UNIVERSITE ABDELMALEK ESSAADI
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNIQUES
TANGER

PHYSIQUE GENERALE
MECANIQUE DU POINT

A.CHENTOUF
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Version 2020

La mécanique, qu'on va traiter dans ce cours, appelé la mécanique du point fait partie de la mécanique classique.

La mécanique classique, ainsi que l'optique géométrique ont été les premières sciences à se développer. Les fondateurs de la mécanique classique sont Galilée (1564-1642) et Newton (1642-1727). D'autres ont en contribué comme Copernic (1473-1543), Kepler (1571-1630), Descartes (1596-1650).. ..

Galilée a introduit dans ses travaux en mécanique une approche scientifique nouvelle pour son époque (proposition d'une théorie comportant des conséquences expérimentales pouvant être vérifiées quantitativement par l'expérimentation).

Newton a introduit un outil mathématique très puissant, le calcul différentiel et intégral, qui a contribué à l'évolution des sciences modernes.

La mécanique classique étudie des notions fondamentales, de base nécessaires à plusieurs branches modernes comme :

La mécanique du solide, la mécanique des milieux continus, la mécanique des fluides, la mécanique des matériaux, la mécanique quantique ……etc

La mécanique du point comporte :

-La cinématique qui étudie le mouvement des objets, ce qui revient à décrire la façon dont ces objets se déplacent, sans faire intervenir les causes du mouvement.

- La dynamique qui étudie les causes du mouvement des objets, c'est à dire cherche à expliquer les raisons pour lesquels les objets se déplacent d'une façon donnée. Dans cette partie on fera intervenir les notions de force et d'énergie.

I – GENERALITES - DEFINITIONS

Tout objet soumis à l'étude est un système matériel.

Un système matériel est un ensemble de particules matérielles(en fait, on peut imaginer le découpage fictif d'un objet en éléments linéaires, de surface ou de volume infiniment petits).

Ces particules sont considérés elles mêmes comme des points (au sens mathématique du terme) qu'on appelle points matériels.

Un système matériel peut être déformable ou indéformable.

Un solide, en mécanique, est un système matériel indéformable (du moins la déformation n'est pas perceptible à notre échelle). Par exemple une bille d'acier est un système matériel qui est un solide, alors qu'un ressort d'acier en oscillation est un système matériel qui n'est pas un solide.

II - ETUDE DU MOUVEMENT:

1- Notion du point mobile :

Tout objet en mouvement, déformable ou non, est un mobile.

Dans le cas d'un solide, l'étude d'un point ou de quelques points bien choisis permet de connaitre le mouvement du mobile.

De même lorsqu'on s'intéresse au mouvement global d'un système matériel sur une distance très grande par rapport à ses dimensions, le système matériel peut être considéré comme un point matériel.

Par exemple, pour décrire le mouvement d'une voiture qui parcourt une distance de plusieurs dizaines de kilomètres, la voiture peut être assimilée à un point mobile.

La terre, vue du soleil peut être considéré comme un point mobile.

Ainsi, en mécanique, la résolution de plusieurs problèmes du mouvement des mobiles se ramène à la résolution de problèmes de mouvement des points mobiles.

2- **Trajectoire d'un point mobile** :

C'est l'ensemble des positions occupés successivement par le point mobile au cours de son déplacement dans l'espace.

Quand le mobile se déplace suivant une droite, la trajectoire ou le mouvement est dit rectiligne.

Dans le cas général où le mobile se déplace en décrivant une courbe quelconque, le mouvement est dit curviligne.

Quand la courbe est décrite dans un plan (courbe plane), la trajectoire est plane.

3- **Loi du mouvement d'un point mobile M**:

Il faut bien noter que la trajectoire d'un point mobile ne nous renseigne pas sur son mouvement. Sur une même route (avec la même trajectoire) deux voitures auront des mouvements différents.

Pour bien déterminer le mouvement d'un point mobile, il nous faut connaitre sa position à chaque instant.

La position d'un point mobile M peut être repéré par ses coordonnées dans le système d'axes choisit (Voir complément de cours), ces coordonnées sont aussi les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$.(O :origine).

Il est aussi possible de repérer la position du point mobile M sur sa trajectoire par son abscisse curviligne s= $\widehat{AM}$ (mesure de l'arc AM) avec A est une origine des abscisses choisie sur la trajectoire.

Donc la connaissance du mouvement du point mobile M revient à savoir la loi horaire du mouvement :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$$

si le repère choisit est le système d'axes de coordonnées cartésiens ; Les fonctions f,g,h sont les représentations paramétriques de la courbe représentant la trajectoire .Le paramètre est le temps t ;

Ou bien s= φ(t)

si on utilise l'abscisse curviligne

III -CARACTERE RELATIF DU MOUVEMENT :

1- Référentiel :

Toute description du mouvement d'un mobile nécessite un choix préalable d'un objet indéformable au cours du temps, servant de référence, que nous appellerons solide de référence ou référentiel.

La loi du mouvement sera donnée dans un repère d'espace lié au référentiel choisit.

Dans ce qui suit, on peut confondre le référentiel et le repère d'espace qui lui est lié.

Le mouvement ainsi que la trajectoire du mobile sont relatifs au référentiel choisit.

2 - **Exemples de relativité du mouvement et de la trajectoire :**

a-Considérons un train allant à une vitesse de 85km /h par rapport au sol (référentiel sur terre) et un voyageur qui se déplace dans le même sens que le train avec une vitesse de 5km/h par rapport à un référentiel lié au train.

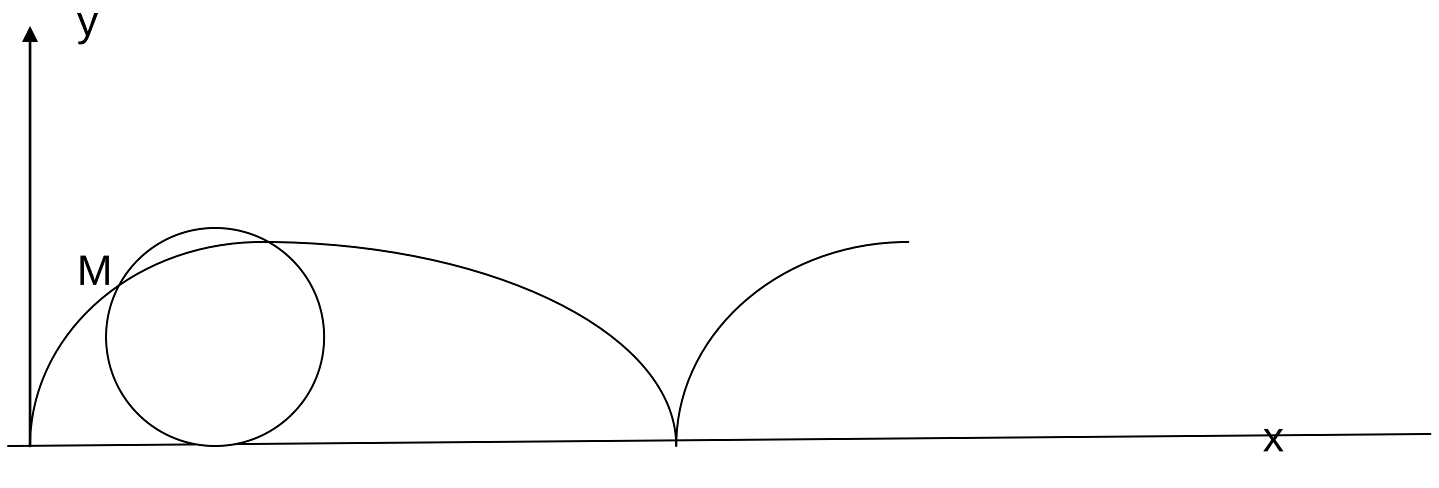
Par rapport au sol, le voyageur se déplace en réalité à une vitesse de 90 Km/h ;

b-Considérons une roue d'un vélo qui roule suivant une droite et décrivons la trajectoire décrite par la valve de la roue arrière:

-Si on choisit comme référentiels la roue arrière la valve est considérée au repos

-Si on choisit le cadre de la roue comme référentiel la trajectoire de la valve décrit un cercle centré sur l'axe de la roue.

- Si on choisit le sol comme référentiel la trajectoire de la valve M est une courbe appelée cycloïde.



IV – DEPLACEMENT ET VECTEUR DEPLACEMENT :

Le déplacement d'un mobile entre deux instants t_i et t_f est le changement de position de ce mobile.

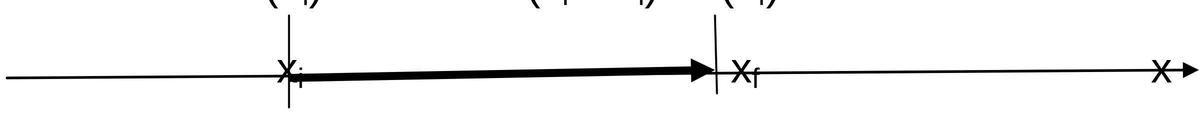
Ce changement peut être représenté par un vecteur. Il nous renseigne sur la position du mobile sans se soucier du chemin suivi par le mobile.

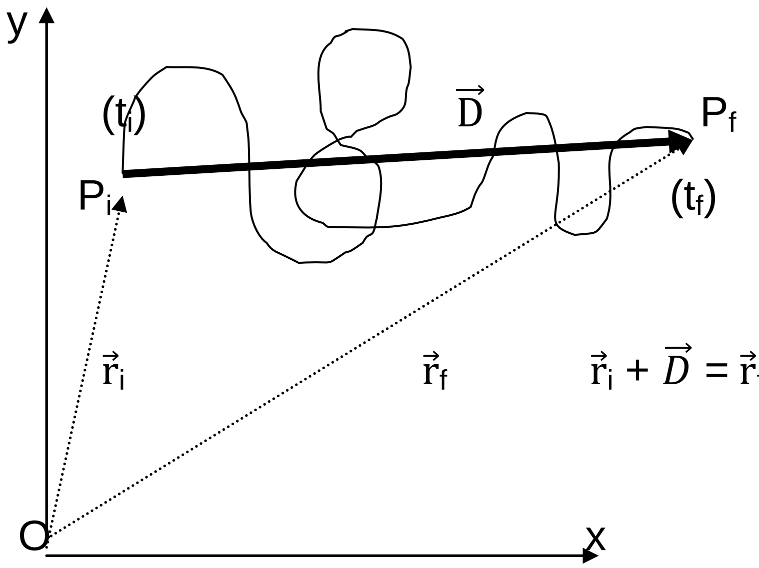
Par exemple, soit un mobile qui se trouvait à un instant t_i en un point P_i de l'espace et au point P_f à l'instant t_f.

Il peut y avoir une infinité de trajectoires qui mènent de P_i à P_f et à chaque trajectoire correspond une distance parcourue différente (la longueur de la trajectoire qui est un scalaire). Mais pour avoir l'information sur le changement de position il suffit de connaitre les coordonnées initiales et finales de la position du mobile et donc d'avoir le vecteur déplacement.

Exemples à une et deux dimensions :

(t_i) $\vec{D} = \Delta x \vec{\imath} = (x_f - x_i)\vec{\imath}$ (t_f)





$\vec{r}_i + \vec{D} = \vec{r}_f$ ou $\vec{D} = \vec{r}_f - \vec{r} = \Delta\vec{r}$

LA CINEMATIQUE

I - LA CINEMATIQUE A UNE SEULE DIMENSION – RAPPELS :

1- VITESSE ET ACCELERATION MOYENNE :

1-a : La vitesse scalaire moyenne d'un mobile en mouvement suivant une direction est la distance d effectuée divisée par le temps t mis à la parcourir:

$$V_S = \frac{d}{t} \quad \text{(m /s)}$$

1-b : Le vecteur vitesse moyenne se définit par le vecteur déplacement divisé par la durée correspondante à tout le trajet.

La composante en x du vecteur vitesse moyenne est :

$$V_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{(m /s)}$$

1-c : l'accélération moyenne d'un mobile dont la vitesse varie de la valeur V_i à la valeur V_f dans l'intervalle de temps $\Delta t = t_f - t_i$ est :

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad (\text{m / s}^2)$$

2- VITESSE ET ACCELERATION INSTANTANEE :

2-a La vitesse instantanée v(t) représente la valeur de la vitesse à chaque instant t.

Dans une voiture qui roule, le compteur de vitesse nous permet de lire à chaque instant la vitesse avec laquelle la voiture se déplace.

Pour un mobile quelconque, la vitesse instantanée est la limite du vecteur vitesse moyenne déterminée à l'intérieur d'un intervalle de temps infiniment petit:

$$v(t)= \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)= \frac{dx(t)}{dt}$$

2-b L'accélération instantanée a(t) d'un mobile est :

$$a(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) = \frac{dv(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=d^2x(t)/dt^2$$

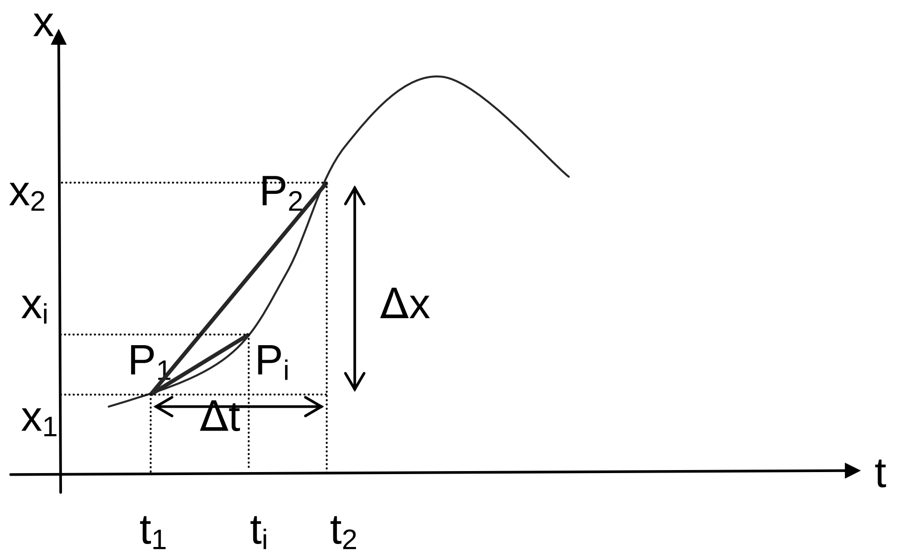
3- DETERMINATION GRAPHIQUE DE LA VITESSE

Supposons qu'on connait la loi du mouvement :

x= f(t)

ou bien qu'on a un tableau de mesures des positions du mobile à des instants t.

