) se encuentra que en un medio conductor:

$$\epsilon'' = \frac{\sigma}{\omega} \quad (56)$$

Vuélvase la atención al caso de un material dieléctrico en el que las pérdidas son muy pequeñas. El criterio por medio del cual se evalúa si las pérdidas son pequeñas o no es la magnitud de la tangente de pérdida, ϵ''/ϵ' . Este parámetro tendrá una influencia directa sobre el coeficiente de atenuación, α , como se puede observar en la ecuación (44). En el caso de un medio conductor, en el que (56) se aplica, la tangente de pérdida se convierte en $\sigma/\omega\epsilon'$. Por medio de la inspección de (55), se observa que la relación de las magnitudes de la densidad de la corriente de conducción y la densidad de la corriente de desplazamiento es

$$\frac{J_{\sigma s}}{J_{ds}} = \frac{\epsilon''}{j\epsilon'} = \frac{\sigma}{j\omega\epsilon'} \quad (57)$$

Es decir, estos dos vectores apuntan en la misma dirección en el espacio; sin embargo, están 90° fuera de fase en tiempo. La densidad de corriente de desplazamiento está adelantada 90° con respecto a la densidad de corriente de conducción, de la misma forma que la corriente a través de un capacitor está adelantada 90° con respecto a la corriente que circula, a través de una resistencia conectada en paralelo con dicho capacitor, en un circuito eléctrico ordinario. La relación de fase la muestra la figura 12.2. El ángulo θ (no confundirlo con el ángulo polar en coordenadas esféricas) puede identificarse, por lo tanto, como el ángulo en el que la densidad de corriente de desplazamiento está adelantada con respecto a la densidad de corriente total, y

$$\tan \theta = \frac{\epsilon''}{\epsilon'} = \frac{\sigma}{\omega\epsilon'} \quad (58)$$

Por lo tanto, el razonamiento que soporta el término *tangente de pérdidas* es evidente. El problema 12.16 al final del capítulo indica que la Q de un capacitor (su factor de calidad, no su carga), el cual incluye un dieléctrico sin pérdidas, es el recíproco de la tangente de pérdidas.

Si la tangente de pérdidas es pequeña, entonces se pueden obtener aproximaciones muy útiles de las constantes de atenuación y de fase, así como para la impedancia intrínseca. El criterio para obtener una tangente de pérdidas pequeña es $\epsilon''/\epsilon' \ll 1$, el cual identifica el medio como un *buen dieléctrico*.

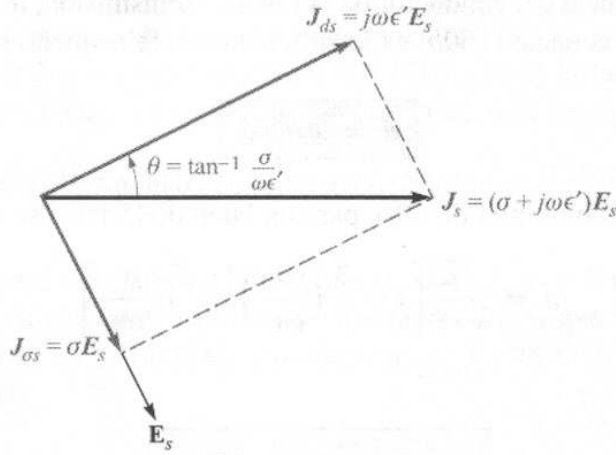


Figura 12.2 a) La relación fase-tiempo entre J_{ds} , J_{os} , J_s y E_s . La tangente de θ es igual a $\sigma/\omega\epsilon'$ y $90^\circ - \theta$ es el ángulo común de factor-potencia, o el ángulo por el cual J_s adelanta a E_s .

Considerando un material conductor, para el que $\epsilon'' = \sigma/\omega$, la ecuación (43) se convierte en

$$jk = j\omega\sqrt{\mu\epsilon'}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon'}} \quad (59)$$

Se puede expandir el segundo radical utilizando el teorema binomial

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots$$

donde $|x| \ll 1$. Se identifica x como $-j\sigma/\omega\epsilon'$ y n como $1/2$, y, por lo tanto,

$$jk = j\omega\sqrt{\mu\epsilon'} \left[1 - j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon'} + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon'} \right)^2 + \dots \right] = \alpha + j\beta$$

Ahora, en un buen dieléctrico,

$$\alpha = \text{Re}(jk) \doteq j\omega\sqrt{\mu\epsilon'} \left(-j\frac{\sigma}{2\omega\epsilon'} \right) = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \quad (60a)$$

y

$$\beta = \text{Im}(jk) \doteq \omega\sqrt{\mu\epsilon'} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon'} \right)^2 \right] \quad (60b)$$

Las ecuaciones (60a) y (60b) se pueden comparar directamente con la línea de transmisión α y β bajo condiciones de baja pérdida, como lo expresan las ecuaciones (54a) y (55b) del capítulo 11. En esta comparación se asocia σ con G , μ con L y ϵ con C . Nótese que en la propagación de ondas planas en medios sin fronteras no puede existir una cantidad análoga

al parámetro de resistencia del conductor de la línea de transmisión, R . En muchos casos, el segundo término de la ecuación (60b) es lo suficientemente pequeño para que

$$\beta \doteq \omega\sqrt{\mu\epsilon'} \quad (61)$$

Aplicando la expansión binomial de (48), para un buen dieléctrico se obtiene,

$$\eta \doteq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \left[1 - \frac{3}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon'} \right)^2 + j \frac{\sigma}{2\omega\epsilon'} \right] \quad (62a)$$

o

$$\eta \doteq \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} \left(1 + j \frac{\sigma}{2\omega\epsilon'} \right) \quad (62b)$$

Las condiciones en las que pueden utilizarse estas aproximaciones dependen de la precisión que se desea alcanzar, en términos de cuánto se desvían los resultados de los que es posible obtener aplicando las fórmulas exactas (44) y (45). Si $\sigma/\omega\epsilon' < 0.1$, se presentan desviaciones de no más de un pequeño porcentaje.

EJEMPLO 12.5

A manera de comparación, repítanse los cálculos del ejemplo 12.4 utilizando las fórmulas de aproximación (60a), (61) y (62b).

Solución. Primero, la tangente de pérdidas en este caso es $\epsilon''/\epsilon' = 7/78 = 0.09$. Utilizando (60) con $\epsilon'' = \sigma/\omega$, se obtiene

$$\alpha \doteq \frac{\omega\epsilon''}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}} = \frac{1}{2} (7 \times 8.85 \times 10^{12}) (2\pi \times 2.5 \times 10^9) \frac{377}{\sqrt{78}} = 21 \text{ cm}^{-1}$$

Posteriormente, utilizando (61b), se obtiene

$$\beta \doteq (2\pi \times 2.5 \times 10^9) \sqrt{78} / (3 \times 10^8) = 464 \text{ rad/m}$$

Por último, con (62b),

$$\eta \doteq \frac{377}{\sqrt{78}} \left(1 + j \frac{7}{2 \times 78} \right) = 43 + j1.9$$

Los resultados son idénticos (dentro de los límites de precisión que determinan las cifras proporcionadas) a los del ejemplo 12.4. Tal vez se encuentren pequeñas desviaciones, como el lector podrá verificar repitiendo los cálculos en ambos ejemplos y expresando los resultados con cuatro o cinco cifras significativas. Como se sabe, esta última práctica no tendría ningún valor debido a que los parámetros proporcionados no estarían especificados con tal precisión. Es muy común que éste sea el caso, puesto que los valores medidos no siempre se conocen con gran precisión. En función de qué tan precisos sean estos valores, uno puede utilizar, a veces, un juicio más relajado sobre cuándo pueden utilizarse las fórmulas de aproximación, permitiendo que los valores de la tangente de pérdidas sean mayores que 0.1 (sin embargo, aún menores que 1).

D12.4 Dado un material no magnético que tenga un $\epsilon'_r = 3.2$ y una $\sigma = 1.5 \times 10^{-4}$ S/m, encuentrense los valores numéricos a 3 MHz de: a) la tangente de pérdidas; b) la constante de atenuación; c) la constante de fase; d) la impedancia intrínseca.

Respuesta: 0.28; 0.016 Np/m; 0.11 rad/m; $207 \angle 7.8^\circ \Omega$.

D12.5 Considérese un material para el que $\mu_r = 1$, $\epsilon'_r = 2.5$ y la tangente de pérdidas es de 0.12. Si estos tres valores son constantes con respecto a la frecuencia en el rango de $0.5 \text{ MHz} \leq f \leq 100 \text{ MHz}$, calcúlese: a) σ a 1 y 75 MHz; b) λ a 1 y 75 MHz; c) v_p a 1 y 75 MHz.

Respuesta: 1.67×10^{-5} y 1.25×10^{-3} S/m; 190 y 2.53 m; 1.90×10^8 m/s dos veces

12.3 El teorema de Poynting y la potencia de las ondas

Con el propósito de encontrar el flujo de potencia asociado con una onda electromagnética, es necesario desarrollar un teorema de la potencia de un campo electromagnético conocido como el teorema de Poynting. Originalmente lo postuló en 1884 el físico inglés John H. Poynting.

