E LÍP

1)Định nghĩa : Tập hợp các điểm M của mặt phẳng sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$ (2a không đổi và $a > c > 0$) là một đường elíp.

* F_1,F_2: cố định là hai tiêu điểm và F_1F_2=2c là tiêu cự của elíp.
* MF_1, MF_2: là các bán kính qua tiêu.

2) Phương trình chính tắc của elíp: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ với $b^2 = a^2 - c^2$.

Vậy điểm $M(x_0; y_0) \in (E) \Leftrightarrow \dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$ và $|x_0| \le a$; $|y_0| \le b$.

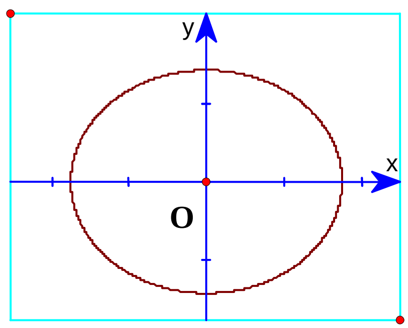
3) Tính chất và hình dạng của elíp:

*Trục đối xứng Ox (chứa trục lớn); Oy (chứa trục bé).Tâm đối xứng O.

*Đỉnh: $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$ và $B_2(0;\ b)$. Độ dài trục lớn: 2a và độ dài trục bé :2b.

*Tiêu điểm: F_1(–c; 0), F_2(c; 0).

*Nội tiếp trong hình chữ nhật cơ sở PQRS có kích thước 2a và 2b với $b^2 = a^2 - c^2$.



* Tâm sai: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1$

* Hai đường chuẩn: $x = \pm\dfrac{a}{e} = \pm\dfrac{a^2}{c}$

* $M(x_0; y_0) \in (E)$: $MF_1 = a + ex_0$ và $MF_2 = a - ex_0$

4) Tiếp tuyến của elíp (E): $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$:

* Tại $M_0(x_0; y_0) \in (E)$ có phương trình: $\dfrac{x_0x}{a^2} + \dfrac{y_0y}{b^2} = 1$

* Đi qua $M(x_1; y_1)$ là Δ: $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$ với điều kiện:

Δ tiếp xúc $(E) \Leftrightarrow A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$ với $A^2 + B^2 \ne 0, C = -(Ax_1 + By_1) \ne 0$.

CÁC VÍ DỤ

Ví dụ1: Cho (E): $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

1) Xác định tiêu điểm,tiêu cự,độ dài trục lớn,trục bé của (E).

2) Viết phương trình tiếp tuyến của (E) tại $M(\frac{3}{2};\sqrt{3})$

3) Viết phương trình tiếp tuyến của (E) vuông góc với đường thẳng $2x-3y+1=0$.

4) Viết phương trình tiếp tuyến của (E) đi qua $M(3;3)$.

Giải:

1) $\begin{cases} a^2=9 \\ b^2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$ $,c^2=a^2-b^2=5 \Rightarrow c=\sqrt{5}$

Từ đó suy ra: Trục lớn : $A_1A_2=2a=6$;Trục bé: $B_1B_2=2b=4$;

Tiêu điểm : $F_1\left(-\sqrt{5};0\right),F_2\left(\sqrt{5};0\right)$; Tiêu cự : $F_1F_2=2c=2\sqrt{5}$

2) Tiếp tuyến của (E) tại $M(\frac{3}{2};\sqrt{3})$: $\frac{x}{6}+\frac{\sqrt{3}y}{4}=1 \Leftrightarrow 2x+3\sqrt{3}y-12=0$

3) Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $2x-3y+1=0$ nên phương trình có dạng $3x+2y+C=0$.

Điều kiện tiếp xúc $A^2a^2+B^2b^2=C^2 \Leftrightarrow 81+16=C^2 \Leftrightarrow C=\pm\sqrt{97}$

Vậy tiếp tuyến cần tìm có phương trình: $3x+2y\pm\sqrt{97}=0$.

4) ***Cách 1:*** Phương trình tiếp tuyến có dạng:

$$A(x-3)+B(y-3)=0 \Leftrightarrow Ax+By-3A-3B=0$$

Điều kiện tiếp xúc: $9A^2+4B^2=(3A+3B)^2 \Leftrightarrow 5B^2+18AB=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} B=0 \\ B=-\frac{18}{5}A \end{array}\right.$.

