



Université de M'sila		<div></div> <div>Examen final</div>	Faculté : Maths-informatique
L 2 Mathématiques			Année : 2022/2023
Module Analyse 4			Durée : 1h –30m
Barème	<div><div>Exercice : 1</div><div>5pt</div></div> <p>Soit <math>f</math> la fonction définie sur <math>\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\}</math> par : <math>f(x, y) = \frac{y^3}{(x - 1)^2 + y^2}</math></p> <div><div>3</div><div>1</div><div>Montrer que <math>f</math> est prolongeable par continuité au point <math>(1, 0)</math>.</div></div> <div><div>2</div><div>2</div><div>Déterminer <math>\tilde{f}</math> le prolongement de <math>f</math> au point <math>(1, 0)</math>.</div></div>		
Barème	<div><div>Exercice : 2</div><div>8pt</div></div> <p>Soit <math>f</math> la fonction définie sur <math>\mathbb{R}^2</math> par : <math>f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2} &amp; : (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 &amp; : (x, y) = (0, 0) \end{cases}</math></p> <div><div>2</div><div>1</div><div>Montrer que <math>f</math> est continue sur <math>\mathbb{R}^2</math>.</div></div> <div><div>3</div><div>2</div><div>Étudier la dérivabilité de <math>f</math> sur <math>\mathbb{R}^2</math>, puis calculer <math>\nabla f(x, y)</math>.</div></div> <div><div>2</div><div>3</div><div>La fonction <math>f</math> est-elle de classe <math>C^1</math> en point <math>(0, 0)</math>.</div></div> <div><div>1</div><div>4</div><div>Que peut-on conclure sur la différentiabilité de la fonction <math>f</math> en point <math>(0, 0)</math>.</div></div>		
Barème	<div><div>Exercice : 3</div><div>7pt</div></div> <p>On définit la fonction <math>f</math> sur <math>\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}</math>, par : <math>f(x, y) = y^3 + xy \ln x</math>.</p> <div><div>3</div><div>1</div><div>Trouver les points critiques de <math>f</math>.</div></div> <div><div>3</div><div>2</div><div>Établir leur nature (extremum local, point selle ...).</div></div> <div><div>1</div><div>3</div><div>Montrer que le minimum local obtenu n'est pas un minimum global pour <math>f</math>.</div></div>		
Fin	22 mai 2023		Bon chance

Université de M'sila			Faculté : Maths-informatique
L 2 Mathématiques			Année : 2022/2023
Module Analyse 4			Durée : 1h –30m
		Correction d'examen final	
Barème	<div>Correction d'exercice : 1</div> <div>5pt</div> <p>1 Soit <math>f</math> la fonction définie sur <math>\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\}</math> par : <math>f(x, y) = \frac{y^3}{(x - 1)^2 + y^2}</math></p> <p>0.5 a <math>f</math> est prolongeable par continuité au point <math>(1, 0)</math> ssi <math>\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x, y)</math> existe</p> <p>0.5 b On remarque que <math>f</math> est continue sur <math>\mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\}</math> car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.</p> <p>0.5 c Pour <math>(x, y) = (1, 0)</math>, on utilisant les coordonnées polaires, posons</p> $\begin{cases} x = 1 + r \cos \theta, & \text{où } r > 0 \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[. \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ <p>1 On trouve, <math> f(x, y)  =  f(1 + r \cos \theta, r \sin \theta)  =  r \sin^3 \theta  \leq r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0</math> et finalement,</p> <p>0.5 <math>\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x, y) = 0.</math></p> <p>2 = 1 + 1 2 Donc, <math>f</math> est prolongeable par continuité au point <math>(1, 0)</math> et sa prolongement <math>\tilde{f}</math> continue sur <math>\mathbb{R}^2</math> définie par : <math>\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{(x - 1)^2 + y^2} &amp; : (x, y) \neq (1, 0) \\ 0 &amp; : (x, y) = (1, 0) \end{cases}</math></p>		
Barème	<div>Correction d'exercice : 2</div> <div>8pt</div> <p>Soit <math>f</math> la fonction définie sur <math>\mathbb{R}^2</math> par : <math>f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y^2}{x^2 + y^2} &amp; : (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 &amp; : (x, y) = (0, 0) \end{cases}</math></p> <p>1 Montrons que <math>f</math> est continue sur <math>\mathbb{R}^2</math>.</p> <p>0.5 a Si <math>(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}</math>, on a <math>f</math> est continue, car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas,(i.e, <math>f</math> est fractionnelle).</p> <p>b Pour <math>(x, y) = (0, 0)</math>, on utilisant les coordonnées polaires, posons, donc</p> $\begin{cases} x = r \cos \theta, & \text{où } r > 0 \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[. \\ y = r \sin \theta \end{cases}$ <p>0.5 On aura donc, <math> f(x, y)  =  f(r \cos \theta, r \sin \theta)  =  r^3 \cos^3 \theta \sin^2 \theta  \leq r^3 \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 .</math></p> <p>0.5 C'est à dire, <math>\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0.</math></p> <p>0.5 c D'où la continuité de <math>f</math> sur <math>\mathbb{R}^2</math>.</p> <p>0.5 2 a La fonction <math>f</math> est clairement dérivable dans <math>\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}</math>, car quotient de fonctions</p>		

Université de M'sila		Faculté : Maths-informatique
L 2 Mathématiques		Année : 2022/2023
Module Analyse 4		Durée : 1h – 30m

**Correction d'examen final**

dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

1 Pour  $(x, y) \neq (0, 0)$ , on a  $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^2 y^2 (x^2 + 3y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{5x^5 y}{(x^2 + y^2)^2} \end{pmatrix}$ .