El desarrollo comienza con una de las ecuaciones rotacionales de Maxwell, en la que supone que el medio es conductor:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (63)$$

Enseguida, se calcula el producto escalar en ambos lados de (63) con \mathbf{E} ,

$$\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (64)$$

Luego, se incorpora la siguiente identidad vectorial, la cual puede demostrarse por medio de la expansión en coordenadas cartesianas:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H} + \mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} \quad (65)$$

Utilizando (65) en el lado izquierdo de (64) se obtiene,

$$\mathbf{H} \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (66)$$

donde el rotacional del campo eléctrico está dado por la otra ecuación rotacional de Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Por lo tanto,

$$-\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

o

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (67)$$



Ilustraciones

Las dos derivadas con respecto al tiempo en (67) se pueden simplificar como sigue:

$$\epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \right) \quad (68a)$$

y

$$\mu \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \right) \quad (68b)$$

Con estas ecuaciones, la ecuación (67) se expresa como,

$$-\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \right) \quad (69)$$

Por último, se integra (69) en un volumen,

$$-\int_{\text{vol}} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dv = \int_{\text{vol}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv + \int_{\text{vol}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \right) dv + \int_{\text{vol}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \right) dv$$

Enseguida, el teorema de la divergencia se aplica en el lado izquierdo de la ecuación, así la integral de volumen se convierte en una integral en la superficie que encierra al volumen. En el lado derecho de la ecuación se intercambian las operaciones de la integración en el espacio y la derivación en el tiempo. El resultado final es,

$$-\oint_{\text{área}} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\text{vol}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dv + \frac{d}{dt} \int_{\text{vol}} \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} dv + \frac{d}{dt} \int_{\text{vol}} \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} dv \quad (70)$$

La ecuación (70) se conoce como el teorema de Poynting. En el lado derecho, la primera integral es la potencia óhmica total (pero instantánea) disipada dentro del volumen. La segunda integral es la energía total almacenada en el campo eléctrico, y la tercera integral, la energía almacenada en el campo magnético.³ Puesto que las derivadas con respecto al tiempo se calculan de la segunda y tercera integrales, esos resultados proporcionan la rapidez con la que se incrementa el almacenamiento de energía dentro del volumen, o la potencia instantánea que incrementará la energía almacenada. Por lo tanto, la suma de los términos en el lado derecho debe ser igual a la potencia total que fluye *hacia adentro* de este volumen, por lo que la potencia total que fluye *hacia fuera* de este volumen es,

$$\oint_{\text{área}} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} = W \quad (71)$$

donde la integral se calcula sobre la superficie cerrada que rodea al volumen. Al producto vectorial $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ se le conoce como el vector Poynting, \mathbf{S} ,

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad \text{W/m}^2 \quad (72)$$

el cual se interpreta como la densidad de potencia instantánea medida en watts por metro cuadrado (W/m^2). La dirección del vector \mathbf{S} indica la dirección del flujo de potencia instan-

³ Ésta es la expresión para la energía del campo magnético que se ha estado anticipando desde el capítulo 9.

táneo en un punto, y mucha gente considera al vector Poynting como un vector de “apuntamiento”. Este homónimo, a pesar de que es accidental, es correcto.⁴

Puesto que \mathbf{S} está dado por el producto vectorial de \mathbf{E} y \mathbf{H} , la dirección del flujo de potencia en cualquier punto es perpendicular tanto al vector \mathbf{E} como al \mathbf{H} . Esto ciertamente concuerda con la experiencia que se tuvo con la onda plana uniforme, puesto que la propagación en la dirección $+z$ se asociaba con una componente E_x y una H_y ,

$$E_x \mathbf{a}_x \times H_y \mathbf{a}_y = S_z \mathbf{a}_z$$

En un dieléctrico perfecto las amplitudes de los campos \mathbf{E} y \mathbf{H} están dados por

$$E_x = E_{x0} \cos(\omega t - \beta z)$$

$$H_y = \frac{E_{x0}}{\eta} \cos(\omega t - \beta z)$$

donde η es real. Por lo tanto, la amplitud de la densidad de potencia es

$$S_z = \frac{E_{x0}^2}{\eta} \cos^2(\omega t - \beta z) \quad (73)$$

En el caso de un dieléctrico con pérdidas, E_x y H_y no están en fase. Se tiene

$$E_x = E_{x0} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$$

Si se deja que

$$\eta = |\eta| \angle \theta_\eta$$

entonces, se puede expresar la intensidad de campo magnético como

$$H_y = \frac{E_{x0}}{|\eta|} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta)$$

Por lo tanto,

$$S_z = E_x H_y = \frac{E_{x0}^2}{|\eta|} e^{-2\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \cos(\omega t - \beta z - \theta_\eta) \quad (74)$$

Puesto que se trata de una señal sinusoidal, la densidad de potencia promedio, $\langle S_z \rangle$, es la cantidad que finalmente se medirá. Para encontrarla se integra (74) en un ciclo y se divide entre un periodo $T = 1/f$. Además, la identidad $\cos A \cos B \equiv 1/2 \cos(A + B) + 1/2 \cos(A - B)$ se aplica al integrando, obteniendo:

$$\langle S_z \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \frac{E_{x0}^2}{|\eta|} e^{-2\alpha z} [\cos(2\omega t - 2\beta z - 2\theta_\eta) + \cos \theta_\eta] dt \quad (75)$$

La componente de la segunda armónica del integrando de (75) se integra como cero, así que sólo queda la contribución de la componente de cd. El resultado es

⁴ Nótese que el símbolo \mathbf{S} del vector se utiliza para el vector Poynting, y no se debe confundir con vector diferencial de área, $d\mathbf{S}$. Este último, como se sabe, es el producto de la perpendicular hacia fuera de la superficie y el área diferencial.

$$\langle S_z \rangle = \frac{1}{2} \frac{E_{x0}^2}{|\eta|} e^{-2\alpha z} \cos \theta_\eta \quad (76)$$

Nótese que la densidad de potencia se atenúa en función de $e^{-2\alpha z}$, mientras que E_x y H_y disminuyen en función de $e^{-\alpha z}$.

Por último, se puede observar que es posible obtener la expresión anterior de una manera muy fácil utilizando las formas fasoriales de los campos eléctrico y magnético. En forma vectorial, éstas son,

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^*) \quad \text{W/m}^2 \quad (77)$$

En el presente caso,

$$\mathbf{E}_s = E_{x0} e^{-j\beta z} \mathbf{a}_x$$

y

$$\mathbf{H}_s^* = \frac{E_{x0}}{\eta^*} e^{+j\beta z} \mathbf{a}_y = \frac{E_{x0}}{|\eta|} e^{j\theta} e^{+j\beta z} \mathbf{a}_y$$

donde se supone que E_{x0} es real. La ecuación (77) se aplica en cualquier onda electromagnética sinusoidal y proporciona tanto la magnitud como la dirección de la densidad de potencia promedio.

D12.6 A frecuencias de 1, 100 y 3000 MHz la constante dieléctrica del hielo fabricado con agua pura tiene valores de 4.15, 3.45 y 3.20, respectivamente, mientras que la tangente de pérdidas es de 0.12, 0.035 y 0.0009, respectivamente también. Si una onda plana uniforme con una amplitud de 100 V/m en $z = 0$ se propaga a través de dicho medio, encuentrese la densidad de potencia promedio en $z = 0$ y $z = 10$ m de cada frecuencia.

Respuesta: 27.1 y 25.7 W/m²; 24.7 y 6.31 W/m²; 23.7 y 8.63 W/m².

12.4 Propagación en buenos conductores: el efecto piel

Como un estudio adicional de la propagación con pérdidas, se investigará el comportamiento de un *buen conductor* cuando se propaga por él una onda plana uniforme. Dicho material satisface el criterio general de alta pérdida, en el que la tangente de pérdidas $\epsilon''/\epsilon' \gg 1$. La aplicación de esto en un buen conductor lleva a un criterio más específico, $\sigma/(\omega\epsilon') \gg 1$. Como antes, se tiene cierto interés en las pérdidas que se presentan en la transmisión de ondas a través de un buen conductor, y se buscarán nuevas aproximaciones para el cálculo de la constante de fase, el coeficiente de atenuación y la impedancia intrínseca. Sin embargo, la modificación del problema básico adecuado a buenos conductores es un factor nuevo. Esto se relaciona con las ondas asociadas con campos electromagnéticos que existen en un dieléctrico externo junto a la superficie del conductor; en este caso, la propagación de ondas *a lo largo* de la superficie. La porción de todo el campo que existe dentro del conductor sufrirá pérdidas disipativas que generan las corrientes de conducción. Por lo tanto, todo el



Interactivos

campo se atenuará al aumentar la distancia del recorrido a lo largo de la superficie. Éste es el mecanismo de la pérdida resistiva en las líneas de transmisión que se estudió en el capítulo 11, en el que se incorpora el parámetro de la resistencia de línea, R .

Un buen conductor posee, implícitamente, una alta conductividad y grandes corrientes de conducción. Por lo tanto, la energía representada por la onda que viaja a través del material disminuye a medida que la onda se propaga, ya que las pérdidas óhmicas están continuamente presentes. Al estudiar la tangente de pérdidas se vio que la relación entre la densidad de corriente de conducción y la densidad de corriente de desplazamiento en un material conductor está dada por $\sigma/\omega\epsilon'$. Al seleccionar un conductor metálico pobre y una frecuencia muy elevada como un ejemplo conservador, esta relación⁵ para el nicromo ($\sigma \doteq 10^6$) a 100 MHz es de alrededor de 2×10^8 . Por lo tanto, se tiene una situación donde $\sigma/\omega\epsilon' \gg 1$, y se debe tener la posibilidad de hacer aproximaciones muy buenas para encontrar α , β y η en un buen conductor.