* $B=0 \Rightarrow pttt: x-3=0$

* $B=-\frac{18}{5}A$, chọn $A=5 \Rightarrow B=-18 \Rightarrow pttt: 5x-18y+39=0$.

Cách 2: Gọi $(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm$\Rightarrow$ pttt : $\frac{xx_0}{9}+\frac{yy_0}{4}=1$

Tiếp tuyến đi qua $M(3;3)$ nên $\frac{x_0}{3}+\frac{3y_0}{4}=1 \Rightarrow x_0=\frac{3}{4}(4-3y_0)$

Mặt khác: $\frac{x_0^2}{9}+\frac{y_0^2}{4}=1\Rightarrow(4-3y_0)^2+4y_0^2=16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y_0=0\Rightarrow x_0=3\\ y_0=\frac{24}{13}\Rightarrow x_0=-\frac{15}{13}\end{array}\right.$.

Thay vào ta cũng được hai phương trình như trên.

Nhận xét:* Cách giải 2 ở bài 4 giúp chúng ta xác định được tọa độ tiếp điểm.

*(E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ có hai tiếp tuyến thẳng đứng $x=\pm a$, những tiếp tuyến còn lại luôn có hệ số góc.

Ví dụ 2: Biết Elips (E) có tâm sai $e=\frac{1}{2}$ và tiêu cự bằng 8.

1) Lập phương trình (E).

2) Tìm điểm $M\in(E)$ sao cho $MF_1=2MF_2$

3) Cho N là một điểm bất kì thuộc (E). Chứng minh rằng $ON^2+NF_1.NF_2$ không phụ thuộc vào N.

4) Tìm trên (E) hai điểm A,B sao cho A và B đối xứng nhau qua Ox, đồng thời ΔABC với $C(2;0)$ là tam giác đều.

Giải:

1) Ta có: $\begin{cases}e=\frac{1}{2}\\ 2c=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{1}{2}\\ c=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2c=8\\ c=4\end{cases}\Rightarrow b^2=a^2-c^2=48\Rightarrow(E):\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$.

2) Gọi $M(x_0;y_0)\in(E)\Rightarrow MF_1=8+\frac{1}{2}x_0;\ MF_2=8-\frac{1}{2}x_0$

$\Rightarrow MF_1=2MF_2\Leftrightarrow 8+\frac{1}{2}x_0=16-x_0\Leftrightarrow x_0=\frac{16}{3}\Rightarrow y_0=\pm\frac{4\sqrt{15}}{3}$

Vậy $M(\frac{16}{3};\pm\frac{4\sqrt{15}}{3})$.

3) Giả sử: $N(x_0;y_0)\in(E)\Rightarrow 3x_0^2+4y_0^2=192$

$\Rightarrow ON^2=x_0^2+y_0^2;\ NF_1.NF_2=a^2-e^2x_0^2=64-\frac{1}{4}x_0^2$

$\Rightarrow ON^2+NF_1NF_2=\frac{3}{4}x_0^2+y_0^2+64=\frac{1}{4}(3x_0^2+4y_0^2)+64=112$ không phụ thuộc vào N.

4) Vì A, B đối xứng nhau qua Ox nên $A(x_0;y_0)$, $B(x_0;-y_0)$ với $3x_0^2+4y_0^2=192$ (1) và ta có thể giả sử $y_0>0$.

Vì ΔABC cân tại C nên ΔABC đều $\Leftrightarrow AB=BC\Leftrightarrow 3y_0^2=(x_0-2)^2$ thay vào (1) ta được

$3x_0^2+\frac{4}{3}(x_0-2)^2=192 \Leftrightarrow 13x_0^2-16x_0-560=0 \Leftrightarrow x_0=\frac{8\pm 12\sqrt{51}}{13}$

*Với $x_0=\frac{8+12\sqrt{51}}{13} \Rightarrow y_0=\frac{12\sqrt{51}-5}{13\sqrt{3}}$.

* Với $x_0=\frac{8-12\sqrt{51}}{13} \Rightarrow y_0=\frac{12\sqrt{51}+5}{13\sqrt{3}}$.