Ce qui nous permet de tracer le graphe de la position x du mobile en fonction du temps dans un intervalle donné.



Considérons deux points P_1 et P_2 du graphe, le segment qui joint les deux points constitue l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les cotés sont Δx et Δt.

$\frac{\Delta x}{\Delta t}$ représente donc la pente de la droite P_1P_2. Or ce rapport définit le vecteur vitesse moyenne du mobile dans l'intervalle $\Delta t = t_2 - t_1$.

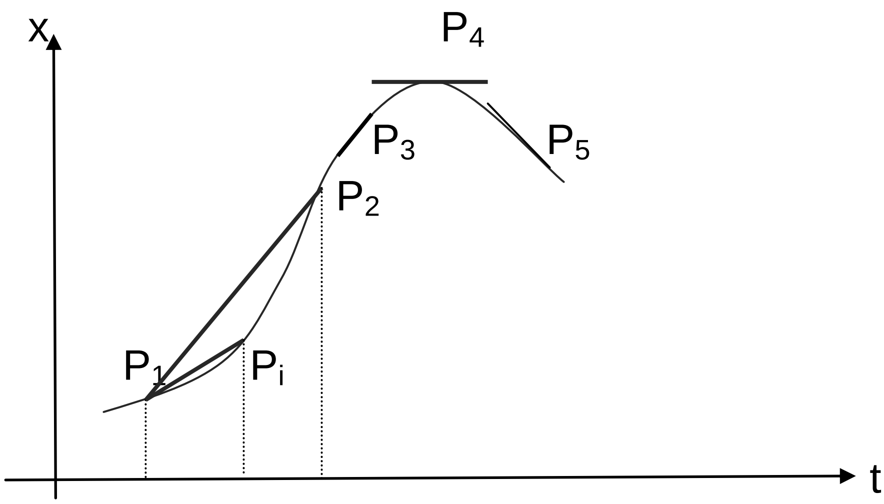
le vecteur vitesse moyenne dans l'intervalle de temps $\Delta t = t_i - t_1$, est égale à la pente du segment qui joint les deux points P_1 et P_i .

De cette façon on peut comparer les vitesses moyennes dans des intervalles de temps déterminés.

D'un autre coté si on choisit un intervalle de temps très petit, on remarque que la pente de la droite qui joint deux points très proche se rapproche de la tangente à la courbe à l'un des points.

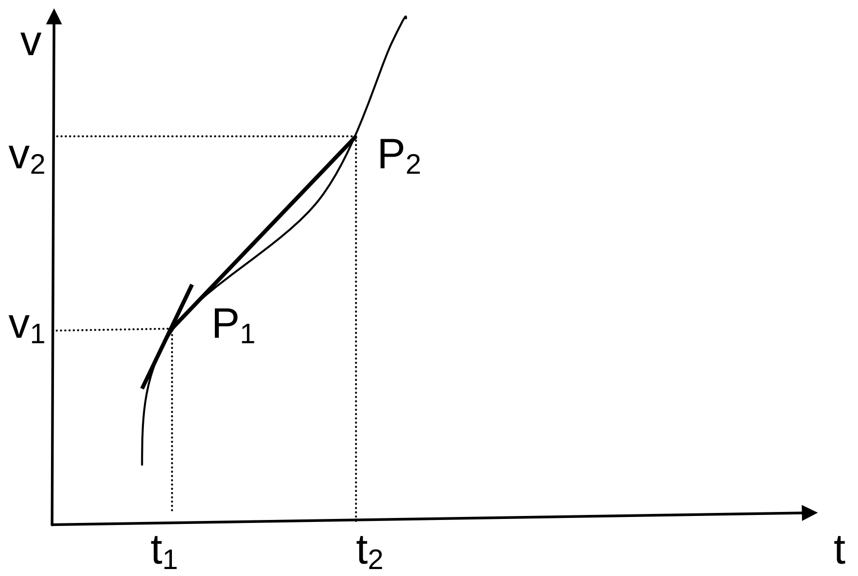
Quand on fait tendre Δt vers zéro, la pente de la tangente n'est que la vitesse instantanée en un point déterminé de la courbe, par exemple les points P_3, P_4 et P_5.

Du graphe, on peut déduire aussi que la vitesse est positive en P_3, nulle en P_4 et négative en P_5.



4– DETERMINATION GRAPHIQUE DE L'ACCELERATION

On peut reprendre la même étude faite pour la vitesse, pour définir graphiquement l'accélération moyenne et instantanée si on a le tracé du graphe de la vitesse du mobile en fonction du temps.



La pente de la droite qui relie P_1 et P_2 est égale à l'accélération moyenne dans l'intervalle de temps $t_2 - t_1$.
La pente de la tangente au point P_1 est égale à l'accélération instantanée à l'instant t_1.

5 – EQUAION HORAIRE DU MOUVEMENT RECTILIGNE :

5-a - Mouvement rectiligne uniforme :
C'est le cas où V= Cte

Comme $v_x = \frac{d}{dt} x(t) = Cte$ d'où : $x = v_x\, t + x_0$ avec $x_0 = x(t=0)$

Et donc $a_x = \frac{d}{dt} v_x = 0$

5-b Mouvement rectiligne uniformément varié :

C'est le cas où a=Cte

Or $a = \frac{d}{dt} v_x$ =Cte d'où $v_x = a_x t + v_{0x}$ (1) avec $v_{0x}=v_x$ (t=0)

Et puisque $v=\frac{dx}{dt}$ alors par intégration, il en résulte :

$$x= \frac{1}{2} at^2 + v_0 t + x_0 \quad (2) \text{ avec } x_0 = x(t=0)$$

En éliminant le temps entre les deux expressions (1) et (2) on obtient la relation

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x-x_0) \qquad (3)$$

5-c Exemple du Mouvement de chute libre :

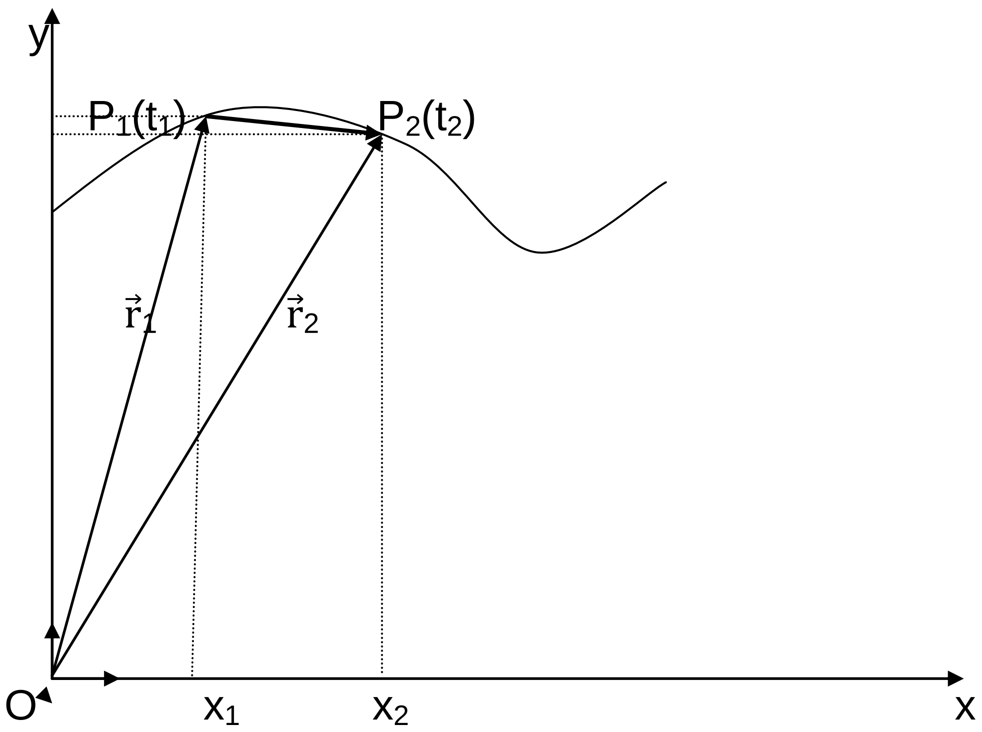
C'est un mouvement rectiligne uniformément varié, des objets qui se déplacent à la verticale à proximité de la surface de la terre dont l'accélération est celle de la pesanteur dans le lieu de l'expérience, lorsque la résistance de l'air est négligeable. L'objet n'est donc soumis qu'à l'action de son poids.

Cette accélération porte aussi le nom d'accélération gravitationnelle, on le note g, sa valeur approchée est 9,80 m /s^2.

II- LA CINEMATIQUE EN DEUX OU EN TROIS DIMENSIONS

II-1 Vitesse et accélération

Considérons la trajectoire curviligne d'un point matériel dans un plan et choisissons un système d'axes de coordonnées cartésiens pour repérer la position du point. Désignons la position du point à l'instant t_i par le vecteur position $\vec{r}_i = \overrightarrow{OP}_i$



Le vecteur déplacement dans l'intervalle de temps $\Delta t = t_2 - t_1$ est

$$\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Avec $\vec{r}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$ et $\vec{r}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ d'où :

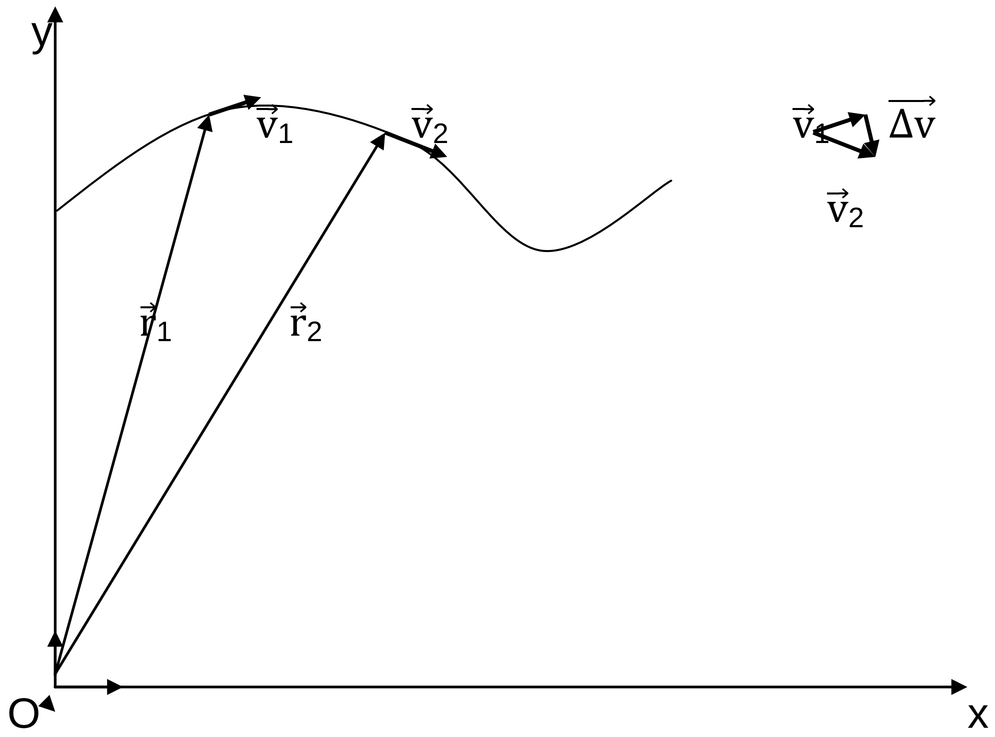
$$\overrightarrow{\Delta r} = (x_2 - x_1)\,\vec{i} + (y_2 - y_1)\,\vec{j}$$

Le vecteur vitesse moyenne dans l'intervalle de temps $\Delta t = t_2 - t_1$ est : $\vec{V} = \dfrac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}$

Et le vecteur vitesse instantanée est :

$$\vec{V}(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\overrightarrow{\Delta r}}{\Delta t}\right) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

la direction de $\vec{V}$ (t) à chaque instant se situe le long de la tangente à la courbe de la trajectoire (si $\Delta t \to 0$ alors $\Delta r = \Delta \ell$)



comme $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$

donc $\vec{V} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$ avec $v_x = \frac{dx}{dt}$ et $v_y = \frac{dy}{dt}$

De même on a :

Le vecteur accélération moyenne :

$$\vec{a} = \frac{\vec{V}2 - \vec{V}1}{t2 - t1} = \frac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t}$$

et le vecteur accélération instantanée est:

$$\vec{a}\,(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t}\right) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dVx}{dt}\,\vec{i} + \frac{dVy}{dt}\,\vec{j} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j}$$

l'accélération instantanée est non nulle lorsque la grandeur de la vitesse varie mais aussi lorsque seulement la direction de la vitesse change.

II-2 Mouvement au vecteur accélération constante :

Ce qui revient à dire que les composantes a_x, a_y et a_z sont des constantes. Les équations du mouvement uniformément varié à une seule dimension s'appliquent , d'où :

Sous forme vectorielle :

$$\vec{V}(t) = \vec{V}_0 + \vec{a}t \qquad \text{et} \qquad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

A deux dimensions par exemple, on a :

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$: vecteur position

$\vec{V}_0 = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j}$: le vecteur vitesse initiale

$\vec{V} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$: vecteur vitesse instantanée

$\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j}$: : vecteur accélération

et on peut écrire pour chaque composante :

$v_x = v_{0x} + a_x t$; $\quad x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$

$(v_x)^2 = (v_{0x})^2 + 2a_x(x - x_0)$

Et :

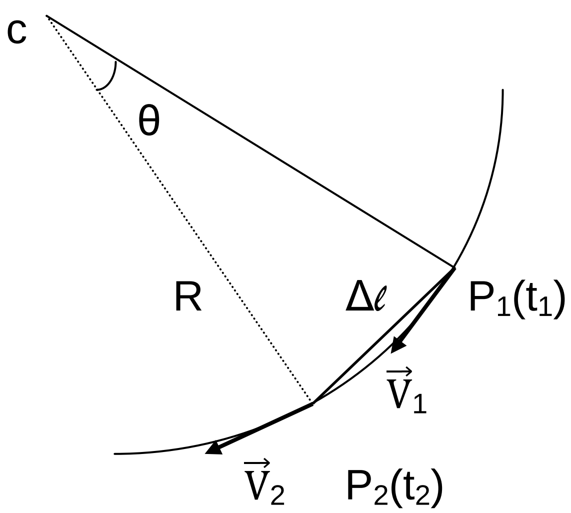
$v_y = v_{0y} + a_y t$; $\quad y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2$

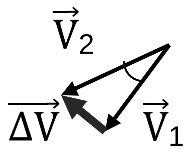
$(v_y)^2 = (v_{y0})^2 + 2a_y(y - y_0)$

II-3 Mouvement circulaire uniforme :

Quand un mobile décrit une trajectoire circulaire à vitesse constante en grandeur.