La expresión general de la constante de propagación es, de (59),

$$jk = j\omega\sqrt{\mu\epsilon'}\sqrt{1 - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon'}}$$

la cual se simplifica inmediatamente para obtener

$$jk = j\omega\sqrt{\mu\epsilon'}\sqrt{-j\frac{\sigma}{\omega\epsilon'}}$$

o

$$jk = j\sqrt{-j\omega\mu\sigma}$$

Pero,

$$-j = 1 \angle -90^\circ$$

y

$$\sqrt{1 \angle -90^\circ} = 1 \angle -45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - j)$$

Por lo tanto,

$$jk = j(1 - j)\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = (1 + j)\sqrt{\pi f\mu\sigma} = \alpha + j\beta \quad (78)$$

De aquí que

$$\boxed{\alpha = \beta = \sqrt{\pi f\mu\sigma}} \quad (79)$$

Sin considerar los parámetros μ y σ del conductor o la frecuencia del campo aplicado, α y β son iguales. Si se supone de nuevo solamente una componente E_x viajando en la dirección $+z$, entonces,

$$E_x = E_{x0}e^{-z\sqrt{\pi f\mu\sigma}} \cos(\omega t - z\sqrt{\pi f\mu\sigma}) \quad (80)$$

⁵ Es costumbre utilizar la expresión $\epsilon' = \epsilon_0$ para conductores metálicos.

Este campo se puede enlazar en el conductor con un campo externo en la superficie del conductor. Sea la región $z > 0$ un buen conductor, y la región $z < 0$, un dieléctrico perfecto. En la superficie de la frontera $z = 0$, (80) se convierte en

$$E_x = E_{x0} \cos \omega t \quad (z = 0)$$

Ésta debe considerarse como el campo fuente que establece los campos dentro del conductor. Puesto que la corriente de desplazamiento es despreciable,

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

Por lo tanto, la densidad de corriente de conducción en cualquier punto en el conductor está directamente relacionada con \mathbf{E} :

$$J_x = \sigma E_x = \sigma E_{x0} e^{-z\sqrt{\pi f \mu \sigma}} \cos(\omega t - z\sqrt{\pi f \mu \sigma}) \quad (81)$$

Las ecuaciones (80) y (81) poseen una gran cantidad de información. Considerando primero el término exponencial negativo, se encuentra un decremento exponencial en la densidad de corriente de conducción y en la intensidad de campo eléctrico con una penetración hacia el conductor (saliendo de la fuente). El factor exponencial es unitario en $z = 0$ y disminuye a $e^{-1} = 0.368$ cuando,

$$z = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}}$$

Esta distancia se denota por δ y se llama *profundidad de penetración*, o *profundidad de la piel*,

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta} \quad (82)$$

Este parámetro es importante en la descripción del comportamiento de un conductor sometido a campos electromagnéticos. Para tener una idea de la magnitud de la profundidad de la piel, considérese el cobre, $\sigma = 5.8 \times 10^7$ S/m, a diferentes frecuencias. Se tiene,

$$\delta_{Cu} = \frac{0.066}{\sqrt{f}}$$

A una frecuencia (de transmisión de potencia) de 60 Hz, $\delta_{Cu} = 8.53$ mm. Recordando que la densidad de potencia contiene un término exponencial $e^{-2\alpha z}$, se observa que la densidad de potencia está multiplicada por un factor de $0.368^2 = 0.135$ por cada 8.53 mm de distancia dentro del cobre.

A una frecuencia de microondas de 10 000 MHz, δ es 6.61×10^{-4} mm. Dicho de una forma más general, todos los campos en un buen conductor, como el cobre, son básicamente cero a una distancia mayor que algunas profundidades de piel con respecto a la superficie. Cualquier densidad de corriente o intensidad de campo eléctrico en la superficie de un buen conductor decrece rápidamente a medida que se avanza en el conductor. La energía electromagnética no se transmite en el interior de un buen conductor; ésta viaja en la región alrededor del conductor, mientras que éste solamente guía las ondas. Se estudiará con mayor profundidad la propagación guiada en el capítulo 14.

Supóngase que se tiene una barra de cobre en una subestación de una compañía de electricidad en la que se desea transmitir corrientes de gran magnitud y, por lo tanto, se selecciona un tamaño de la barra de 2 por 4 pulgadas. En consecuencia, gran parte del cobre se

desperdiciará debido a que los campos se reducen significativamente, en una profundidad de piel, a alrededor de 8.5 mm.⁶

La utilización de un conductor hueco con un grosor de pared de aproximadamente 12 mm sería un mejor diseño. Aunque se están aplicando los resultados de un análisis realizado en un conductor planar infinito a un conductor de dimensiones finitas, los campos se atenúan en este último tipo de conductor de manera similar (pero no idéntica).

La extremadamente pequeña profundidad de piel a frecuencias de microondas muestra que sólo la capa superficial del conductor es importante. Un ejemplo de un excelente conductor a estas frecuencias es un pedazo de vidrio con una superficie de plata evaporada de 3 μm de grosor.

A continuación se determinan las expresiones para la velocidad y la longitud de onda dentro de un buen conductor. De la ecuación (82), ya se tiene que

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\delta} = \sqrt{\pi f \mu \sigma}$$

Entonces, puesto que

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

se puede ver que la longitud de onda es

$$\lambda = 2\pi\delta \quad (83)$$

Asimismo, recordando que

$$v_p = \frac{\omega}{\beta}$$

se tiene

$$v_p = \omega\delta \quad (84)$$

Para el cobre a 60 Hz, $\lambda = 5.36$ cm y $v_p = 3.22$ m/s, o aproximadamente ¡7.2 millas/hora! Muchos entre nosotros pueden correr más rápido que eso. Por supuesto, en el espacio libre, una onda de 60 Hz tiene una longitud de onda de 3100 millas y viaja a la velocidad de la luz.

EJEMPLO 12.6

Considérese de nuevo la propagación de ondas en el agua, pero esta vez considérese el agua del mar. La diferencia principal entre el agua de mar y el agua dulce es, por supuesto, su contenido de sal. El cloruro de sodio se desasocia en el agua para formar iones Na^+ y Cl^- , los cuales, estando cargados, se moverán cuando estén bajo la fuerza de un campo eléctrico. El agua del mar es, por lo tanto, conductora, y atenuará las ondas electromagnéticas mediante este mecanismo. A frecuencias en la vecindad de 10^7 Hz y menores, los efectos de cargas ligadas en el agua, estudiados anteriormente, son despreciables, y las pérdidas en el agua del mar se originan sobre todo de la conductividad asociada con la sal. Se considera una onda incidente a una frecuencia de 1 MHz. Se desea encontrar la profundidad de piel, la longitud de onda y la velocidad de fase. En el agua del mar, $\sigma = 4$ S/m y $\epsilon'_r = 81$.

⁶ La compañía de luz opera a 60 Hz.

Solución. En primera instancia, se evalúa la tangente de pérdidas utilizando los datos proporcionados:

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon'} = \frac{4}{(2\pi \times 10^6)(81)(8.85 \times 10^{-12})} = 8.9 \times 10^2 \gg 1$$

El agua del mar es, por lo tanto, un buen conductor a 1 MHz (y a frecuencias menores). La profundidad de piel es

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} = \frac{1}{\sqrt{(\pi \times 10^6)(4\pi \times 10^{-7})(4)}} = 0.25 \text{ m} = 25 \text{ cm}$$

Ahora,

$$\lambda = 2\pi\delta = 1.6 \text{ m}$$

y

$$v_p = \omega\delta = (2\pi \times 10^6)(0.25) = 1.6 \times 10^6 \text{ m/seg}$$

En el espacio libre estos valores pudieron haber sido $\lambda = 300 \text{ m}$ y, por supuesto, $v = c$.

Con una profundidad de piel de 25 cm, es obvio que es impráctica la comunicación en radiofrecuencia en el agua de mar. Nótese, sin embargo, que δ varía con $1/\sqrt{f}$, por lo que las comunicaciones mejoran a frecuencias más bajas. Por ejemplo, si se utiliza una frecuencia de 10 Hz (la cual está en el rango de ELF o de frecuencias extremadamente bajas), la profundidad de piel aumenta a 1 MHz por un factor de $10^6/\sqrt{10}$, de tal forma que

$$\delta(10 \text{ Hz}) \doteq 80 \text{ m}$$

La longitud de onda correspondiente es $\lambda = 2\pi\delta \doteq 500 \text{ m}$. Por muchos años se utilizaron frecuencias en el rango ELF en las comunicaciones submarinas. Las señales se transmitían con antenas terrenas de enormes dimensiones (las cuales eran necesarias debido a que la longitud de onda en el espacio libre asociada con una frecuencia de 10 Hz es de $3 \times 10^7 \text{ m}$). Así, los submarinos captaban las señales mediante una antena suspendida de alambre con una longitud menor a 500 m, la cual era suficiente. La desventaja era que las velocidades de transmisión de datos en ELF eran lo suficientemente lentas para que una sola palabra requiriera varios minutos para transmitirse. Típicamente, mediante señales ELF se indicaba al submarino que iniciara procedimientos de emergencia o se acercara a la superficie para recibir un mensaje más detallado por medio del satélite.

A continuación, la atención se enfocará a la búsqueda del campo magnético, H_y ; asociado con E_x . Para hacerlo es necesaria una expresión para la impedancia intrínseca de un buen conductor. Se comienza con la ecuación (48), sección 12.2, con $\epsilon'' = \sigma/\omega$,

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\epsilon'}}$$

Puesto que $\sigma \gg \omega$, se tiene,

$$\eta = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}}$$

la cual puede escribirse como,

$$\eta = \frac{\sqrt{2}/45^\circ}{\sigma\delta} = \frac{(1+j)}{\sigma\delta} \quad (85)$$

Por lo tanto, si se escribe (80) en términos de la profundidad de piel,

$$E_x = E_{x0}e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \quad (86)$$

entonces

$$H_y = \frac{\sigma\delta E_{x0}}{\sqrt{2}}e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (87)$$

y se ve que en la máxima amplitud de la intensidad del campo magnético ocurre un octavo de ciclo después que la amplitud máxima de la intensidad del campo eléctrico en cada punto.