1 (b) Si  $(x, y) = (0, 0)$ , on a :

$$\nabla f(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} \\ \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) C'est à dire,  $\nabla f(x, y) = \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\vec{j}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)\vec{j}, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

0.5  $= \begin{cases} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} ((yx^2 + 3y^2)\vec{i} + 5x^3\vec{j}), & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0\vec{i} + 0\vec{j} = \vec{0}, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

0.5 (3) (a) On a déjà vérifié que la fonction  $f$  est dérivable en point  $(0, 0)$ .

(b) Vérifions si ses dérivées partielles sont continues en point  $(0, 0)$ . Alors, on a :

0.5  $|\partial_x f(x, y)| = \left| \frac{r^6 \cos^2 \theta \sin^2 \theta (\cos^2 \theta + 3 \sin^2 \theta)}{r^4} \right| \leq 4r^2 \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 = \partial_x f(0, 0).$

0.5  $|\partial_y f(x, y)| = \left| \frac{2r^6 \cos^5 \theta \sin \theta}{r^4} \right| \leq 2r^2 \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 = \partial_y f(0, 0).$

0.5 (c) D'où la fonction  $f$  est de classe  $C^1$  en point  $(0, 0)$ .

(4) D'après question précédente la fonction  $f$  est de classe  $C^1$  en point  $(0, 0)$ . Alors, on conclut

0.5 que  $f$  est différentiable en point  $(0, 0)$ . Donc, on a :

0.5  $\forall (x, y) \in \mathbb{R} : df_{(0,0)}(x, y) = \partial_x f(0, 0)x + \partial_y f(0, 0)y = 0.$

Barème

**Correction d'exercice : 3**


7pt

$f$  définie sur  $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ , par :  $f(x, y) = y^3 + xy \ln x$

1 (1) (a) Les points critiques de  $f$ . On a :  $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} y + y \ln x \\ 2y + x \ln x \end{pmatrix}$

1 (b) Alors,  $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} y(1 + \ln x) = 0 \\ 3y^2 + x \ln x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \vee x = e^{-1} \\ 3y^2 + x \ln x = 0 \end{cases} \Rightarrow$

1  $\begin{cases} (x = 1 \wedge y = 0) \\ \vee (x = e^{-1} \wedge y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}}) \end{cases} \Rightarrow (x, y) \in \left\{ (1, 0), (e^{-1}, \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}}), (e^{-1}, -\frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}}) \right\}$

Université de M'sila			Faculté : Maths-informatique	
L 2 Mathématiques			Année : 2022/2023	
Module Analyse 4			Durée : 1h – 30m	
		Correction d'examen final		
	<div>2 Nature des points critiques :</div> <div>0.5<div>a</div><math display="block">H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &amp; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &amp; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y}{x} &amp; 1 + \ln x \\ 1 + \ln x &amp; 6y \end{pmatrix}</math></div> <div>0.5<div>b</div>Pour le point <math>(1, 0)</math> on trouve : <math> H_f(1, 0)  = \begin{vmatrix} 0 &amp; 1 \\ 1 &amp; 0 \end{vmatrix} = -1 &lt; 0</math>.</div> <div>Donc, le point <math>(1, 0)</math> est un point selle.</div> <div>1<div>c</div>Pour le point <math>(e^{-1}, \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}})</math> on a :</div> <div><math display="block"> H_f(e^{-1}, \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}})  = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{3}{2}} &amp; 0 \\ 0 &amp; 2\sqrt{3}e^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = 2e^{-2} &gt; 0</math></div> <div>0.5Comme <math>\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(e^{-1}, \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}}) = \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{3}{2}} &gt; 0</math>, alors le point <math>(e^{-1}, \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}})</math> est un minimum local.</div> <div>0.5<div>d</div>Si <math>(x, y) = (e^{-1}, -\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}})</math>, on trouve :</div> <div><math display="block"> H_f(e^{-1}, -\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}})  = \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{3}{2}} &amp; 0 \\ 0 &amp; -2\sqrt{3}e^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = 2e^{-2} &gt; 0</math></div> <div>0.5Comme <math>\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(e^{-1}, -\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{3}{2}} &lt; 0</math>, alors le point <math>(e^{-1}, -\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}})</math> est un maximum local.</div> <div>0.5<div>3</div>On remarque que <math>f(e^2, -\frac{1}{2}e) = -\frac{9}{8}e^3 &lt; -\frac{2}{3\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}}} = f(e^{-1}, \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}})</math>. Donc, <math>(e^{-1}, \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}})</math> est un minimum local n'est pas un minimum global pour <math>f</math>.</div>			
<div>Remarque</div> <div>Pour démontrer la question 3, on peut poser <math>y = -x</math> où <math>x &gt; 0</math>, on aura, donc, <math display="block">\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, -x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-x^3 - x^2 \ln x] = -\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 [1 + \frac{\ln x}{x}] = -\infty &lt; f(e^{-1}, \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}}).</math></div>				
Fin	Dr : D. Bouafia		★ 25 mai 2023★	