Or, le changement de la direction de la vitesse crée aussi une accélération du mobile :





$\overrightarrow{\Delta V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$

On a $\vec{a}\,(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\overrightarrow{\Delta V}}{\Delta t}\right) = \frac{d\vec{V}}{dt}$

Cherchons la direction de $\vec{a}$ (t) donc de $\overrightarrow{\Delta V}$:

Quand $\Delta t \to 0$ ($\Delta\theta \to 0$ et $\Delta\ell \to 0$) on voit sur le schéma que $\overrightarrow{\Delta V}$ prend la direction radiale (perpendiculaire à la tangente en P direction de la vitesse en ce point) vers le centre du cercle. Ainsi l'accélération prend donc la même direction, on l'appelle accélération radiale ou centripète et on la note $\vec{a}_r$

Cherchons sa grandeur :

Du schéma on peut tirer la relation :

$\frac{\Delta v}{v} \sim \frac{\Delta l}{R}$ soit $\Delta v = v\frac{\Delta l}{R}$ qu'on remplace dans l'expression de a_r, sachant que $\frac{\Delta l}{\Delta t}$ =v d'où $a_r = v^2 / R$

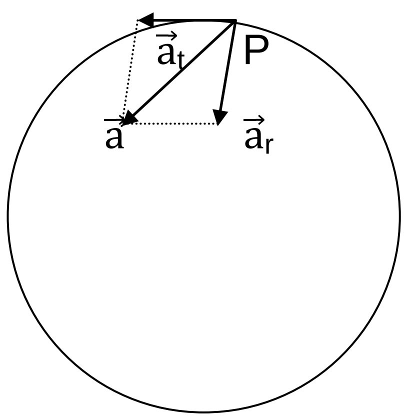
Un mobile qui décrit une trajectoire circulaire de rayon R, avec une vitesse constante v a donc une accélération radiale de grandeur v^2 / R.

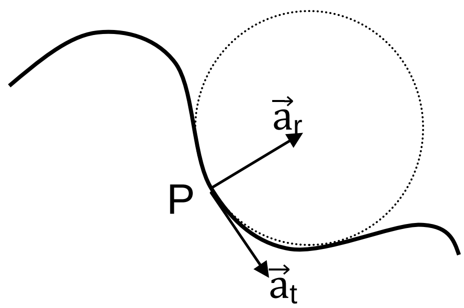
II-4 Mouvement circulaire non uniforme

Dans ce cas la gradeur de la vitesse v est variable, ce qui engendre une accélération $a_t = \frac{dv(t)}{dt}$ en plus de l'accélération radiale $a_r = v^2(t) / R$

Ainsi le vecteur accélération totale est la somme des deux vecteurs correspondants à l'accélération tangentielle et radiale :

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_r$$





Mouvement curviligne

Mouvement circulaire non uniforme

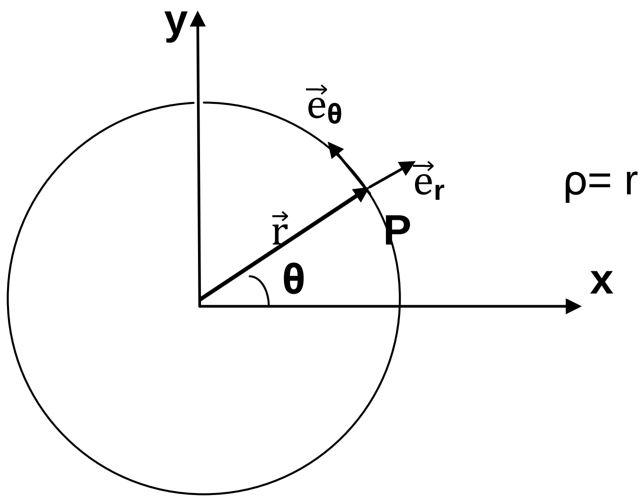
Pour un mouvement curviligne quelconque on détermine le rayon de courbure R au point P considéré, ainsi l'accélération

radiale est dirigé vers le centre de courbure et sa grandeur est $v^2(t) / R$. Et on a toujours $a_t = \frac{dv(t)}{dt}$.

II-5 Mouvement circulaire et variables angulaires :

a- Coordonnées polaires :

Dans les problèmes plans et en particulier quand la trajectoire est circulaire, il est très pratique d'utiliser les coordonnées polaires d'un point P(ρ,θ), où ρ désigne la distance radiale de P par rapport à l'origine 0, alors que θ représente l'angle que fait OP=ρ avec l'axe des x.



Les coordonnées cartésiens du point P sont liés à ses coordonnées polaires par les relations :

$x= r\cos(\theta)$; $y= r\sin(\theta)$

$r= \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\tan(\theta)= \frac{y}{x}$

En tout point on associe aux axes suivant r et suivant θ croissant les vecteurs unitaires $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ de directions variables.

Ainsi on peut écrire pour un mouvement circulaire :

$\vec{v}=v\vec{e}_\theta$

$\vec{a}= a_r\,\vec{e}_r + a_t\vec{e}_\theta = (- v^2/ r)\,\vec{e}_r + \frac{dv}{dt}\,\vec{e}_\theta$

b- Variables angulaires

Si un mobile parcourt sur une trajectoire circulaire de rayon ρ une longueur $\Delta\ell$ sa position angulaire varie de $\Delta\theta$ tel que :

$\Delta\theta = \Delta\ell / \rho$

On définit la vitesse angulaire instantanée $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

et l'accélération angulaire $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

Alors on peut écrire : $v = \frac{dl}{dt} = \frac{\rho d\theta}{dt} = \rho\omega$

Et $a_r = v^2/\rho = \omega^2\rho$; $a_t = \frac{dv}{dt} = \rho\frac{d\omega}{dt}$

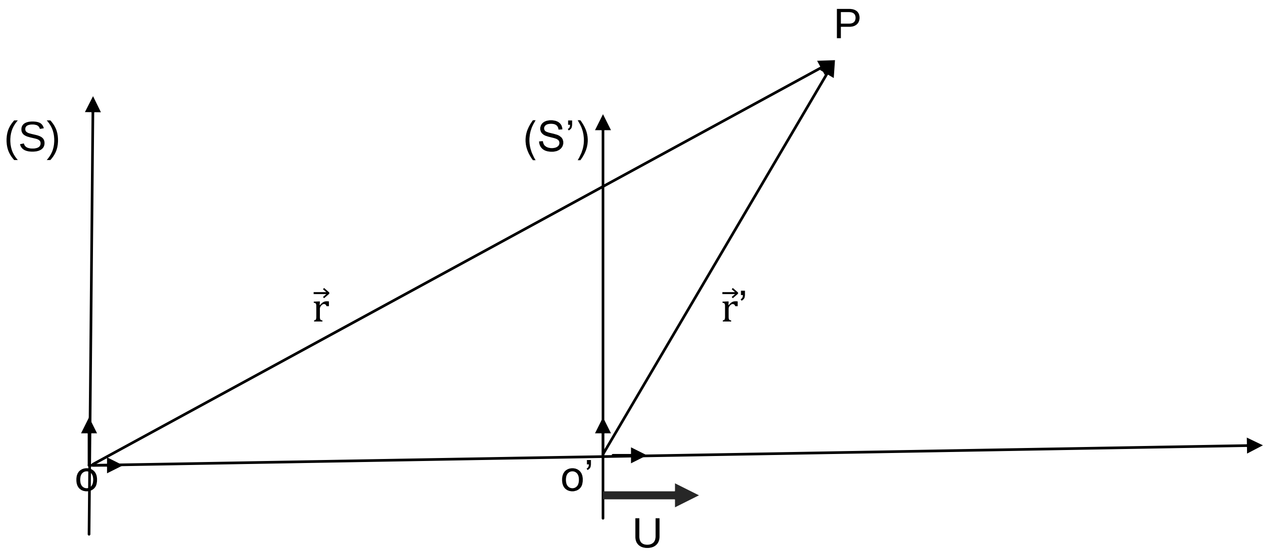
Pour un mouvement circulaire périodique de période T et de fréquence $f = \frac{1}{T}$ on a $\omega = 2\pi f$

II-6 Vitesse relative

On a déjà discuté la relativité du mouvement selon le référentiel choisit, les mesures des vitesses par conséquent dépendent du référentiel dans lesquels sont effectuées.

Considérons un point mobile P en mouvement et deux référentiel l'un S est fixe par rapport au sol $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et l'autre S' qui se déplace à une vitesse constante U(vers la droite par exemple) par rapport à S.

Décrivons le mouvement de P par rapport à S et S'.



On suppose qu'à l'instant t=0, o' est en o alors :

On a $\overrightarrow{oo'} + \vec{r}' = \vec{r}$ avec $\overrightarrow{oo'} = \vec{U}\,t$ à l'instant t

D'où $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{U}t$

Et donc $\vec{v}_{P/S} = \vec{v}_{P/S'} + \vec{U}$

Avec $\vec{v}_{P/S}$ vitesse du mobile par rapport à S, $\vec{v}_{P/S'}$ vitesse du mobile par rapport à S'et $\vec{U} = \vec{v}_{S'/S}$ vitesse de S' par rapport à S.

Pour déterminer la vitesse d'un objet par rapport à un premier système de référence, on fait la somme vectorielle de sa vitesse connue dans un second système de référence et de la vitesse de ce second système par rapport au premier système de référence.

En général on a : $\vec{v}_{P/S} = \vec{v}_{P/S'} + \vec{v}_{S'/S}$,

et on a $\vec{v}_{P/S} = - \vec{v}_{S/P}$

COMPLEMENT DE COURS

I- VECTEURS

On représente quelques grandeurs physiques par des vecteurs. Ce sont des grandeurs dont la description nécessite en plus de la grandeur une direction et un sens.

Exemples : Vitesse $\vec{v}$; Champ électrique $\vec{E}$; Force : $\vec{F}$

Alors que les grandeurs physiques comme la température, la pression, la masse sont des scalaires et une valeur numérique suffit pour les représenter.

La norme d'un vecteur $\vec{V}$ est notée : $||\vec{V}||$ c'est la grandeur du vecteur, c'est une quantité mesurable.

Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ définit la position du point M par rapport au repère de l'espace d'origine O. : $||\overrightarrow{OM}||$ c'est la distance entre le point M et l'origine O.

Pour une force l$\vec{F}$a norme: $||\vec{F}||$ est l'intensité de la force.

VECTEUR UNITAIRE :

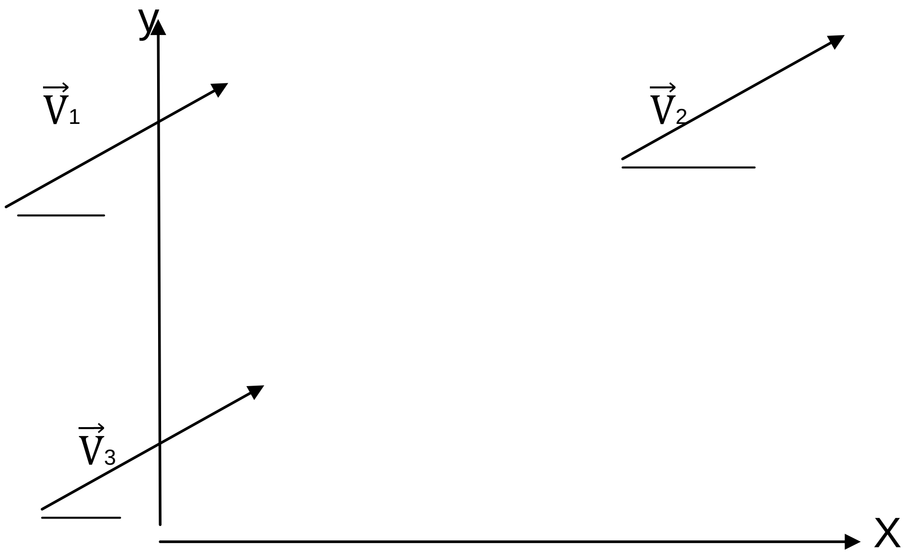
Un vecteur unitaire est un vecteur dont la longueur vaut une unité et qui correspond à une direction bien déterminée.

Considérons par exemple la direction portée par le vecteur position $\overrightarrow{OM}$, On peut définir un vecteur unitaire $\vec{u}$ associé à cette direction :

$$\vec{u} = \overrightarrow{OM} \,/\, ||\overrightarrow{OM}||$$

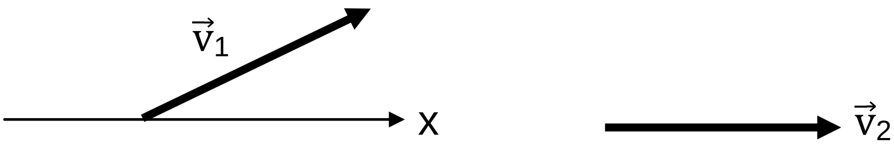
EGALITE DE VECTEURS :

Deux vecteurs sont égaux s'ils ont la même grandeur, la même direction et le même sens.