En las ecuaciones (86) y (87) se puede obtener el vector Poynting promedio aplicando (77),

$$\langle S_z \rangle = \frac{1}{2} \frac{\sigma\delta E_{x0}^2}{\sqrt{2}} e^{-2z/\delta} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

o

$$\langle S_z \rangle = \frac{1}{4} \sigma\delta E_{x0}^2 e^{-2z/\delta}$$

Se puede observar de nuevo que en una distancia de una profundidad de piel, la densidad de potencia es de tan sólo de $e^{-2} = 0.135$ de su valor en la superficie.

La pérdida de potencia promedio total en un ancho $0 < y < b$ y una longitud $0 < x < L$ en la dirección de la corriente, como lo muestra la figura 12.3, se obtiene encontrando la potencia que cruza la superficie del conductor dentro de esta área,

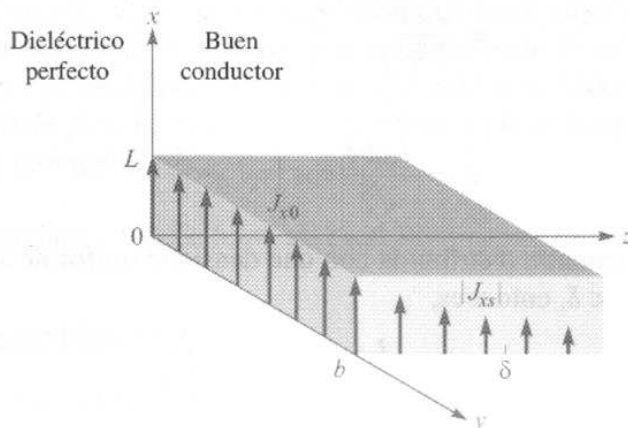


Figura 12.3 a) La densidad de corriente $J_x = J_{x0}e^{-z/\delta}e^{-jz/\delta}$ disminuye en magnitud conforme la onda se propaga dentro del conductor. La pérdida de potencia promedio en la región $0 < x < L$, $0 < y < b$, $z > 0$ es $\delta bL J_{x0}^2/4\sigma$ watts.

$$P_L = \int_{\text{área}} \langle S_z \rangle da = \int_0^b \int_0^L \frac{1}{4} \sigma \delta E_{x0}^2 e^{-2z/\delta} \Big|_{z=0} dx dy = \frac{1}{4} \sigma \delta b L E_{x0}^2$$

En términos de la densidad de corriente J_{x0} en la superficie,

$$J_{x0} = \sigma E_{x0}$$

se tiene

$$P_L = \frac{1}{4\sigma} \delta b L J_{x0}^2 \quad (88)$$

Ahora se verá qué pérdida de potencia resultaría si la corriente *total* en un grosor b estuviera distribuida *uniformemente* en una profundidad de piel. Encontrar la corriente total requiere integrar la densidad de corriente sobre la profundidad infinita del conductor,

$$I = \int_0^\infty \int_0^b J_x dy dz$$

donde

$$J_x = J_{x0} e^{-z/\delta} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)$$

o, en notación exponencial compleja, para simplificar la integración,

$$\begin{aligned} J_{xs} &= J_{x0} e^{-z/\delta} e^{-jz/\delta} \\ &= J_{x0} e^{-(1+j)z/\delta} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} I_s &= \int_0^\infty \int_0^b J_{x0} e^{-(1+j)z/\delta} dy dz \\ &= J_{x0} b e^{-(1+j)z/\delta} \frac{-\delta}{1+j} \Big|_0^\infty \\ &= \frac{J_{x0} b \delta}{1+j} \end{aligned}$$

y

$$I = \frac{J_{x0} b \delta}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

Si esta corriente se encuentra distribuida con una densidad uniforme J' en la sección transversal $0 < y < b$, $0 < z < \delta$, entonces,

$$J' = \frac{J_{x0}}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

La pérdida de potencia óhmica por unidad de volumen es $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ y, por lo tanto, la potencia instantánea total disipada en el volumen que se está considerando es,

$$P_{Li}(t) = \frac{1}{\sigma} (J')^2 b L \delta = \frac{J_{x0}^2}{2\sigma} b L \delta \cos^2\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

La pérdida de potencia promedio se obtiene fácilmente puesto que el valor promedio del factor cuadrático cosenoidal es la mitad,

$$P_L = \frac{1}{4\sigma} J_{x0}^2 b L \delta \quad (89)$$

Al comparar (88) y (89) se puede observar que son idénticas. Por lo tanto, la pérdida de potencia promedio en un conductor en el que está presente el efecto piel puede calcularse al suponer que la corriente total está distribuida uniformemente en una profundidad de piel. En términos de resistencia, se puede decir que la resistencia de una placa de una anchura b y una longitud L y profundidad infinitamente pequeña con efecto piel es la misma que la que se presenta en una placa de anchura b , longitud L y profundidad δ sin efecto piel o con una distribución de corriente uniforme.

Esto se puede aplicar a un conductor con sección transversal circular con un pequeño error, siempre y cuando el radio a sea mucho mayor que el efecto piel. La resistencia a una frecuencia alta donde exista un efecto piel bien desarrollado se encuentra, por lo tanto, considerando una placa de anchura igual a la circunferencia $2\pi a$ y profundidad δ . De aquí que,

$$R = \frac{L}{\sigma S} = \frac{L}{2\pi a \sigma \delta} \quad (90)$$

Un alambre de cobre redondo de 1 mm de radio y 1 km de longitud tiene una resistencia a la corriente directa de

$$R_{cd} = \frac{10^3}{\pi 10^{-6} (5.8 \times 10^7)} = 5.48 \, \Omega$$

A una frecuencia de 1 MHz, el efecto piel es de 0.066 mm. Por lo tanto, $\delta \ll a$, y la resistencia a 1 MHz se encuentra con la ecuación (90),

$$R = \frac{10^3}{2\pi 10^{-3} (5.8 \times 10^7) (0.066 \times 10^{-3})} = 41.5 \, \Omega$$

D12.7 Una tubería de acero se construye de un material cuyo $\mu_r = 180$ y $\sigma = 4 \times 10^6$ S/m. Los dos radios son 5 y 7 mm, y la longitud es de 75 m. Si la corriente total $I(t)$ que circula por la tubería es de $8 \cos \omega t$ A, donde $\omega = 1200\pi$ rad/s, encuentrese: a) la profundidad de piel; b) la resistencia efectiva; c) la resistencia en cd; d) la pérdida de potencia promedio.

Respuesta: 0.766 mm; 0.557 Ω ; 0.249 Ω ; 17.82 W

12.5 Polarización de onda

En las secciones precedentes se han estudiado ondas planas uniformes en donde se supone que los vectores de campo eléctrico y magnético se encuentran en direcciones fijas. En particular, en una onda que se propagaba a lo largo del eje z , \mathbf{E} estaba sobre el eje x , lo cual requería entonces que \mathbf{H} estuviera sobre el eje y . Esta relación ortogonal entre \mathbf{E} , \mathbf{H} y \mathbf{S} era siempre válida para una onda plana uniforme. Las direcciones de \mathbf{E} y \mathbf{H} sobre el plano perpendicular a \mathbf{a}_z pueden cambiar, sin embargo, en función del tiempo y la posición lo harán



Animaciones

dependiendo de cómo se generó la onda o en qué tipo de medio se está propagando. Por lo tanto, una descripción completa de una onda electromagnética no solamente incluye parámetros como su longitud de onda, velocidad de fase y potencia, sino que también una especificación de la orientación de sus vectores de campo en un instante determinado. Se define la *polarización de onda* como la orientación del vector campo eléctrico como función del tiempo en un determinado punto en el espacio. Una caracterización más completa de la polarización de una onda incluiría, de hecho, la especificación de la orientación del campo en *todos* los puntos, ya que algunas ondas poseen variaciones en el espacio en su polarización. Es suficiente especificar sólo la dirección del campo eléctrico, puesto que el campo magnético se encuentra con facilidad a partir de \mathbf{E} utilizando las ecuaciones de Maxwell.