Vậy có hai cặp điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Ví dụ 3.Cho (E): $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$.Tìm M thuộc (E) nhìn hai tiêu điểm dưới một góc 120^0

Giải: Ta có : $F_1\left(-5\sqrt{3};0\right), F_2\left(5\sqrt{3};0\right)$ và $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$F_1F_2{}^2=MF_1{}^2+MF_2{}^2-2MF_1MF_2\cos 120^0 \Leftrightarrow 4c^2=\left(MF_1+MF_2\right)^2-MF_1MF_2$

$\Leftrightarrow 4c^2=3a^2+e^2x^2{}_M \Leftrightarrow x_M=0 \Leftrightarrow y_M=\pm 5 \Rightarrow M\left(0;\pm 5\right)$

Bài tập

1/ Tìm tiêu điểm,tiêu cự,độ dài các trục,tâm sai và toạ độ các đỉnh của các elip sau

a) $4x^2+9y^2=36$ b) $x^2+9y^2=36$

2/ Viết pt chính tắc của (E) biết :

a) (E) đi qua $M\left(1;0\right), N\left(\frac{\sqrt{3}}{2};1\right)$ b) $F_1\left(-\sqrt{3},0\right)$ và M$\left(1;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\in (E)$

3/Cho (E): $9x^2+25y^2=225$. Tìm $\mathrm{M}\in\left(\mathrm{E}\right)$ biết

a) $\mathrm{MF_1}=2\mathrm{MF_2}$ b) $\mathrm{MF_2}=2\mathrm{MF_1}$

4/ Cho (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \left(a>b>0\right)$ và $\mathrm{M}\in\left(\mathrm{E}\right)$. Chứng minh rằng :

a) $MF_1.MF_2+OM^2=a^2+b^2$ b) $\left(MF_1-MF_2\right)^2=4\left(OM^2-b^2\right)$

5/ Cho (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \left(a>b>0\right)$

a) Chứng minh rằng $b\le OM\le a \quad \forall M\in (E)$

b) A;B là hai điểm thuộc (E) sao cho OA vuông góc với BO.Chứng minh AB luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định

c) Tìm giá trị lớn nhất ,giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác OAB.

6/ Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ hai tiêu điểm của một Elíp đến một tiếp tuyến tuỳ ý của nó thì luôn bằng bình phương của bán trục bé.

7/ Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai Elíp: $(E_1): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ và $(E_2): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

8/ a) Hãy lập phương trình chính tắc của Elíp (E), biết nó có hai tiêu điểm là $F_1(-\sqrt{10};0)$ $F_2(\sqrt{10};0)$ và bán trục lớn $a = \sqrt{18}$.

b) Xét đường thẳng (d) tiếp xúc với (E) và cắt trục hoành tại A, cắt trục tung tại B. Hãy xác định đường thẳng (d) sao cho tam giác OAB có diện tích lớn nhất.

9/ Cho Elíp $(E): 4x^2 + 16y^2 = 64$

a) Hãy xác định các tiêu điểm F_1, F_2 của Elíp.

b) Giả sử M là một điểm di động trên (E). Chứng minh rằng tỉ số khoảng cách từ M đến tiêu điểm phải F_2 và đến đường thẳng $x = \frac{8}{\sqrt{3}}$ là luôn luôn không đổi.

c) Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4\sqrt{3}x - 4 = 0$. Xét một đường tròn (C') thay đổi nhưng luôn đi qua F_2 và tiếp xúc ngoài với đường tròn (C). Hãy tìm quỹ tích tâm N của đường tròn (C').

10/ Cho Elíp $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Xét các điểm $A_1(-a;0); A_2(a;0)$; $M(-a;m); N(a;n)$; ($m;n$ thay đổi).

a) Chứng minh rằng đường thẳng MN tiếp xúc với (E) khi và chỉ khi $mn = b^2$

b) Giả sử M, N thay đổi nhưng đường thẳng MN luôn tiếp xúc với (E). Tìm quỹ tích giao điểm I của hai đường thẳng A_1N và A_2M .

c) Với giả thiết như câu b) , hãy xác định toạ độ M,N sao cho tam giác F_2MN có diện tích nhỏ nhất.

d) Giả sử MN tiếp xúc với (E). Chứng minh rằng đoạn thẳng MN được nhìn từ hai tiêu điểm của (E) dưới một góc vuông.

11/ Trong mặt phẳng tọa độ cho Elip: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ và đ/thẳng $d_m : mx - y - 1 = 0$

a) Chứng minh rằng d_m luôn cắt (E) tại hai điểm phân biệt với mọi m.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (E) xuất phát từ $N(1;-3)$

12) Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai Elíp: $(E): \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ và $(E'): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$

13) Viết pt tt chung của $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 16$