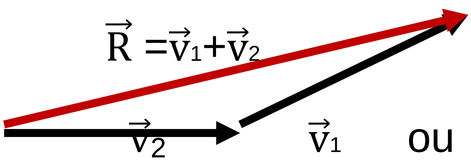


$$\vec{V}_1 = \vec{V}_2 = \vec{V}_3$$

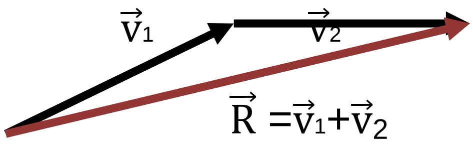
ADDITION DE VECTEURS :



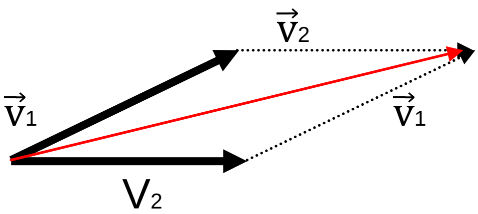
1ére méthode :



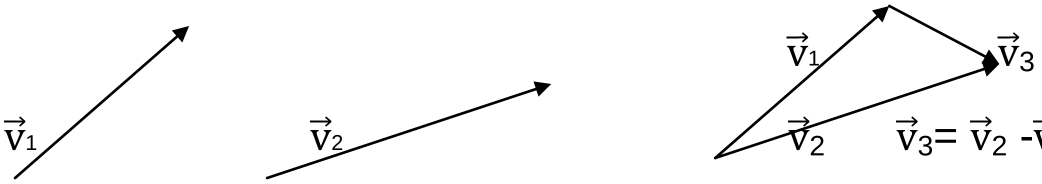
ou bien



2éme méthode : méthode du parallélogramme :

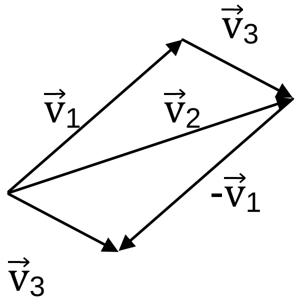


SOUSTRACTION DE VECTEURS :



$\vec{v}_3 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$

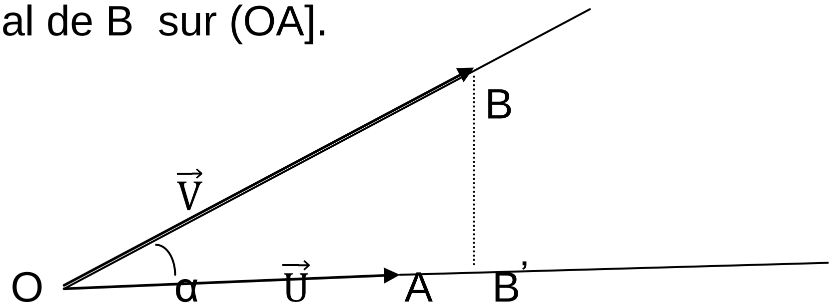
Ou bien :



$\vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_3$

PRODUIT SCALAIRE DE DEUX VECTEURS :

Soient deux vecteurs $\vec{U} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{V} = \overrightarrow{OB}$ et B' le projeté orthogonal de B sur (OA].

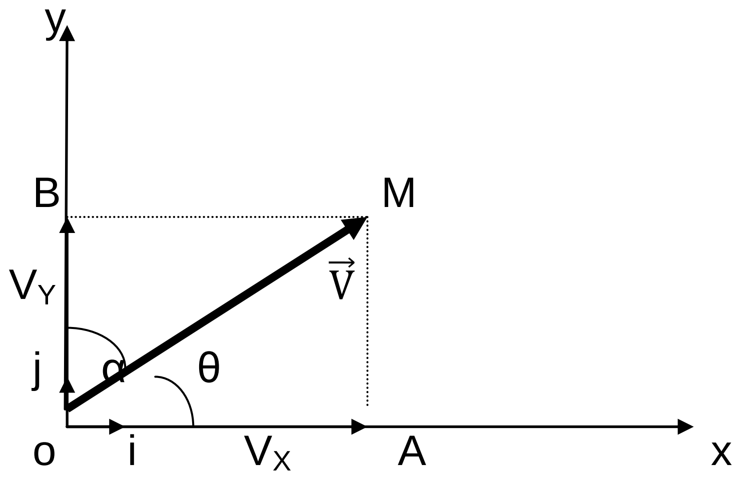


Le produit scalaire de $\vec{U}$ par $\vec{V}$ est le nombre réel OA×OB'

On le note $\vec{U}.\vec{V}$ = OA×OB'= OA×OB×Cos(α)=UVCos(α)

COMPOSANTES D'UN VECTEUR :

Prenons l'exemple d'un vecteur dans un plan muni d'un repère $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ orthonormé



$\overrightarrow{OA}=\vec{V}_X$

$\overrightarrow{OB}=\vec{V}_Y$

$\alpha = \pi/2 - \theta$

V_X : projection orthogonal de V sur l'axe des x

V_Y : projection orthogonal de V sur l'axe des y

Les composantes vectorielles de $\vec{V}$ dans le repère orthonormé sont V_X et V_Y

On voit que $\vec{V} = \vec{V}_X + \vec{V}_Y$ et $\vec{V}_X = V_X\,\vec{i}$; $\vec{V}_Y = V_Y\vec{j}$ d'où :

$$\vec{V} = V_X\,\vec{i} + V_Y\vec{j}$$

Les composantes scalaires de V dans le repère $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ sont V_X et V_y

On a aussi : $V_X = V\cos(\theta)$ et $V_Y = V\sin(\theta)$

D'où $\|\vec{V}\| = V = [(V_x)^2 + (V_Y)^2]^{1/2}$ et $tg(\theta) = V_Y / V_X$

On a aussi : $\vec{V} = V_X\,\vec{i} + V_Y\vec{j}$

d'où $\vec{V}\cdot\vec{i} = V_x = \|\vec{V}\|\,\|\vec{i}\|\cos(\theta) = V\cos(\theta)$. $\vec{i}\cdot\vec{j} = 0$ et $\vec{i}\cdot\vec{i} = 1$

et $\vec{V}.\vec{j} = V_y = \|\vec{V}\| \, \|\vec{j}\| \cos(\alpha) = V\sin(\theta)$

Si on a deux vecteurs :

$\vec{V}_1 \begin{pmatrix} V1x \\ V1y \end{pmatrix}$ et $\vec{V}_2 \begin{pmatrix} V2x \\ V2y \end{pmatrix}$

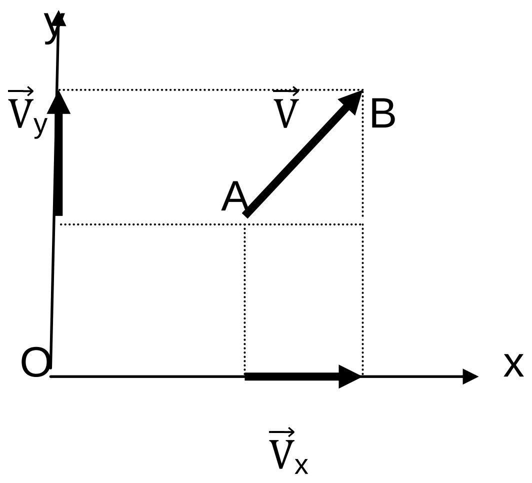
$\vec{V}_1 = V_{1x}\,\vec{i} + V_{1y}\,\vec{j}$

$\vec{V}_2 = V_{2x}\,\vec{i} + V_{2y}\,\vec{j}$

Alors $\vec{R} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 = (V_{1x} + V_{2x})\,\vec{i} + (V_{1y} + V_{2y})\,\vec{j}$

Soit $\vec{R} \begin{pmatrix} V1x + V2x \\ V1y + V2y \end{pmatrix}$.

Soit un vecteur $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$ avec $A(x_1, y_1)$ et $B(x_2, y_2)$



$\overrightarrow{OA} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$

$\overrightarrow{OB} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$

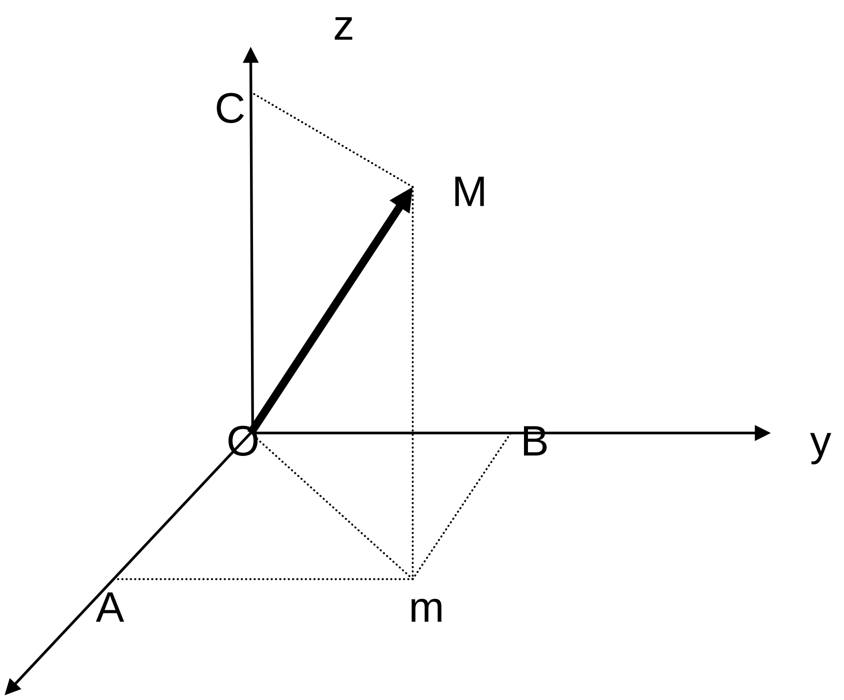
Comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) - (x_1\vec{i} + y_1\vec{j})$

donc $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\,\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$

D'où $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} X2 - X1 \\ Y2 - Y1 \end{pmatrix}$.

Cas particuliers :

- Le vecteur position $\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; M(x,y) et O(0 ,0)



$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{Om}+\overrightarrow{mM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

- **Distance entre deux points :**

$M_1(x_1,y_1,z_1)$ et $M_2(x_2,y_2,z_2)$ deux points de l'espace :

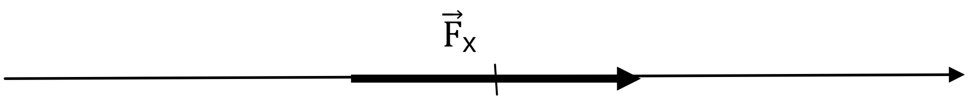
La distance entre M_1 et M_2 est :

$\overrightarrow{M1M2}=\|\overrightarrow{M1M2}\|=[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2]^{1/2}$

REPRESENTATION D'UN VECTEUR :

Pour représenter un vecteur associé à une grandeur physique, on choisit une échelle adaptée au problème. Par exemple si on veut représenter une force $\vec{F}_X$ avec $||\vec{F}_X||$=40N

On peut choisir une échelle où 1cm sur la feuille correspond à 20N



Echelle: 1cm ↔ 20N

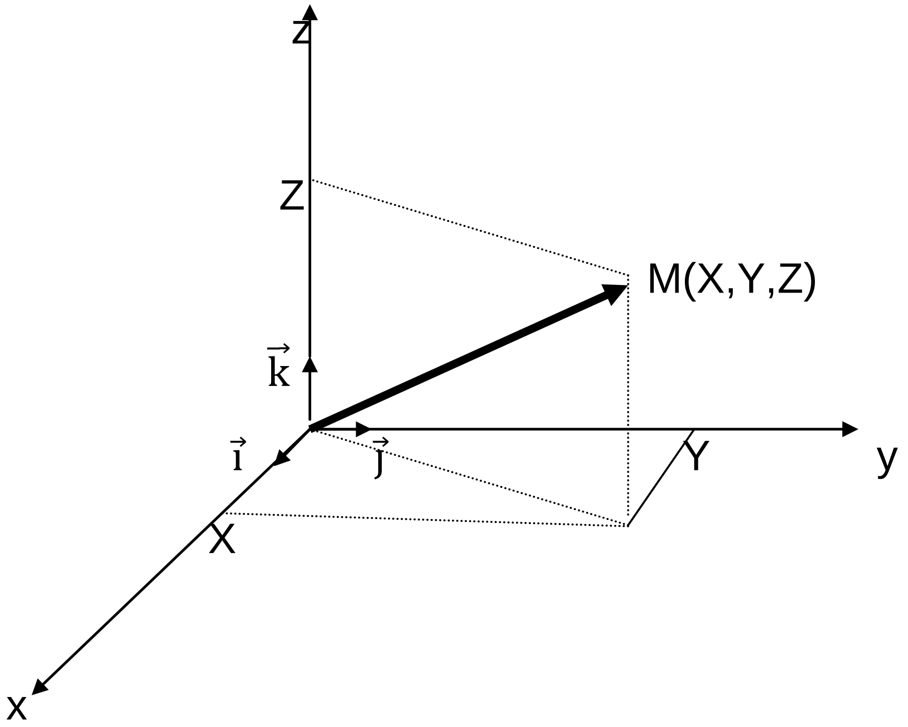
II - REPERAGE DANS L'ESPACE :

Pour repérer un point M dans l'espace, on choisit un système d'axes de coordonnées appropriés, muni d'une origine et d'une base(vecteurs unitaires des directions nécessaires pour l'étude).

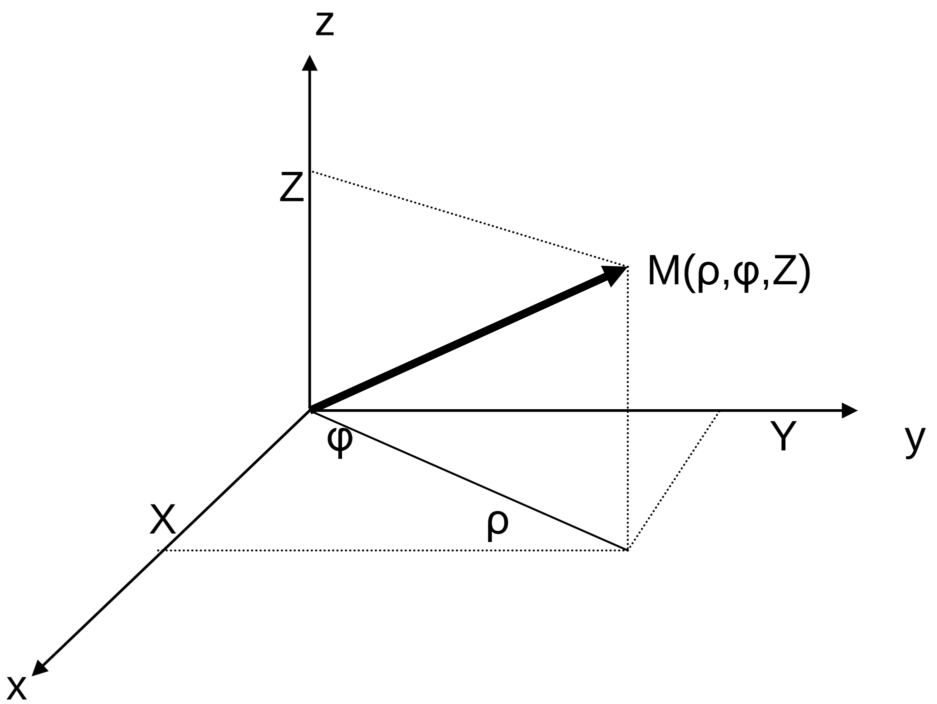
En choisissant un système d'axes de coordonnées cartésiens(ou rectangulaires) muni d'une origine O et de vecteurs unitaires ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), donc un repère (O,$\vec{i}$,$\vec{j}$, $\vec{k}$)

(Le repère est dit orthonormé si $||\vec{i}||=||\vec{j}||=||\vec{k}||=1$ et si les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonales.)