En las ondas estudiadas hasta ahora, \mathbf{E} tenía una orientación recta fija en todo momento y para toda posición. Se dice que dicha onda está *polarizada linealmente*. Se ha considerado que \mathbf{E} está sobre el eje x ; sin embargo, el campo puede estar orientado en cualquier dirección fija sobre el plano xy y estar polarizado linealmente. Para el caso de la propagación en la dirección z positiva, la onda tiene, en general, su fasor de campo eléctrico expresado como,

$$\mathbf{E}_s = (E_{x0}\mathbf{a}_x + E_{y0}\mathbf{a}_y)e^{-\alpha z}e^{-j\beta z} \quad (91)$$

donde E_{x0} y E_{y0} son las amplitudes constantes a lo largo de x y y . El campo magnético puede encontrarse con facilidad determinando sus componentes x y y directamente a partir de las de \mathbf{E}_s . En específico, el valor de \mathbf{H}_s para la onda descrita en la ecuación (91) es

$$\mathbf{H}_s = [H_{x0}\mathbf{a}_x + H_{y0}\mathbf{a}_y]e^{-\alpha z}e^{-j\beta z} = \left[-\frac{E_{y0}}{\eta}\mathbf{a}_x + \frac{E_{x0}}{\eta}\mathbf{a}_y\right]e^{-\alpha z}e^{-j\beta z} \quad (92)$$

En la figura 12.4 se dibujan los dos campos y se demuestra el porqué del signo menos en el término que involucra a E_{y0} en la ecuación (92). La dirección del flujo de potencia dado por $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ es, en este caso, en la dirección positiva del eje z . Una componente de \mathbf{E} en

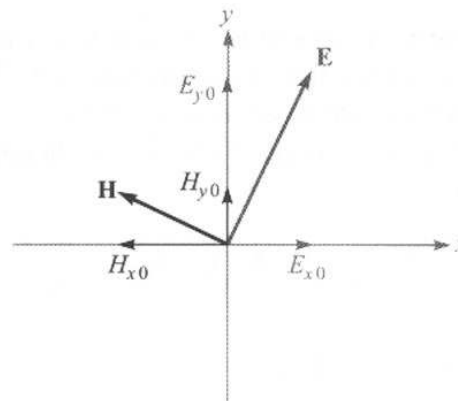


Figura 12.4 Configuración de los campos eléctrico y magnético para una onda general plana polarizada linealmente en la dirección de z hacia delante (hacia fuera de la página). Las componentes del campo corresponden a las de las ecuaciones (91) y (92).

la dirección positiva de y requeriría de una componente de \mathbf{H} en la dirección negativa de x ; por lo tanto, de un signo de menos. Mediante (91) y (92) se puede encontrar la densidad de potencia en la onda utilizando (77):

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{S}_z \rangle &= \frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathbf{E}_s \times \mathbf{H}_s^* \} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ E_{x0} H_{y0}^* (\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y) + E_{y0} H_{x0}^* (\mathbf{a}_y \times \mathbf{a}_x) \} e^{-2\alpha z} \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \frac{E_{x0} E_{x0}^*}{\eta^*} + \frac{E_{y0} E_{y0}^*}{\eta^*} \right\} e^{-2\alpha z} \mathbf{a}_z \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \frac{1}{\eta^*} \right\} (|E_{x0}|^2 + |E_{y0}|^2) e^{-2\alpha z} \mathbf{a}_z \text{ W/m}^2\end{aligned}$$

Este resultado demuestra la idea de que una onda plana polarizada linealmente puede considerarse como dos ondas planas distintas que tienen polarizaciones en x y en y , y cuyos campos eléctricos se combinan *en fase* para generar la componente \mathbf{E} . Lo mismo es válido para las componentes del campo magnético. Éste es un punto crítico en la comprensión de la polarización de la onda, en el sentido de que *cualquier estado de polarización puede describirse en términos de las componentes mutuamente perpendiculares del campo eléctrico y sus fases relativas*.

A continuación se considera el efecto de una diferencia de fase, ϕ , entre E_{x0} y E_{y0} , donde $\phi < \pi/2$. Por simplicidad, se considerará la propagación en un medio sin pérdidas. El campo total en forma fasorial es,

$$\mathbf{E}_s = (E_{x0} \mathbf{a}_x + E_{y0} e^{j\phi} \mathbf{a}_y) e^{-j\beta z} \quad (93)$$

De nuevo, para ayudar a visualizar mejor, conviértase esta onda a la forma instantánea real multiplicando por $e^{j\omega t}$ y tomando la parte real:

$$\mathbf{E}(z, t) = E_{x0} \cos(\omega t - \beta z) \mathbf{a}_x + E_{y0} \cos(\omega t - \beta z + \phi) \mathbf{a}_y \quad (94)$$

donde se ha supuesto que E_{x0} y E_{y0} son reales. Supóngase que $t = 0$, en cuyo caso (94) se convierte en [utilizando $\cos(-x) = \cos(x)$],

$$\mathbf{E}(z, 0) = E_{x0} \cos(\beta z) \mathbf{a}_x + E_{y0} \cos(\beta z - \phi) \mathbf{a}_y \quad (95)$$

Las magnitudes de las componentes de $\mathbf{E}(z, 0)$ están graficadas como funciones de z en la figura 12.5. Puesto que el tiempo se fijó en cero, la onda está congelada en cuanto a su posición. Un observador se puede mover a lo largo del eje z para medir las magnitudes de las componentes y , por lo tanto, la orientación del campo eléctrico total en cada punto. Considérese una cresta de E_x , indicada con el punto a en la figura 12.5. Si ϕ fuera cero, E_y tendría una cresta en el mismo lugar. Puesto que ϕ no es cero (y positivo), la cresta de E_y , que de otra forma ocurriría en el punto a , se desplaza ahora al punto b alejándose de z . Los dos puntos están separados por una distancia ϕ/β . Por lo tanto, E_y se *retrasa* con respecto a E_x cuando se considera la dimensión *espacial*.

Ahora supóngase que el observador se detiene en algún punto sobre el eje z y se deja que el tiempo siga transcurriendo. Ambos campos se mueven ahora en la dirección positiva de z , como lo expresa (94). Sin embargo, el punto b alcanza primero al observador seguido del punto a . Así que se observa que E_y se *adelanta* con respecto a E_x cuando se considera la dimensión *temporal*. En cualquier caso (t fijo y z variable o viceversa), el observador nota que el campo neto gira con respecto al eje z mientras que su magnitud cambia. Considerando como punto de partida a z y a t , en los cuales el campo tiene una orientación y magnitud determinadas,

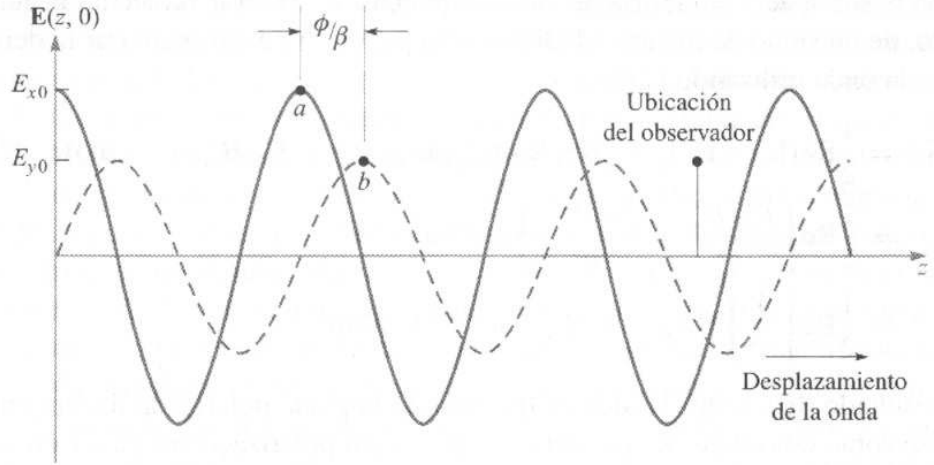


Figura 12.5 Gráficas con las magnitudes de las componentes del campo eléctrico de la ecuación (95) como funciones de z . Nótese que la componente y se retrasa con respecto a la componente x en z . Conforme el tiempo aumenta a partir de cero, ambas ondas viajan a la derecha, como lo describe (94). Por lo tanto, para un observador situado en un punto fijo, la componente y está adelantada en el tiempo.

la onda regresará a la misma orientación y magnitud en una distancia de una longitud de onda en z (para una t fija) o en un tiempo $t = 2\pi/\omega$ después (para una z fija).

Con fines ilustrativos, si se considera la longitud del vector campo como una medida de su magnitud, se encuentra que en una posición fija la punta del vector dibuja la forma de una elipse en el tiempo $t = 2\pi/\omega$. Se dice que la onda está *polarizada elípticamente*. La polarización elíptica es, de hecho, el estado de polarización más general, puesto que abarca cualquier diferencia en magnitud y fase entre E_x y E_y . La polarización lineal es un caso especial de la polarización elíptica en la cual la diferencia de fase es cero.

Otro caso especial de polarización elíptica se presenta cuando $E_{x0} = E_{y0} = E_0$ y cuando $\phi = \pm\pi/2$. En este caso la onda muestra *polarización circular*. Para verla se incluyen estas restricciones en la ecuación (94) y se obtiene,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(z, t) &= E_0[\cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x + \cos(\omega t - \beta z \pm \pi/2)\mathbf{a}_y] \\ &= E_0[\cos(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x \mp \sin(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_y] \end{aligned} \quad (96)$$

Si se considera una posición fija a lo largo del eje z (por ejemplo, $z = 0$) y se hace que varíe el tiempo, (96), con $\phi = \pm\pi/2$, se convierte en,

$$\mathbf{E}(0, t) = E_0[\cos(\omega t)\mathbf{a}_x - \sin(\omega t)\mathbf{a}_y] \quad (97)$$

Si se selecciona $-\pi/2$ en (96), se obtiene,

$$\mathbf{E}(0, t) = E_0[\cos(\omega t)\mathbf{a}_x + \sin(\omega t)\mathbf{a}_y] \quad (98)$$

El vector campo de la ecuación (98) gira en contrasentido al de las manecillas del reloj en el plano xy , mientras que la amplitud E_0 se mantiene constante y, por lo tanto, la punta del vector dibuja un círculo. La figura 12.6 muestra este comportamiento.

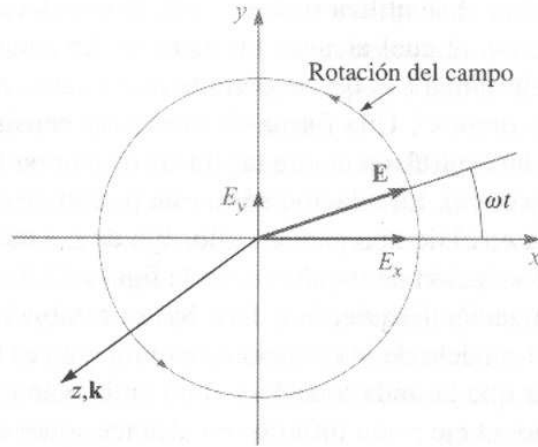


Figura 12.6 Campo eléctrico en el plano xy de una onda plana polarizada circularmente a la derecha, como se describe en (98). Conforme la onda se propaga en la dirección de z hacia delante, el campo vectorial gira en contrasentido al de las manecillas del reloj en el plano xy .

Seleccionando $+\pi/2$ se llega a (97), cuyo vector campo gira en el sentido de las manecillas del reloj. El *sentido (derecha o izquierda)* de la polarización circular está asociado con las direcciones de rotación y propagación de la manera siguiente: la onda muestra *polarización circular izquierda* (l.c.p., *left circular polarization*) si, cuando se dirige la mano izquierda con el dedo pulgar en la dirección de propagación, los dedos se doblan en la dirección de giro del campo con el tiempo. La onda muestra *polarización circular derecha* (r.c.p., *right circular polarization*) si, cuando con el dedo pulgar de la mano derecha en la dirección de propagación, los dedos se doblan en la dirección del giro del campo.⁷ Por lo tanto, en la propagación hacia delante en el eje z , la ecuación (97) describe una onda polarizada circularmente hacia la izquierda, y (98), una onda polarizada circularmente hacia la derecha. La misma convención se aplica a la polarización elíptica, en la que se utilizan las descripciones *polarización elíptica izquierda* y *polarización elíptica derecha*.

La aplicación de (96) permite obtener el ángulo instantáneo del campo con respecto a la dirección x , para cualquier posición sobre el eje z , a través de,

$$\theta(z, t) = \tan^{-1} \left(\frac{E_y}{E_x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\mp \sin(\omega t - \beta z)}{\cos(\omega t - \beta z)} \right) = \mp(\omega t - \beta z) \quad (99)$$

donde, de nuevo, el signo de menos (obteniéndose l.c.p. para la propagación positiva sobre z) se aplica en la selección de $\phi = +\pi/2$ en (96); el signo de más (obteniéndose r.c.p. para

⁷ Algunas personas invierten esta convención (particularmente, en óptica) para destacar la importancia de la configuración espacial del campo. Nótese que el r.c.p. por definición se forma mediante la propagación de un campo espacial que tiene la forma de un sacacorchos de *mano izquierda* y, por esa razón, se le conoce como polarización circular hacia la izquierda (véase figura 12.7). La polarización circular hacia la izquierda, como se definió, resulta de la propagación espacial de un campo en forma de un sacacorchos de *mano derecha*, y es llamada polarización circular hacia la derecha por los partidarios del espacio. Obviamente, es necesario ser precavido en la interpretación de lo que se quiere decir cuando se utiliza el término, dirección de la polarización, en un texto con el cual el lector no está familiarizado.

la propagación positiva sobre z) se utiliza si $\phi = -\pi/2$. Si se selecciona $z = 0$, el ángulo se convierte simplemente en ωt , el cual alcanza un valor de 2π (una vuelta completa) en el tiempo $t = 2\pi/\omega$. Si se selecciona $t = 0$ y se permite que z varíe, se presenta un patrón de campo en forma de “sacacorchos”. Una forma de visualizar consiste en considerar un patrón en forma de escalera en espiral, en el que las líneas de campo (los escalones) sean perpendiculares al eje z (o escalera). La relación entre este patrón de campo en el espacio y el comportamiento resultante en el tiempo para un valor fijo de z , a medida que la onda se propaga, se muestra, en la concepción de un artista, en la figura 12.7.

El sentido de la polarización (izquierda o derecha) se cambia invirtiendo el sentido del patrón del sacacorchos. El modelo de la escalera en espiral sólo es una ayuda para la visualización. Se debe recordar que la onda todavía es una onda plana uniforme cuyos campos en cualquier posición sobre el eje z son infinitos en alcance sobre el plano transversal.

Existen muchas aplicaciones de las ondas polarizadas circularmente. Quizás la ventaja más evidente es que la recepción de una onda con polarización circular no depende de la orientación de la antena en el plano normal a la dirección de propagación. Por ejemplo, las antenas de dipolo requieren orientarlas a lo largo de la dirección del campo eléctrico de la señal que reciban. Si se desean transmitir señales polarizadas circularmente, los requisitos de orientación de la antena receptora se facilitan en forma considerable. En óptica, la luz

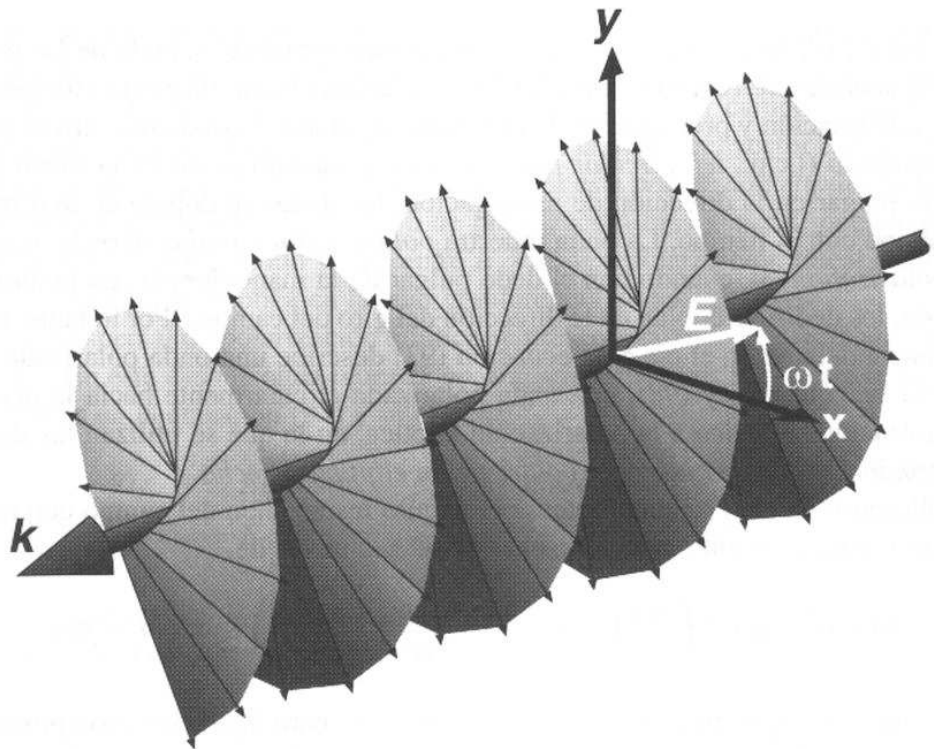


Figura 12.7 Representación de una onda polarizada circularmente a la derecha. El vector del campo eléctrico (en color blanco) girará hacia el eje y conforme la onda se mueva en el plano xy en la dirección de k . Este giro en contrasentido al de las manecillas del reloj (cuando se observa hacia la fuente de la onda), satisface la convención de rotación temporal de mano derecha como se describió en el texto. Sin embargo, la onda parece como si fuera un sacacorchos de mano izquierda y, por esta razón, se le llama polarización circular izquierda en la otra convención.

polarizada circularmente puede pasarse a través de un polarizador de cualquier orientación (aunque, de esta forma, uno pierde la mitad de la potencia). Otros usos incluyen el tratamiento de luz polarizada linealmente como una superposición de ondas polarizadas circularmente, las cuales se describirán a continuación.

Es posible generar luz polarizada circularmente utilizando un medio *anisotrópico*, un material cuya permitividad esté en función de la dirección del campo eléctrico. Muchos cristales poseen esta propiedad. La orientación de un cristal puede encontrarse de tal forma que a lo largo de una dirección (digamos, el eje x) la permitividad es menor, mientras que a lo largo de una dirección ortogonal (el eje y) la permitividad es mayor. La estrategia consiste en inyectar una onda polarizada linealmente con su vector campo a 45 grados con respecto a los ejes x y y del cristal. Por lo tanto, la onda tendrá componentes x y y con igual amplitud en el cristal y que se propagarán en la dirección z a velocidades diferentes. A medida que se propagan, entre las componentes se acumula una diferencia de fase (o *retardo*), la cual puede alcanzar un valor de $\pi/2$ si el cristal es lo suficientemente grande. Por lo tanto, la onda a la salida está polarizada circularmente. Dicho cristal, cortado a la medida correcta y utilizado de esta forma, se llama *placa de un cuarto de onda*, puesto que introduce un corrimiento de fase relativo de $\pi/2$ entre E_x y E_y , el cual equivale a $\lambda/4$.

Es útil expresar ondas polarizadas circularmente en forma fasorial. Para llevar a cabo esto, nótese que (96) puede expresarse como,

$$\mathbf{E}(z, t) = \text{Re}\{E_0 e^{j\omega t} e^{-j\beta z} [\mathbf{a}_x + e^{\pm j\pi/2} \mathbf{a}_y]\}$$

Utilizando el hecho de que $e^{\pm j\delta/2} = \pm j$, se identifica la forma fasorial como:

$$\mathbf{E}_s = E_0(\mathbf{a}_x \pm j\mathbf{a}_y)e^{-j\beta z} \quad (100)$$

en donde el signo más se utiliza para la polarización circular izquierda, y el signo menos, para la polarización circular derecha. Si la onda se propaga en la dirección negativa de z , se tiene,

$$\mathbf{E}_s = E_0(\mathbf{a}_x \pm j\mathbf{a}_y)e^{+j\beta z} \quad (101)$$

en donde, en este caso, el signo positivo se aplica a la polarización circular derecha, y el signo menos, a la polarización circular izquierda. Se invita al lector a comprobarlo.