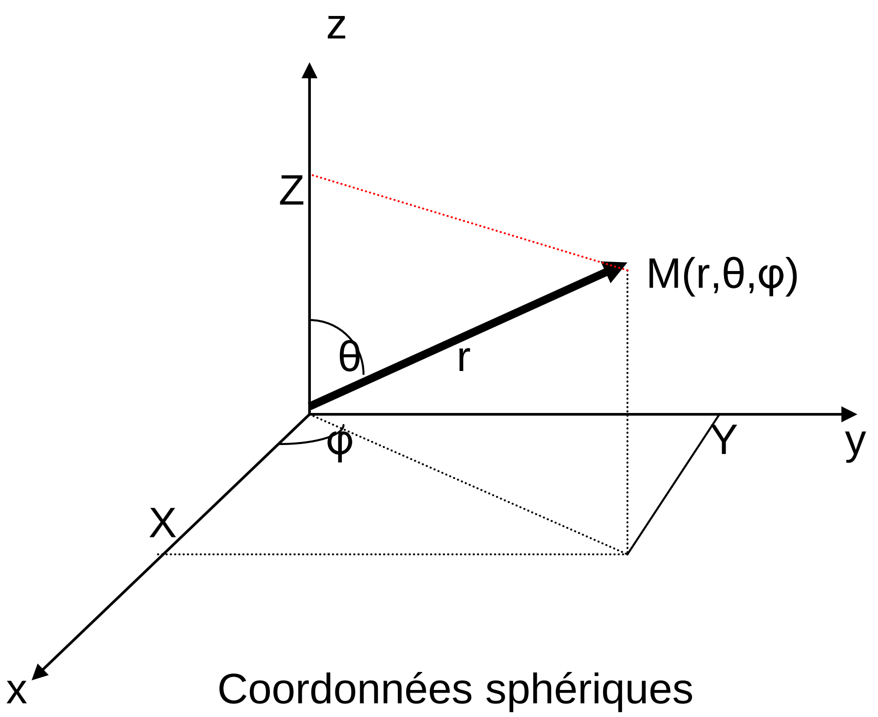
la position d'un point M sera repéré par le rayon vecteur (ou vecteur position) $\overrightarrow{OM}$ où le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est définit par ses coordonnées X, Y, Z



On peut choisir de travailler avec un système d'axes de coordonnées cylindriques ou sphériques :



Coordonnées cylindriques



Coordonnées sphériques

III - EXEMPLES DE REFERENTIEL

1 -Référentiel local ou terrestre : Dans ce référentiel le repère d'espace est lié à la surface de la terre ou à un solide lié à la surface de la terre.

2 -Référentiel géocentrique ou de Coriolis: le repère d'espace est lié au centre de la terre. Les axes Ox, Oy sont dirigés vers deux étoiles fixes situés dans le plan de l'équateur. L'axe Oz est dirigé suivant l'axe sud-nord de la terre (axe de rotation de la terre), en direction de l'étoile polaire.

Ce référentiel sert à étudier le mouvement des satellites de la terre.

Un repère lié au référentiel local effectue un mouvement de rotation par rapport au référentiel de Coriolis, il effectue une révolution autour de Oz en 24 heures.

3- Le Référentiel de Copernic (ou héliocentrique):

Le repère d'espace est lié au centre de masse du système solaire. On prend le centre de gravité du soleil comme étant le centre de masse du système solaire. Les axes du repère lié à ce référentiel sont dirigés vers trois étoiles fixes.

Les axes Ox, Oy sont situés dans le plan de l'écliptique (plan de l'orbite terrestre)

Ce référentiel sert à étudier le mouvement des planètes.

Le référentiel géocentrique est animé d'un mouvement de rotation par rapport au référentiel de Copernic. Il effectue une révolution complète autour du centre de gravité du soleil pendant 365jours

4-Référentiels Galiléens :

Tout référentiel animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport au repère de Copernic est un référentiel Galiléen.

SERIE 1

Dans l'espace muni d'un repère $(o, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ orthonormé :

1- Démontrer que la norme U=OA du vecteur

$\vec{U}$ $\overrightarrow{OA}=U_x\,\vec{\imath}+U_y\,\vec{\jmath}+U_z\,\vec{k}$ est $U=[U_x^2+U_y^2+U_Z^2]^{1/2}$

2- Déterminer le vecteur d'origine $P_1(x_1,y_1,z_1)$ et d'extrémité $P_2(x_2,y_2,z_2)$ et trouver son module.

3-

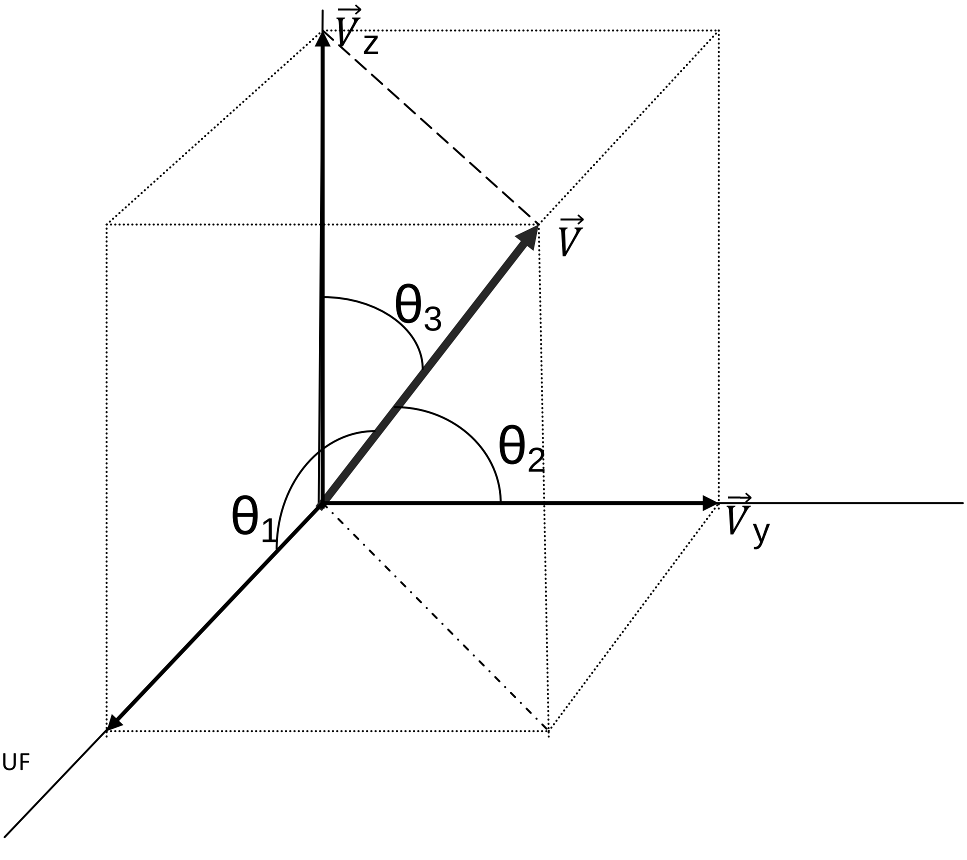
a) Représenter une force $\vec{F}=\overrightarrow{AB}$ dans le plan xy appliquée au point A, d'intensité 100N et dont la direction fait un angle $\theta=60°$ avec l'axe des x.

b) Déterminer les composantes F_x et F_y de $\vec{F}$ pour :
- F= 300N et θ= 30°
- F= 300N et θ= 145°

c) Représenter la vitesse $\vec{V}=\overrightarrow{OB}$ d'un projectile, de norme 100m/s et dont la direction fait les angles $\theta_1=60°$, $\theta_2=45°$, $\theta_3=30°$ avec les axes x,yet z.

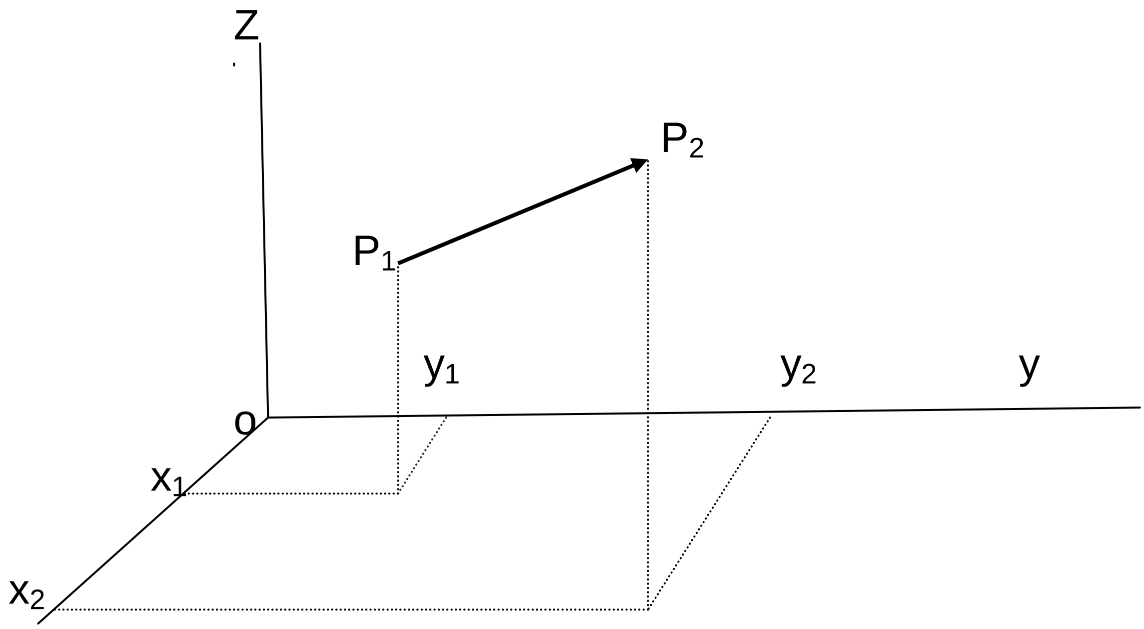
d) Déterminer les composantes de la vitesse $\vec{V}$ du projectile et l'angle θ_3 pour :

V= 200m /s , $\theta_1=60°$, $\theta_2=40°$ **.**



4- Dans le plan xy, représenter une force F_1=OA de 50N qui fait α=20°avec l'axe des x et une force F_2=OB de 80N qui fait ß=60°avec l'axe des x.
Déterminer la norme et la direction de la résultante.

5- Soient deux points $P_1(x_1,y_1,z_1)$ et $P_2(x_2,y_2,z_2)$ de l'espace, et considérons le vecteur $\overrightarrow{PP_2}=\vec{U}$
Donner l'expression de la norme et des cosinus directeurs de $\vec{U}$ en fonction des coordonnées de P_1 et P_2.



6- Déterminer la projection de $\vec{u}=10\vec{i}+8\vec{j}-6\vec{k}$ sur $\vec{v}=5\vec{i}+6\vec{j}+9\vec{k}$.

7- Donner l'expression de l'aire d'un élément de surface rectangulaire, cylindrique et sphérique.

SERIE 2

1- Les équations horaires du mouvement d'un point mobile

P sont : $x(t)= t$, $y(t)= - t^2$, $z(t)=0$

a) Quelle est la trajectoire (C) du point mobile ? Tracer (C).

b) Calculer la norme du vecteur vitesse à t=2s. Représenter sur le tracé, le vecteur vitesse à cet instant.

c) Déterminer les composantes du vecteur accélération $\vec{a}(t)$. Représenter a à t=2s.

2- Un point matériel se déplace le long d'une courbe dont les équations paramétriques sont :

$X(t)= 3e^{-2t}$, $y(t)=4\sin(3t)$, $z(t)=5\cos(3t)$; t est le temps.

a) Donner l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ (t) et du vecteur accélération $\vec{a}(t)$
b) Donner leurs modules à t=0

3- Le vecteur accélération instantanée d'un point mobile M est :

$\vec{a}= 2e^{-t}\,\vec{i}+5\cos(t)\,\vec{j}-3\sin(t)\,\vec{k}$; à t=0 on a M(1,-3,2) et

$\vec{v}=4\vec{i} -3\vec{j}+2\vec{k}$.

Donner l'expression de$\vec{v}$ (t) et $\vec{r}$ (t) ; $\vec{r}$: vecteur position

4- l'équation horaire du mouvement rectiligne sinusoïdal d'un point mobile M est : $x(t)= A \sin(wt+\varphi)$; $x=\overline{OM}$ est l'abscisse de M sur l'axe x muni d'un repère$(O,\vec{i})$.

En choisissant comme instant initial un instant où le mobile passe par O :

a) Représenter la trajectoire du point mobile et décrire son mouvement.

b) Donner l'expression de la vitesse $\vec{v}(t)$ du mobile . Donner les positions sur l'axe où le module de la vitesse est maximal.

c) Même question pour l'accélération $\vec{a}$ (t).