EJEMPLO 12.7

Considérese el resultado de sobreponer dos campos con la misma amplitud, frecuencia y dirección de propagación, polarizados circularmente a la izquierda y a la derecha, pero con un corrimiento de fase de δ radianes entre ambos.

Solución. Considerando que ambas ondas se propagan en la dirección $+z$ e introduciendo una fase relativa, δ , se calcula el campo fasorial total utilizando (100):

$$\mathbf{E}_{sT} = \mathbf{E}_{sR} + \mathbf{E}_{sL} = E_0[\mathbf{a}_x - j\mathbf{a}_y]e^{-j\beta z} + E_0[\mathbf{a}_x + j\mathbf{a}_y]e^{-j\beta z}e^{j\delta}$$

Agrupando las componentes similares, se obtiene

$$\mathbf{E}_{sT} = E_0[(1 + e^{j\delta})\mathbf{a}_x - j(1 - e^{j\delta})\mathbf{a}_y]e^{-j\beta z}$$

Factorizando el término fasorial, $e^{j\delta/2}$, se obtiene

$$\mathbf{E}_{sT} = E_0 e^{j\delta/2} [(e^{-j\delta/2} + e^{j\delta/2})\mathbf{a}_x - j(e^{-j\delta/2} - e^{j\delta/2})\mathbf{a}_y] e^{-j\beta z}$$

Aplicando la identidad de Euler, se puede ver que $e^{j\delta/2} + e^{-j\delta/2} = 2 \cos \delta/2$ y $e^{j\delta/2} - e^{-j\delta/2} = 2j \sin \delta/2$. Utilizando estas relaciones se obtiene,

$$\mathbf{E}_{sT} = 2E_0[\cos(\delta/2)\mathbf{a}_x + \sin(\delta/2)\mathbf{a}_y]e^{-j(\beta z - \delta/2)} \quad (102)$$

Se puede reconocer la ecuación (102) como el campo eléctrico de una onda *polarizada linealmente*, cuyo vector de campo está orientado a un ángulo $\delta/2$ con respecto al eje x .

El ejemplo 12.7 muestra que cualquier onda polarizada linealmente puede expresarse como la suma de dos ondas polarizadas circularmente en sentido opuesto, donde la dirección de polarización lineal la determina la diferencia de fase relativa entre ambas ondas. Dicha representación es conveniente (y necesaria) cuando se considera, por ejemplo, la propagación de luz polarizada linealmente a través de un medio que contiene moléculas orgánicas. A menudo, éstas presentan estructuras en espiral que tiene una inclinación en sentido izquierdo o derecho y que, por lo tanto, interactúan de manera diferente con polarización circular derecha o izquierda. Como resultado, la componente circular izquierda puede propagarse a una velocidad diferente que la componente circular derecha, por lo que las dos ondas acumularán una diferencia en fase a medida que se propaguen. En consecuencia, la dirección de un vector campo polarizado linealmente a la salida del material será diferente con respecto a la dirección que tenía a la entrada. El grado de esta rotación puede utilizarse como una herramienta de medida en el estudio de diferentes materiales.

Los asuntos relacionados con la polarización serán de gran importancia cuando se considere la reflexión de ondas en el capítulo 13.

Lecturas complementarias

1. Balanis, C. A., *Advanced Engineering Electromagnetics*, Nueva York, John Wiley & Sons, 1989.
2. International Telephone and Telegraph Co., Inc., *Reference Data for Radio Engineers*, 7a. ed., Indianapolis, Ind., Howard W. Sams & Co., 1985. Este manual contiene algunos datos excelentes acerca de las propiedades de los materiales dieléctricos y aislantes.
3. Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics*, 3a. ed., Nueva York, John Wiley & Sons, 1999.
4. Ramo, S., J. R. Whinnery y T. Van Duzer, *Fields and Waves in Communication Electronics*, 3a. ed., Nueva York, John Wiley & Sons, 1994.

Problemas

- 12.1 Demuestre que $E_{xs} = Ae^{j(k_0z + \phi)}$ es una solución de la ecuación vectorial de Helmholtz, ecuación (30), para $k_0 = \omega\mu_0\epsilon_0$ y cualquier valor de ϕ y A .
- 12.2 Una onda plana uniforme de 100 MHz se propaga en un medio sin pérdidas para el cual $\epsilon_r = 5$ y $\mu_r = 1$. Encuentre: a) v_p ; b) β ; c) λ ; d) \mathbf{E}_s ; e) \mathbf{H}_s ; f) $\langle \mathbf{S} \rangle$.
- 12.3 Un campo \mathbf{H} en el espacio libre está dado por $\mathcal{H}(x, t) = 10 \cos(10^8t - \beta x)\mathbf{a}_y$ A/m. Encuentre: a) β ; b) λ ; c) $\epsilon(x, t)$ en $P(0.1, 0.2, 0.3)$ en $t = 1$ ns.
- 12.4 Dados $\mathcal{E}(z, t) = E_0e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z)\mathbf{a}_x$ y $\eta = |\eta| e^{j\phi}$, encuentre: a) \mathbf{E}_s ; b) \mathbf{H}_s ; c) $\langle \mathbf{S} \rangle$.



Exámenes

- 12.5** Una onda plana uniforme de 150 MHz en el espacio libre está descrita por $\mathbf{H}_s = (4 + j10)(2\mathbf{a}_x + j\mathbf{a}_y) e^{-j\beta z}$ A/m. a) Encuentre los valores numéricos de ω , λ y β . b) Encuentre $H(z, t)$ en $t = 1.5$ ns, $z = 20$ cm. c) ¿Qué es $|E|_{\text{máx}}$?
- 12.6** Una onda plana polarizada linealmente en el espacio libre tiene un campo eléctrico dado por $\mathcal{E}(z, t) = (25\mathbf{a}_x - 30\mathbf{a}_z) \cos(\omega t - 50y)$ V/m. Encuentre: a) ω ; b) \mathbf{E}_s ; c) \mathbf{H}_s ; d) $\langle \mathbf{S} \rangle$.
- 12.7** La intensidad del campo magnético fasorial de una onda plana uniforme de 400 MHz que se propaga en un cierto material sin pérdidas es $(2\mathbf{a}_y - j5\mathbf{a}_z) e^{-j25x}$ A/m. Sabiendo que la amplitud máxima de \mathbf{E} es 1500 V/m, encuentre β , η , λ , v_p , ϵ_r , μ_r y $\mathcal{H}(x, y, z, t)$.
- 12.8** Permita que los campos $\mathcal{E}(z, t) = 1800 \cos(10^7\pi t - \beta z)\mathbf{a}_x$ V/m y $H(z, t) = 3.8 \cos(10^7\pi t - \beta z)\mathbf{a}_y$ A/m representen una onda plana uniforme que se propaga a una velocidad de 1.4×10^8 m/s en un dieléctrico perfecto. Encuentre: a) β ; b) λ ; c) η ; d) μ_r ; e) ϵ_r .
- 12.9** Un cierto material sin pérdidas tiene una $\mu_r = 4$ y $\epsilon_r = 9$. Una onda plana uniforme de 10 MHz se propaga en la dirección \mathbf{a}_y con $E_{x0} = 400$ V/m y $E_{y0} = E_{z0} = 0$ en $P(0.6, 0.6, 0.6)$ en $t = 60$ ns. a) Encuentre β , λ , v_p y η . b) Encuentre $E(t)$. c) Encuentre $H(t)$.
- 12.10** En un medio caracterizado por una impedancia intrínseca $\eta = |\eta| e^{j\phi}$, se propaga una onda plana polarizada linealmente con un campo magnético dado por $\mathbf{H}_s = (H_{0y}\mathbf{a}_y + H_{0z}\mathbf{a}_z) e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$. Encuentre: a) \mathbf{E}_s ; b) $\epsilon(x, t)$; c) $\mathcal{H}(x, t)$; d) $\langle \mathbf{S} \rangle$.
- 12.11** Una onda plana uniforme de 2 GHz tiene una amplitud $E_{y0} = 1.4$ kV/m en $(0, 0, 0, t = 0)$ y se propaga en la dirección \mathbf{a}_z en un medio en el que $\epsilon'' = 1.6 \times 10^{-11}$ F/m, $\epsilon' = 3.0 \times 10^{-11}$ F/m y $\mu = 2.5$ μ H/m. Encuentre: a) E_y en $P(0, 0, 1.8$ cm) en 0.2 ns; b) H_x en P en 0.2 ns.
- 12.12** La onda plana $\mathbf{E}_s = 300 e^{-jkx} \mathbf{a}_y$ V/m se propaga en un material cuyo $\mu = 2.25$ μ H/m, $\epsilon' = 9$ pF/m y $\epsilon'' = 7.8$ pF/m. Si $\omega = 64$ Mrad/s, encuentre: a) α ; b) β ; c) v_p ; d) λ ; e) η ; f) \mathbf{H}_s ; g) $\mathcal{E}(3, 2, 4, 10$ ns).
- 12.13** Una onda plana uniforme que se propaga en la dirección \mathbf{a}_z tiene $jk = 0.2 + j1.5$ m $^{-1}$ y $\eta = 450 + j60$ Ω . Si $\omega = 300$ Mrad/s, encuentre μ , ϵ' y ϵ'' para el medio.
- 12.14** Un cierto material no magnético tiene como constantes $\epsilon'_r = 2$ y $\epsilon''/\epsilon' = 4 \times 10^{-4}$ a una $\omega = 1.5$ Grad/s. Encuentre la distancia a la que una onda plana uniforme pueda propagarse a través de este material antes de que: a) sea atenuada 1 Np; b) el nivel de su potencia se reduzca a la mitad; c) la fase se corra 360°.
- 12.15** Una señal de radar de 10 GHz puede representarse como una onda plana uniforme en una región lo suficientemente pequeña. Calcule la longitud de onda en centímetros y la atenuación en nepers por metro si la onda se propaga en un material no magnético cuyos valores son: a) $\epsilon'_r = 1$ y $\epsilon''_r = 0$; b) $\epsilon'_r = 1.04$ y $\epsilon''_r = 9.00 \times 10^{-4}$; c) $\epsilon'_r = 2.5$ y $\epsilon''_r = 7.2$.
- 12.16** El factor de potencia de un capacitor está definido como el coseno del ángulo de fase de la impedancia y su Q es ωCR , donde R es la resistencia en paralelo. Suponga un capacitor ideal de placas paralelas que tiene un dieléctrico caracterizado por σ , ϵ' y μ_r . Encuentre el factor de potencia y Q en términos de la tangente de pérdidas.

- 12.17** Una onda plana uniforme que se propaga en la dirección \mathbf{a}_z en un dieléctrico que tiene una conductividad finita tiene los valores $\eta = 250 + j30 \, \Omega$ y $jk = 0.2 + j2 \text{ m}^{-1}$. Si $|E_s| = 400 \text{ V/m}$ en $z = 0$, encuentre: a) $\langle \mathbf{S} \rangle$ en $z = 0$ y $z = 60 \text{ cm}$; b) la disipación de potencia óhmica promedio en watts por metro cúbico en $z = 60 \text{ cm}$.
- 12.18** Dados: una onda plana uniforme de 100 MHz en un medio del que se sabe que es un buen dieléctrico. El campo eléctrico fasorial es $\mathbf{E}_s = 4 e^{-0.5z} e^{-j20z} \mathbf{a}_x \text{ V/m}$. Determine: a) η ; b) μ_r ; c) ϵ_r ; d) \mathbf{H}_s ; e) $\langle \mathbf{S} \rangle$; f) la potencia en watts que incide en una superficie rectangular que mide $20 \times 30 \text{ m}$ en $z = 1 \text{ km}$.
- 12.19** Dos cilindros perfectamente conductores de radios 8 y 20 mm son coaxiales. La región entre los cilindros está llena de un dieléctrico perfecto para el que $\epsilon = 10^{-9}/4\pi \text{ F/m}$ y $\mu_r = 1$. Si el valor de \mathbf{E} en la región es de $(500/\rho) \cos(\omega t - 4z) \mathbf{a}_\rho \text{ V/m}$, encuentre: a) ω , en coordenadas cilíndricas, con la ayuda de las ecuaciones de Maxwell; b) $\mathcal{H}(\rho, z, t)$; c) $\langle \mathbf{S}(\rho, z, t) \rangle$; d) la potencia promedio que pasa a través de la sección transversal $8 < \rho < 20 \text{ mm}$, $0 < \phi < 2\pi$.
- 12.20** Si $\mathbf{E}_s = 60 \frac{\sin \theta}{r} e^{-j2r} \mathbf{a}_\theta \text{ V/m}$ y $\mathbf{H}_s = \frac{\sin \theta}{4\pi r} e^{-j2r} \mathbf{a}_\phi \text{ A/m}$ en el espacio libre, encuentre la potencia promedio que pasa hacia fuera a través de la superficie $r = 10^6$, $0 < \theta < \pi/3$, $0 < \phi < 2\pi$.
- 12.21** Un cascarón cilíndrico de $1 \text{ cm} < \rho < 1.2 \text{ cm}$ está compuesto de un material conductor para el que $\sigma = 10^6 \text{ S/m}$. Las regiones internas y externas no son conductoras. Sea $H_\phi = 2000 \text{ A/m}$ en $\rho = 1.2 \text{ cm}$. a) Encuentre \mathbf{H} en cualquier punto. b) Encuentre \mathbf{E} en cualquier punto. c) Encuentre $\langle \mathbf{S} \rangle$ en cualquier punto.
- 12.22** Las dimensiones interiores y exteriores de una línea de transmisión coaxial de cobre son 2 y 7 mm , respectivamente. Ambos conductores tienen un grosor mucho mayor que δ . El dieléctrico no tiene pérdidas y la frecuencia de operación es de 400 MHz . Calcule la resistencia por metro de largo del: a) conductor interior; b) el conductor exterior; c) la línea de transmisión.
- 12.23** Un conductor tubular hueco está construido de latón y tiene una conductividad de $1.2 \times 10^7 \text{ S/m}$. Los radios interior y exterior son de 9 y 10 mm , respectivamente. Calcule la resistencia por metro de longitud a una frecuencia de: a) cd ; b) 20 MHz ; c) 2 GHz .
- 12.24** a) La mayoría de los hornos de microondas trabaja a 2.45 GHz . Suponga que $\sigma = 1.2 \times 10^6 \text{ S/m}$ y $\mu_r = 500$ para el acero inoxidable del interior del horno y encuentre la profundidad de penetración. b) En la superficie del conductor, $E_s = 50 \angle 0^\circ \text{ V/m}$; grafique una curva de la amplitud de E_s versus el ángulo de E_s a medida que el campo se propaga a través del acero inoxidable.
- 12.25** Un buen conductor tiene forma plana y transporta una onda plana uniforme que tiene una longitud de onda de 0.3 mm y una velocidad de $3 \times 10^5 \text{ m/s}$. Suponiendo que el conductor no es magnético, determine su frecuencia y conductividad.
- 12.26** Las dimensiones de una cierta línea de transmisión coaxial son $a = 0.8 \text{ mm}$ y $b = 4 \text{ mm}$. El grosor del conductor exterior es de 0.6 mm , y todos los conductores tienen $\sigma = 1.6 \times 10^7 \text{ S/m}$. a) Encuentre R , la resistencia por unidad de longitud a una frecuencia de operación de 2.4 GHz . b) Utilice la información de las secciones 6.4 y 9.10 para encontrar C y L , la capacitancia e inductancia por unidad de longitud, respectivamente. El coaxial está lleno de aire. c) Encuentre α y β si $\alpha + j\beta = \sqrt{j\omega C(R + j\omega L)}$.

- 12.27** La superficie plana $z = 0$ forma una interfase de latón y teflón. Utilice los datos disponibles en el apéndice C para evaluar las relaciones siguientes para una onda plana uniforme que tiene una $\omega = 4 \times 10^{10}$ rad/s; (a) $\alpha_{\text{tef}}/\alpha_{\text{lat}}$; (b) $\lambda_{\text{tef}}/\lambda_{\text{lat}}$; (c) $v_{\text{tef}}/v_{\text{lat}}$.
- 12.28** Una onda plana uniforme en el espacio libre tiene el vector de campo eléctrico dado por $\mathbf{E}_s = 10e^{-j\beta x}\mathbf{a}_z + 15e^{-j\beta x}\mathbf{a}_y$ V/m. a) Describa la polarización de la onda; b) encuentre \mathbf{H}_s ; c) determine la densidad de potencia promedio en la onda en W/m².
- 12.29** Considere una onda con polarización circular izquierda en el espacio libre que se propaga en la dirección z hacia delante. El campo eléctrico lo da la ecuación (100). a) Determine el fasor de campo magnético, \mathbf{H}_s ; b) determine una expresión para la densidad de potencia promedio en la onda en W/m² a través de la aplicación directa de (77).
- 12.30** El campo eléctrico de una onda plana uniforme en el espacio libre está dado por $\mathbf{E}_s = 100(\mathbf{a}_z + j\mathbf{a}_x)e^{-j50y}$. Determine: a) f ; b) \mathbf{H}_s ; c) $\langle \mathbf{S} \rangle$. d) Describa la polarización de la onda.
- 12.31** Una onda plana uniforme polarizada linealmente que se propaga en la dirección z hacia delante, ingresa en un material *anisotrópico* sin pérdidas, en el que la constante dieléctrica que las ondas polarizadas encuentran a lo largo de y (ϵ_{ry}) difiere de las ondas polarizadas que se ven a lo largo de x (ϵ_{rx}). Suponga $\epsilon_{rx} = 2.15$, $\epsilon_{ry} = 2.10$ y el campo eléctrico de la onda a la entrada está polarizado a 45° con respecto a los ejes x y y positivos. a) Determine, en términos de la longitud de onda en el espacio libre, λ , la longitud más corta del material tal que la onda, a medida que aparece en la salida, esté polarizada circularmente. b) ¿La onda de salida estará polarizada a la derecha o a la izquierda?
- 12.32** Suponga que la longitud del medio del problema 12.31 es del doble de la que se determina en él. Describa la polarización de la onda de salida en este caso.
- 12.33** Dada una onda para la cual $\mathbf{E}_s = 15e^{-j\beta z}\mathbf{a}_x + 18e^{-j\beta z}e^{j\phi}\mathbf{a}_y$ V/m en un medio caracterizado por una impedancia intrínseca compleja, η : a) Encuentre \mathbf{H}_s ; b) determine la densidad de potencia promedio en W/m².
- 12.34** Dada la onda general polarizada elípticamente de la ecuación (93):

$$\mathbf{E}_s = [E_{x0}\mathbf{a}_x + E_{y0}e^{j\phi}\mathbf{a}_y]e^{-j\beta z}$$

a) Demuestre, utilizando métodos similares a los del ejemplo 12.7, que una onda polarizada linealmente resulta de sobreponer el campo dado y un campo con fase corrida de la forma:

$$\mathbf{E}_s = [E_{x0}\mathbf{a}_x + E_{y0}e^{-j\phi}\mathbf{a}_y]e^{-j\beta z}e^{j\delta}$$

en donde δ es una constante. b) Encuentre δ en términos de ϕ tal que la onda resultante esté polarizada linealmente a lo largo del eje x .