5-Interpréter les schémas suivants :

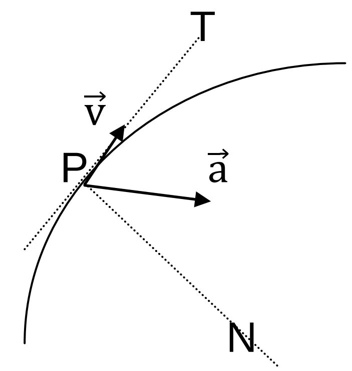


Fig.1

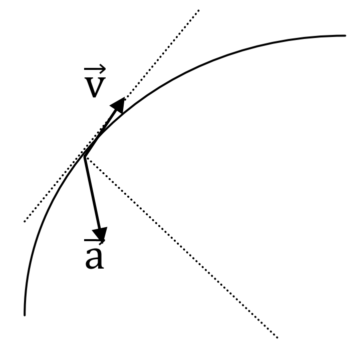


Fig.2

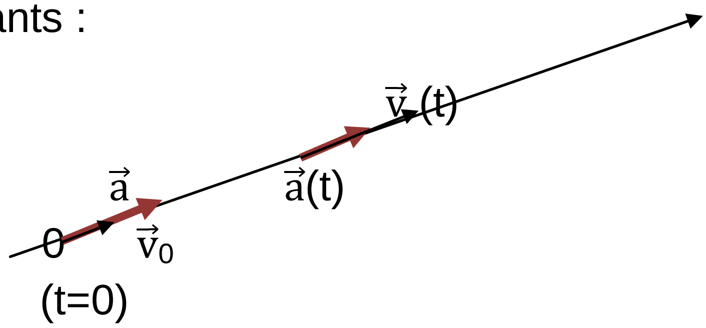


Fig.3

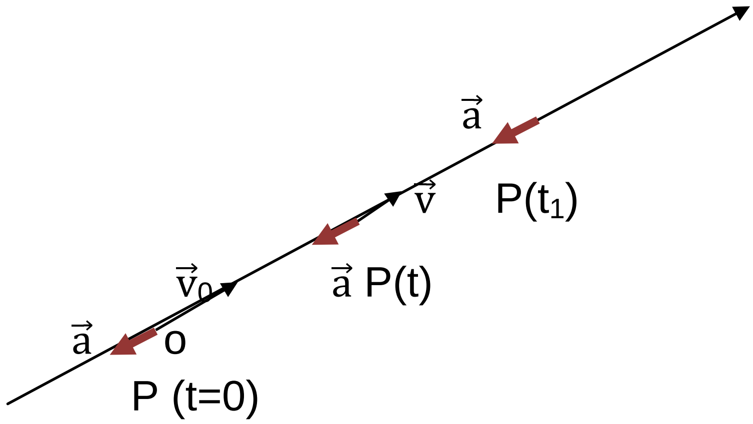


Fig.4

6-Choisissons l'instant t=0, l'instant où le point mobile est lancé avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ d'un point 0 de l'espace vers le haut suivant la verticale. v_0= 4m/s

- Déterminer la position du point M où la vitesse du mobile s'annule en changeant de sens. Quelle est l'instant t correspondante ? on donne g=9,81m/s^2
- A quelle instant t il est de retour au point O et avec quelle vitesse ?

SERIE 3

1-Considérons un point mobile en mouvement dans le plan xy muni du repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$. Son accélération constante n'a qu'une seule composante a_x=5m /s^2 et sa vitesse initiale à partir de o a pour composantes v_x=15m/s et v_y=-10m/s

a-Déterminer les composantes du vecteur vitesse instantanée et sa norme à t=4s

b-Quelle est l'angle θ que fait le vecteur $\vec{v}_0$ avec l'axe x

2-Soit une trajectoire C repérée par :

$$\vec{r}(t)= 3\cos(2t)\,\vec{i}+3\sin(2t)\,\vec{j}+(8t-4)\,\vec{k}$$

a-Trouver un vecteur unitaire $\vec{u}_t$ tangent à la courbe.

b-Montrer que $\frac{d\vec{u}t}{ds}$ est un vecteur normal à$\vec{u}_t$; on pose

$\frac{d\vec{u}t}{ds}= k\vec{u}_r$; $\vec{u}_r$ est un vecteur unitaire dirigé suivant $\frac{d\vec{u}t}{ds}$

avec k= $\left|\frac{d\vec{u}t}{ds}\right|$ qu'on appelle courbure alors que 1 /k=R est appelé rayon de courbure.

c-Trouver k, R et $\vec{u}_r$

d-Montrer que l'accélération $\vec{a}(t)$ d'un point mobile qui se déplace à la vitesse $\vec{v}(t)$ le long d'une trajectoire curviligne est :

$$\vec{a}\,(t) = \frac{d\mathrm{v}(t)}{dt}\vec{u}_t + \frac{\mathrm{v}2}{R}\vec{u}_r$$

3- Le vecteur position d'un mobile est :

$\vec{r}(t)=\cos(\omega t)\,\vec{i}+\sin(\omega t)\,\vec{j}$ où ω est une constante. Montrer que :

a- Le vecteur vitesse $\vec{v}(t)$ est perpendiculaire à $\vec{r}$.
b- $\vec{a}(t)$ est suivant la direction de $\vec{r}$ et de sens opposé.
c- $\vec{r} \wedge \vec{v}$ = vecteur constant.

4-Un point mobile attaché à une ficelle de longueur 0,5 m décrit un cercle vertical. On choisit t=0 quand l'angle que fait la ficelle avec la verticale est $\theta=30°$ et on donne $v_0=1,2m/s$.

a- Déterminer les composantes radiale et tangentielle du vecteur accélération à t=0.
b- Déterminer sa norme et sa direction

5- Soit (r,θ) les coordonnées polaires d'un point mobile et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ les vecteurs unitaires associés. Montrer que :

1- a- $\vec{e}_r = \cos(\theta)\,\vec{i} + \sin(\theta)\,\vec{j}$; $\vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\,\vec{i} + \cos(\theta)\,\vec{j}$
b- $\vec{i} = \cos(\theta)\,\vec{e}_r - \sin(\theta)\,\vec{e}_\theta$; $\vec{j} = \sin(\theta)\,\vec{e}_r + \cos(\theta)\,\vec{e}_\theta$
2- a- $(d\vec{e}_r/dt) = (d\theta/dt)\,\vec{e}_\theta$ b- $(d\vec{e}_\theta/dt) = -(d\theta/dt)\,\vec{e}_r$
3- a- la vitesse est : $\vec{v}(t) = (dr/dt)\,\vec{e}_r + r(d\theta/dt)\,\vec{e}_\theta$
b- l'accélération est :
$\vec{a} = [(d^2r/dt^2) - r(d\theta/dt)^2]\,\vec{e}_r + [(rd^2\theta/dt^2) + 2(dr/dt)(d\theta/dt)]\,\vec{e}_\theta$

6-Un bateau qui traverse une fleuve veut atteindre un point au nord. Le courant d'eau du fleuve est vers l'est.

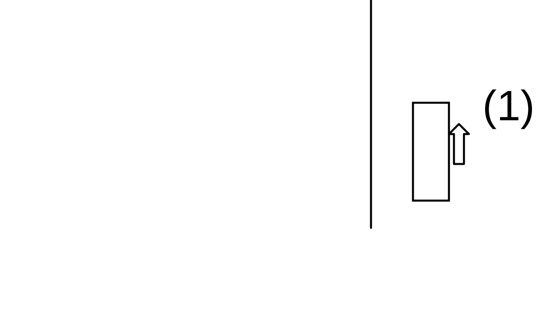
La vitesse du bateau par rapport à l'eau est $v_{BE} = 10km/h$

La vitesse du courant par rapport à la terre est $v_{ET}=5km/h$.

Quelle est la vitesse du bateau par rapport à un observateur sur terre ?Avec quel angle doit-il remonter le courant.

7-Deux voitures roulent dans deux directions perpendiculaires (voir figure) à la même vitesse de 40km/h.

Quelle est la vitesse relative de l'une par rapport à l'autre ?



LA DYNAMIQUE

Dans cette partie, on va traiter le rapport qui existe entre la force et le mouvement d'un objet.

Pour ne pas tenir compte des effets de la relativité, on considère que la vitesse des objets étudiés est inférieure à la vitesse de la lumière.

I- LES LOIS DU MOUVEMENT DE NEWTON

Pour bien comprendre les lois qu'on va présenter, il est nécessaire de rappeler l'idée qui a prévalu pendant longtemps :

Un objet est naturellement immobile et seule une force peut lui donner ou conserver un mouvement.

Galilée a pu découvrir, qu'il est aussi naturel pour un objet de se déplacer en ligne droite avec une vitesse constante que d'être immobile.

De nos jours, on sait que pour déplacer horizontalement un objet sur une surface à une vitesse constante, il suffit d'exercer une force équivalente à celle du frottement. La force exercée par la main compense la force de friction (elles ont la même grandeur mais de sens opposées) et donc la force nette exercée sur l'objet est nulle.

Ainsi **on désignera par la suite la '<u>force nette</u>' comme étant la somme vectorielle de toutes les forces (y compris le frottement) agissant sur l'objet soumis à l'étude**.

L'énoncé de la première loi du mouvement de Newton semble être déduit des conclusions tirés des travaux de Galilée que Newton a développé et auquel il a ajouté deux autres lois pour former sa théorie de mouvement.

1- La première loi du mouvement de Newton
Ou loi d'inertie

L'inertie signifie la tendance d'un corps à rester immobile ou à conserver un mouvement rectiligne uniforme.

Pour ne pas qualifier la masse d'un corps uniquement de quantité de matière, on peut considérer la masse comme étant la mesure de l'inertie d'un corps.

L'énoncé de la loi d'inertie :

Tout corps reste immobile ou conserve un mouvement rectiligne uniforme aussi longtemps qu'aucune force extérieure ne vient modifier son état.

La première loi affirme donc que si aucune force nette n'agit sur un corps au repos, il reste immobile ou que, si ce corps est en mouvement, il continue de se déplacer en ligne droite à une vitesse constante.

Et que se passe-t-il si on exerce une force nette sur un corps ? La réponse est donnée par la deuxième loi du mouvement de Newton.

2- La deuxième loi du mouvement de Newton

Selon Newton, lorsque une force nette agit sur un corps, elle modifie sa vitesse, et donc elle produit une accélération.

Il reste à savoir la relation exacte qui lie la force exercée et l'accélération. L'énoncé de la deuxième loi :

L'accélération d'un objet est directement proportionnelle à la force nette exercée sur lui et inversement proportionnelle à la masse de cet objet. La direction de l'accélération correspond au sens dans lequel la force nette s'exerce.

Si on définit une unité de force, le newton(N) comme étant la force nécessaire pour produire une accélération de $1m/s^2$ à un corps ayant une masse de 1kg, on peut traduire la deuxième loi sous forme de l'équation:

$$\vec{a} = \frac{\Sigma\vec{F}}{m} \text{ , ou bien } \Sigma\vec{F} = m\vec{a}$$

$\vec{a}$:l'accélération, m : la masse et $\Sigma\vec{F}$ la force nette.

La deuxième loi relie quantitativement l'accélération qui représente le mouvement à sa cause (la force).

Par conséquent lorsque l'accélération d'un objet est nulle, la force nette qu'il subit doit aussi être nulle.

Quantité de mouvement et deuxième loi de Newton :

La quantité de mouvement, $\vec{p}$, d'une particule se définit comme le produit de sa masse, m, et de sa vitesse $\vec{v}$: $\vec{p}=m\vec{v}$

L'autre forme de la loi de Newton s'écrit : $\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}$

Pour un système de plusieurs particules ou corps on a :

$\mathscr{P}=\Sigma\, m_i\vec{v}_i = M\vec{v}_{cM}$; $\vec{v}_{cM}$: vitesse du centre de masse ; $M= \Sigma\, m_i$

Et $\frac{d}{dt}\mathscr{P}=M\vec{a}_{cM}$

3- La troisième loi de Newton :

On l'appelle aussi le principe des actions réciproques.

L'énoncé de la troisième loi :

Chaque fois qu'un corps exerce une force sur un second corps, celui-ci exerce en retour une force égale mais opposée sur le premier.

C'est-à-dire qu'à chaque action correspond une réaction égale mais opposée.

Remarque :

On verra qu'il y'a des référentiels dans lesquels la première loi d'inertie n'est pas applicable, On les appellera référentiels non inertiels par opposition aux **référentiels inertiels** pour lesquels cette loi est applicable. La seconde loi ne s'applique pas non plus dans les référentiels non inertiels.

II- LOI DE LA GRAVITATION UNIVERSELLE DE NEWTON:

En plus des trois lois du mouvement, Newton a élaboré une autre loi très importante qui décrit une des forces fondamentales de la nature, et à partir de laquelle il a expliqué le mouvement des planètes.

L'énoncé de la loi de la gravitation universelle:

Dans l'univers, chaque particule attire n'importe quelle autre particule avec une force proportionnelle au produit de leurs masses et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare. Cette force agit le long d'une ligne fictive qui joint ces deux particules.

On appelle cette force la force gravitationnelle.

L'intensité de cette force s'exprime par :

$$F = G\,(m_1 m_2)/r^2$$

m_1, m_2 désignent les masses des deux particules, r, la distance entre elles ,G, une constante universelle pouvant être mesuré expérimentalement et ayant la même valeur numérique pour tous les objets.

$$G = 6{,}67.\,10^{-11}\ N.m^2/kg^2$$

Quelle est la force sur un objet de masse m à proximité de la surface de la terre ?

La force F dans la direction verticale due à la gravitation est proportionnelle à la masse de l'objet et elle est pratiquement indépendante de la hauteur tant que celle-ci est petite par rapport au rayon r_T de la terre :

$F = G\,(m.m_T)/(r_T)^2 = mg$, où $g=G(m_T)/(r_T)^2$ est appelée l'accélération gravitationnelle à la surface de la terre ou l'accélération de la pesanteur.

masse de la terre : $m_T = 5{,}98.10^{24}$ kg

rayon de la terre : $r_T = 6{,}38\ 10^6$ m

Cette force de gravitation exercée par la terre correspond au poids de l'objet.

En appliquant la deuxième loi de Newton suivant la direction verticale : $mg = m(d^2z / dt^2)$

En simplifiant par m, on trouve que l'accélération suivant z est constante et égale à g. c'est la loi du mouvement de la chute libre sous l'effet de la gravitation, qui aboutit aux équations :

$$v_z = gt + v_o \;;\quad z = \frac{1}{2}gt^2 + v_o t + z_o$$

III - Forces représentants les frottements :

Dans les applications où il faut tenir compte des frottements, on peut se baser sur des modèles approchées proposés par des méthodes expérimentales pour les représenter par des forces. On peut considérer quelques types de frottement :

-Frottement de glissement (ou frottement cinétique) : c'est l'exemple d'un objet qui glisse sur la surface d'un autre objet. La force F_{fr} représentant ce frottement agit dans le sens

contraire du mouvement parallèlement aux deux surfaces, sa grandeur dépend de la nature des deux surfaces. Dans les cas où la grandeur de la force de frottement est proportionnelle à la force normale (appelée aussi réaction) agissant perpendiculairement aux deux surfaces, on retient ce modèle utilisant la relation:

$F_{fr}=\mu_c F_N$; μ_c : constante de proportionnalité dépendant de la nature des deux surfaces et déterminé expérimentalement, on l'appelle coefficient de frottement cinétique.

Par exemple : bois sur bois(μ_c=0,2), caoutchouc sur ciment sec(μ_c=0,8)

F_N : la force normale de contact (Réaction)

-Frottement statique: Représenté par une force parallèle aux deux surfaces et qui peut s'exercer même sur des objets qui ne glissent pas. Puisque cette force s'oppose au mouvement d'un objet immobile, sa grandeur augmente de zéro à la valeur maximale donnée par la relation :

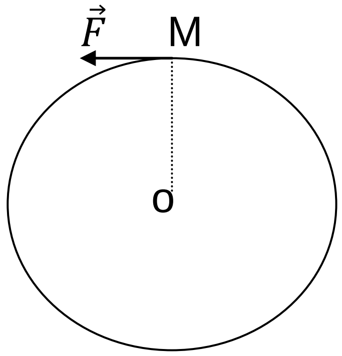
$(F_{fr})_{max} = \mu_s F_N$; μ_s coefficient de frottement statique

Bois sur bois(μ_s=0,4), caoutchouc sur ciment sec(μ_s=1)

III-QUELQUES ASPECTS DU MOUVEMENT DE ROTATION

Considérons un disque ayant un axe au centre O. En quel point M du disque, une force F appliquée a tendance à faire tourner le disque autour de l'axe de rotation ? et donc à créer un mouvement (de rotation) et produire une accélération angulaire.

1- Le vecteur d'un moment de force

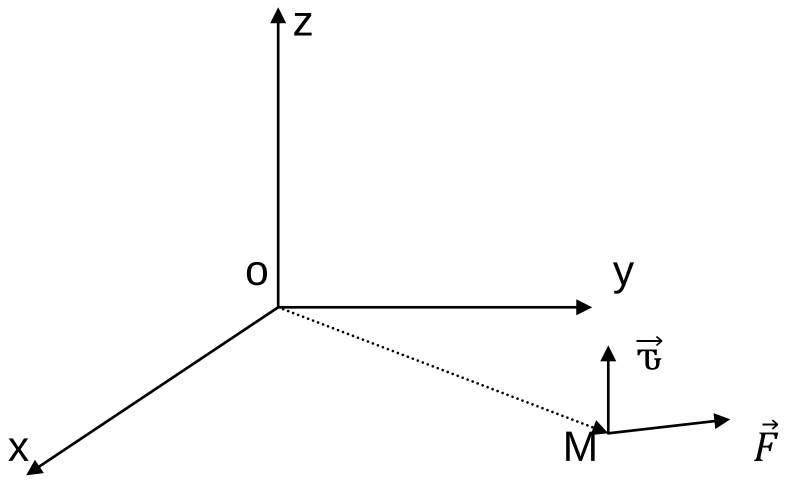


On définit le vecteur d'un moment d'une force $\vec{F}$ noté $\vec{\tau}$

Le produit vectoriel $\vec{\tau} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F}$ (1)

C'est le même vecteur moment d'une force, appliqué sur un point matériel M de masse m, par rapport à un point O.

$\overrightarrow{OM} = \vec{r}$: vecteur position du point où la force agit :



Comme le moment de force se calcule par rapport à un point qui sert d'origine, sa valeur dépend donc de la position de ce point.

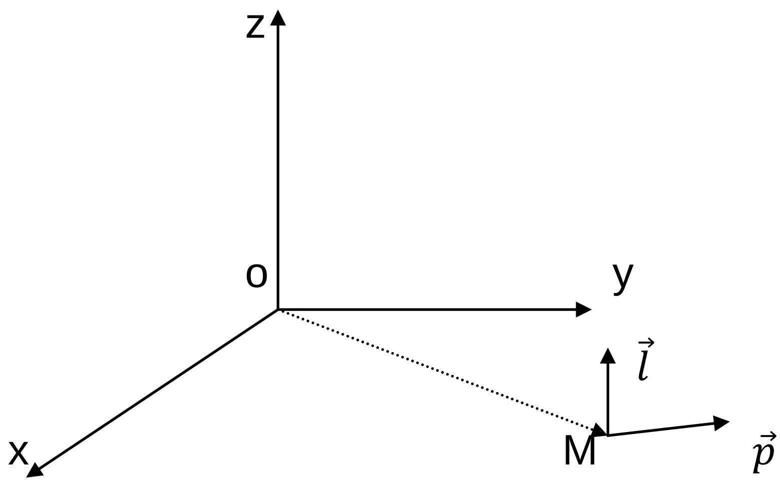
2- Le moment cinétique d'un point matériel :

Considérons un point matériel M de masse m, ayant une quantité de mouvement $\vec{p} = m\,\vec{v}$. On définit le moment

cinétique, par rapport à un point O, du point matériel noté $\vec{l}$ le produit vectoriel : $\vec{l} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge \vec{p}$. (2)

Pour le mouvement de rotation, l'équivalent de la quantité de mouvement linéaire est le moment cinétique.

On voit que la valeur du moment cinétique dépend aussi, comme le moment de force, du choix du point O.



3- Relation entre $\vec{\tau}$ et $\vec{l}$:

En appliquant d /dt sur la relation (2) :

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \wedge \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Or $\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} = \vec{v} \wedge m\vec{v} = 0$

Ainsi $\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt}$.

Lorsque une force résultante $\vec{F}$ s'exerce sur M, on a :

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ d'où $\vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\vec{l}}{dt}$

Or $\vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{\tau}$, désigne le vecteur moment de force qui agit sur le point matériel, par conséquent :

$$\vec{\tau} = = \frac{d\vec{l}}{dt}$$

On peut considérer que cette équation constitue pour le mouvement de rotation du point matériel l'équivalent de la deuxième loi de Newton :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

4- Moment cinétique et moment de force d'un système de particules :

Pour un système matériel formé de n particules , on définit son moment cinétique total L par la somme vectorielle des moments cinétiques de toutes les particules qui le composent :

$$\vec{L} = \Sigma\, \vec{l}_i$$

Et le moment de force résultant qui agit sur ce système correspond à la somme des moments de force nets qui s'exercent sur chacune de ses particules : $\vec{\tau} = \Sigma\vec{\tau}_i$

Et on peut facilement montrer que :

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \vec{\tau}$$

Remarque : Cette équation valable dans les référentiels inertiels, ne s'applique pas à des valeurs de $\vec{\tau}$ et de $\vec{L}$ calculées par rapport à un point qui accélère, sauf dans le cas particulier où ce point coïncide avec le centre de masse du système.

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_{CM} = \vec{\tau}_{CM}$$

$\vec{\tau}_{CM}$: Moment de force net calculé par rapport au centre de masse

5- Moment d'inertie :

Considérons un point matériel M de masse m qui tourne en décrivant un cercle de rayon R (à l'extrémité d'un fil ou d'une tige de masse négligeable). Son accélération angulaire provient d'un moment de force τ= RF, en utilisant les deux relations :

$$F = ma \quad \text{et} \quad a = a_t = R\alpha \quad \text{soit} \quad ma = mR\alpha \quad ;$$

Alors $\quad \tau = RF = mR^2\alpha \quad (3)$

Ce qui constitue une relation directe entre l'accélération angulaire (α) et le moment de force appliquée (τ). La quantité Mr^2 représente l'inertie de rotation du point matériel, on l'appelle moment d'inertie.

Pour un système matériel formé de plusieurs points matériels situés à des distances perpendiculaires différentes de l'axe de rotation, le moment d'inertie est :

$$I = \Sigma\, m_i\, R_i^{\,2}$$

Pour un objet étendu dont la masse est répartie de façon continue, on a :

$I = \int R^2 dm$ avec $dm = \rho dV$; ρ:masse volumique.

Remarque : Dans le calcul du moment d'inertie R est toujours la distance perpendiculaire à l'axe de rotation alors que pour le moment de force ou le moment cinétique on utilise $\vec{r}$ vecteur position du mobile par rapport à un point choisit comme origine.

On montre qu'on peut généraliser la relation (3) aux autres systèmes et on écrit :

$\tau = I\,\alpha$, c'est l'équivalent pour le mouvement de rotation

de F = ma pour le mouvement linéaire.

6- Lois de conservation

On rappelle qu'un système isolé est un système sur lequel aucune force externe n'agit

a- Quantité de mouvement :

La quantité de mouvement totale d'un système isolé demeure constant:

$\frac{d\vec{p}}{dt}$ =0 ou $\vec{p}$ = constante.

b- Moment cinétique :

Le moment cinétique total d'un système demeure constant lorsque le moment de force net agissant sur ce système est nul : $\frac{d\vec{L}}{dt}$ =0 ou $\vec{L}$ = constante.

III- LES CONDITIONS D'EQUILIBRE :

Un corps se trouve en équilibre lorsque la somme vectorielle de toutes les forces agissant sur lui est nulle :

$$\Sigma\,\vec{F} = 0$$

Et la somme vectorielle de tous les moments de force externes agissant sur ce corps doit être nulle :

$$\Sigma\,\vec{\tau} = 0$$

COMPLEMENT DE COURS

1- LE PRODUIT VECTORIEL :

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ est un autre vecteur $\vec{W}$ qui a les caractéristiques suivants :

- La norme de $\vec{W}$ est W=UVsinθ, θ l'angle entre $\vec{U}$ et $\vec{V}$, θ<180° .
- La direction de $\vec{W}$ est perpendiculaire à $\vec{U}$ et $\vec{V}$
- Le sens de $\vec{W}$ est tel que, $\vec{U}$, $\vec{V}$ et $\vec{W}$ forment un trièdre directe

  On note $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$

  Si on a les composantes des vecteurs dans un repère $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

  $\vec{U}=U_x\vec{i}+U_y\vec{j}+U_z\vec{k}$ et $\vec{V}=V_x\vec{i}+V_y\vec{j}+V_z\vec{k}$

  L'expression analytique du produit vectoriel est donnée à partir du déterminant symbolique suivant :

$$\vec{U}\wedge\vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ Ux & Uy & Uz \\ Vx & Vy & Vz \end{vmatrix}$$

$$=(U_yV_z - U_zV_y)\,\vec{i}+(U_zV_x - U_xV_z)\,\vec{j}+(U_xV_y - U_yV_x)\vec{k}$$

<u>Propriétés</u> :

$\vec{U} \wedge \vec{U}=0$

$\vec{U} \wedge \vec{V}= - \vec{V}\wedge\vec{U}$

$\vec{U} \wedge \overrightarrow{(\vec{V}+\vec{W}})= (\vec{U} \wedge \vec{V})+ (\vec{U} \wedge \vec{W})$

$$\frac{d\overrightarrow{(\vec{U} \wedge \vec{V})}}{dt} = \frac{d\vec{U}}{dt} \wedge \vec{V} + \vec{U} \wedge \frac{d\vec{V}}{dt}$$

2- CENTRE DE MASSE :

Le mouvement d'un objet peut être une translation, une rotation ou un mouvement plus complexe, or il existe un point dans cet objet qui suit la même trajectoire qu'un point matériel soumis à une force nette équivalente. On appelle ce point le centre de masse (CM).

On peut donc considérer le mouvement général d'un objet étendu ou d'un système comprenant plusieurs corps, comme la somme du mouvement de translation de son (CM) et des autres mouvements qui s'effectuent autour de ce point.

Considérons un système comprenant plusieurs corps ou points matériels de masse m_i, on définit la position du centre de masse de ce système par la relation :

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m\vec{r}}{M} \qquad M=\sum m_i \text{ , i=1…………n;}$$

$\vec{r}_I$:vecteur position de la particule i

Si le système est un corps étendu dont la distribution de masse est continue :

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\int \vec{r}\, dm}{M}$$

3- CENTRE DE GRAVITE :

Un système matériel représentant un corps étendu est considéré comme un ensemble de particules matériels de masse m_i. Même si la force de gravitation s'exerce théoriquement sur chaque point matériel, la somme vectoriel de toutes ces forces $m_i\vec{g}$ est équivalente à une

force unique agissant sur un seul point appelé **centre de gravité(CG).**

C'est lorsque g(l'accélération due à la gravitation) est la même pour toutes les parties du système matériel, le **centre de gravité** coïncide avec **<u>le centre de masse</u>**.

4- Lois du mouvement planétaire de Kepler :

<u>Première loi</u> :La trajectoire de chaque planète est une ellipse dont le soleil constitue un des foyers (Fig. 1) :

La somme des distances à tout point P de l'ellipse reste constante par rapport à deux points fixes (les foyers F_1 et F_2) :

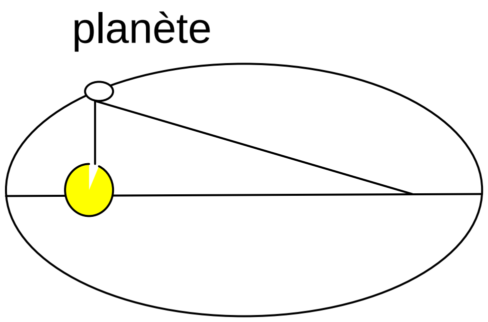
Quelque soit P : $F_1 P + F_2 P$= constante.

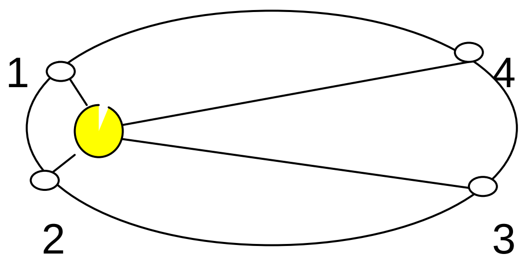
<u>Deuxième loi</u> : chaque planète se déplace de telle manière qu'une ligne (fictive), allant du soleil à cette planète, balaie des aires égales dans des périodes de temps égales (Fig.2) :

Les deux zones en gris ont des aires égales. La planète met le même temps pour se déplacer de la position (1) à (2) que de la position (3) à (4) :Elle se déplace plus rapidement dans la partie de son orbite la plus rapprochée du soleil.

<u>Troisieme loi:</u> Si T_1 et T_2 représentent les périodes de révolution de deux planètes autour du soleil et r_1, r_2 les distances moyennes entre ces planètes et le soleil, alors

$$(T_1 / T_2)^2 = (r_1/r_2)^3$$





SERIE 4

1- Considérons une bille assimilable à un point matériel M de masse m, lancé d'un point O avec une vitesse $\vec{v}_0$ dont la direction fait l'angle α avec le plan horizontal. On suppose que la seule force qui s'exerce sur M est son poids.

a- Déterminer l'équation de la trajectoire de M.

b- Déterminer la portée de M(la distance OM_p où la trajectoire perce le plan horizontal contenant O). Pour quelle valeur de α la portée est maximale.

c- Donner l'expression de la vitesse instantanée

d- Quelle est la flèche de la trajectoire (la hauteur maximale de la trajectoire :l'ordonnée de son sommet).

2- une boite de 10kg est posée sur la surface horizontale d'une table :

a- Déterminer la force de frottement $\vec{F}_{fr}$ s'exerçant sur la boite si on lui applique une force extérieure horizontale $\vec{F}_A$ D'une grandeur i) 10N ii) 38N iii) 40N ;μ_s= 0,40, μ_c= 0,30,

b- On tire sans (le soulever) la boite sur la surface avec une force de 40N appliqué à un angle de 30°.
Déterminer l'accélération de la boite, la grandeur de la force normale $\vec{F}_N$ (réaction) dans les deux cas :

i) Sans frottement

ii) Avec frottement

3- Sur une route plate (non inclinée), une voiture de 1000kg commence à se déplacer dans un virage d'un rayon r de 50m à une vitesse v de 50km/h. g=9,8m/s^2

a- Réussira-t-elle à prendre le virage dans les deux cas :

i) l'asphalte est sec et μ_s=0,80

ii) La chaussée est glacé et μ_s=0,20

b-Donner l'expression de l'angle d'inclinaison α auquel devrait être construite ce virage pour qu'aucun frottement ne soit nécessaire. Calculer α.

4- **a**-Déterminer le moment cinétique d'une particule de masse m qui effectue un mouvement circulaire uniforme de rayon r avec une vitesse constante v.
b-A l'aide de la loi de conservation du moment cinétique, démontrer la deuxième loi de Kepler.

5- Un point matériel de masse m, suspendu à l'extrémité d'un fil de longueur L décrit un cercle de rayon r de centre O:

A- Le fil fait un angle θ avec la verticale et le mobile décrit un cercle horizontal.

a) Donner l'expression de la vitesse v et de la période T du mouvement circulaire uniforme du point matériel.
b) Déterminer, en coordonnées cylindriques avec le centre du cercle comme origine, l'expression de son moment cinétique par rapport à l'extrémité supérieur du fil O'.
c) Vérifier que sa dérivée par rapport au temps est égale au moment par rapport à O' de la résultante des forces appliquées au mobile.

B- Le mobile décrit un cercle vertical avec un mouvement non uniforme :

a) A l'instant t où le fil fait un angle α= 60° ave la verticale Oz' la vitesse atteint la valeur v(t)=6,0 m/s. Déterminer à cet instant l'accélération radiale et la tension du fil.
b) Quelles sont les tensions du fil lorsque le mobile arrive au point le pus haut B avec v_b et le point le plus bas B' avec $v_{b'}$.
c) Donner l'expression de la vitesse et de la tension du fil en fonction de α si à t=0 α=0 et v=v_0

LE TRAVAIL ET L'ENERGIE

I-TRAVAIL

Considérons une force $\vec{F}$ qui agit sur un objet et qui lui fait subir un déplacement $\overrightarrow{dr}$

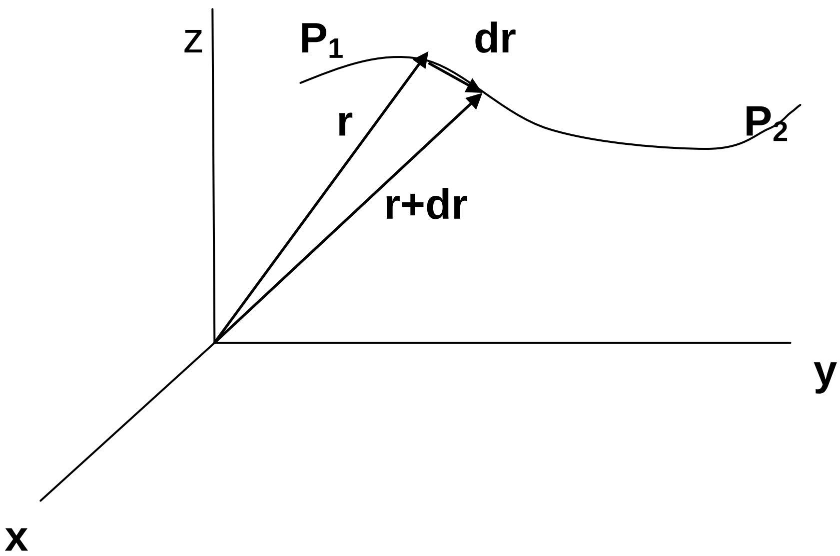
On définit le travail de $\vec{F}$ ou le travail effectué par $\vec{F}$ sur l'objet

la quantité scalaire : dW = $\vec{F}.\overrightarrow{dr}$,puisque seule la composante de $\vec{F}$ dans la direction de $\overrightarrow{dr}$ qui sert effectivement à produire le mouvement.

Si un champ de force permet le déplacement d'un point matériel d'un point P_1 à un point P_2 le long d'une d'une trajectoire curviligne représentée par une courbe C, le travail total produit est donné par :

$$W= \int_C \vec{F}.\overrightarrow{dr}=\int_{P1}^{P2} \vec{F}.\overrightarrow{dr}= \int_{\vec{r}1}^{\vec{r}2} \vec{F}.\overrightarrow{dr}$$

Où $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ sont les vecteurs positions de P_1 et P_2 .



II- LE TRAVAIL ET LE THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE

Considérons un point matériel de masse m constante, qui est au point P_1 à l'instant t_1 à la vitesse v_1 et au point P_2 à l'instant t_2 à la vitesse v_2,on peut démontrer le théorème suivant :

Théorème de l'énergie cinétique :

Le travail total effectuée en déplaçant le point matériel le long d'une courbe de P_1 à P_2 est donnée par :

$$W= \int_{P1}^{P2} \vec{F}.\overrightarrow{dr}= \; = \frac{1}{2} m(v_2)^2 - \frac{1}{2} m(v_1)^2$$

La quantité $T= \frac{1}{2} mv^2$ est l'énergie cinétique du point matériel.

Donc $W = T_2 - T_1 = \Delta T$

Cherchons à démontrer le théorème en déterminant le taux de variation de l'énergie cinétique par unité du temps :

$$\frac{dT}{dt} = d(\frac{1}{2}mv^2)/ dt = d(\frac{1}{2}m\ \vec{v}.\vec{v})/ dt=m\frac{d\vec{v}}{dt}.\vec{v} = \frac{d(\overrightarrow{mv})}{dt}.\vec{v}= \vec{F}.\vec{v}=\vec{F}.\frac{\overrightarrow{dr}}{dt}$$

On peut écrire aussi: $dT = \vec{F}.\overrightarrow{dr}$

En intégrant, on obtient : $\Delta T= \int_1^2 \vec{F}.\overrightarrow{dr}$

III- LE TRAVAIL ET L'ENERGIE POTENTIEL :

Supposons qu'il existe une fonction scalaire U telle que

$\vec{F}=-\vec{\nabla}U$ **ou** $\vec{F}=-\overrightarrow{grad}U$, on peut démontrer alors le théorème suivant :

<u>Théorème</u> :Le travail total effectuée en déplaçant le point matériel le long d'une courbe de P_1 à P_2 est donnée par :

$$W=\int_{P1}^{P2} \vec{F}.\overrightarrow{dr}=U_1-U_2= - \Delta U$$

La fonction scalaire U, telle que $\vec{F}=-\vec{\nabla}U$, s'appelle l'énergie potentielle du point matériel dans le champ de force $\vec{F}$.

Dans ce cas le travail est indépendant du chemin suivi (la courbe qui relie P_1 et P_2),il dépend que de la position initiale et de la position finale. on dit que le champ de force dérive d'un potentiel. On dit que la force est conservative.

Les théorèmes suivants nous permettent de savoir les forces qui dérivent d'un potentiel :

Théorème 1: Une force dérive d'un potentiel si, et seulement si il existe une fonction scalaire continument différentiable telle que : $\vec{F}=-\vec{\nabla}U$ **ou** $\vec{\nabla}\wedge\vec{F}=\overrightarrow{rot}\,\vec{F}=0$

Théorème 2: un champ de force $\vec{F}$ continument différentiable dérive d'un potentiel si, et seulement si,

$\oint \vec{F}.\overrightarrow{dr}=0$ Le long de toute courbe fermée simple.

Ainsi, pour les forces conservatives, on montre que le travail peut s'exprimer avec une formule, comme étant la différence d'une fonction de position.

Considérons plusieurs chemins qui mènent le mobile de la position initiale 1 à la position finale 2 et choisissons un point quelconque Q comme point de référence.

Le travail réalisé par une force conservative pour aller de Q à une position particulière dans l'espace est une fonction de cette position de l'espace. nous appellerons U(x,y,z) cette fonction de position.

Dans notre cas, le travail réalisé pour aller de Q au point P_2 est une fonction de la position finale de P_2, $U(x_2,y_2,z_2)$ qu'on note aussi U(2). On a donc :

$\int_{P1}^{Q} \vec{F}.\overrightarrow{dr}$= U(1) et $\int_{P2}^{Q} \vec{F}.\overrightarrow{dr}$=U(2)

Or $\int_{P1}^{Q} \vec{F}.\overrightarrow{dr} = \int_{Q}^{P1} \vec{F}.-\overrightarrow{dr} = -\int_{Q}^{P1} \vec{F}.\overrightarrow{dr}$ donc:

$$\int_{P1}^{P2} \vec{F}.\overrightarrow{dr} = \int_{P1}^{Q} \vec{F}.\overrightarrow{dr} + \int_{Q}^{P2} \vec{F}.\overrightarrow{dr}$$

$$= U(1) - U(2).$$

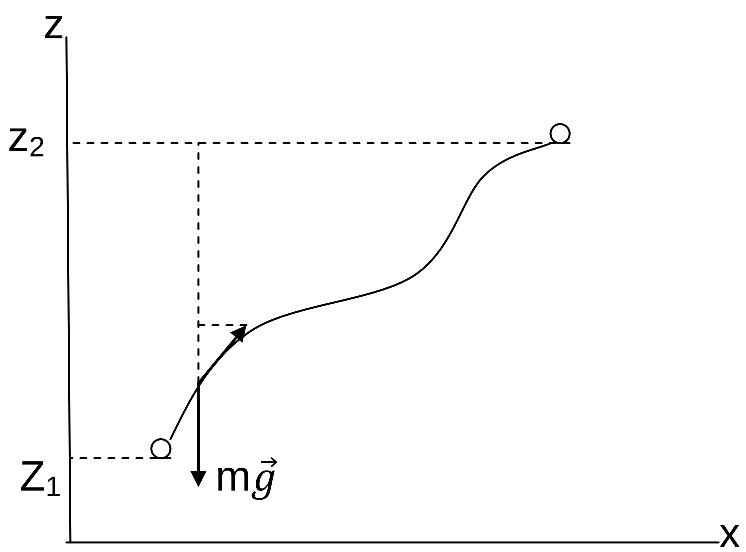
La quantité U(1) – U(2) est appelée le changement de l'énergie potentielle et U l'énergie potentielle.

Si l'objet est situé à la position i dans ce champ de force on dira qu'il a l'énergie potentielle U(i) et s'il est situé à la position Q, il a une énergie potentielle nulle.

Applications usuelles :

-Travail effectué par la force de gravitation

Considérons un déplacement d'un objet de masse m dans un plan vertical, suivant une trajectoire curviligne quelconque. A partir d'un point z_1, il atteint une hauteur z_2, où $z_2 - z_1 = h$.



Donc w= $\int_{P1}^{P2} \vec{F}.\overrightarrow{dr}$= $\int_{P1}^{P2} mgcos\theta dr$= $\int_{Z1}^{Z2} mgdz$=
= -mg($z_2 - z_1$)= - mgh.

Car on a posé ϕ=180° - θ :l'angle entre dr et sa composante verticale dz, et puisque cosθ=- cosϕ alors dz=drcosϕ.

On constate que le travail effectué dépend seulement

De h et non de la trajectoire suivie.

$z_2 > z_1$ l'objet est élevé, le travail effectué par la gravitation est négatif, si $z_2 < z_1$ l'objet tombe et le travail prend une valeur positive.

comme on a ΔU=U_2- U_1 = mg($z_2 - z_1$), on peut donc définir l'énergie potentiel en tout point situé à une hauteur z au dessus d'un point de référence quelconque par : U=mgz.

On pourrait définir cette énergie par : U= mgz +cte, car quand on écrit la variation d'énergie potentielle entre deux points les constantes s'annulent. L'expression de U est donc indéterminée, elle n'est définie qu'à une constante additive près.

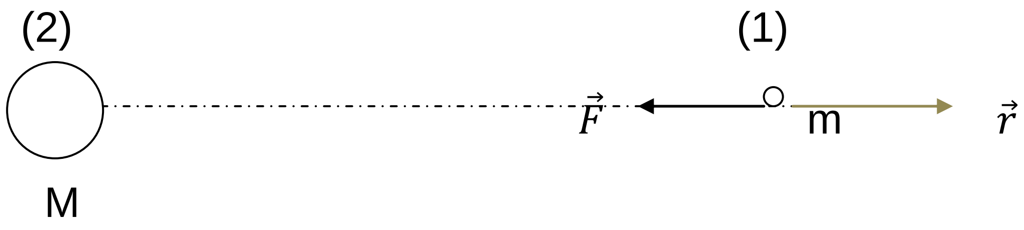
On définit donc une position de référence z_0 pour laquelle on convient que U(z_0)=0 soit U(z_0)=mgz_0+cte=0, d'où cte=- mgz_0, ainsi : U(z)=mgz – mgz_0

Remarque :

Cette énergie potentielle est associée à la force de gravitation qui s'exerce entre la terre et l'objet de masse m. Ainsi U représente l'énergie potentielle du système masse-Terre.

-Travail effectué par la force d'attraction universelle :

Considérons une petite masse m qui tombe sous l'influence de la gravitation vers une grande masse M :



Ici la force F= G Mm/r^2 n'est pas constante et varie en fonction de r.

Pour la masse m qui se déplace :

$$\int_1^2 \vec{F}.\overrightarrow{dr} = -\int_1^2 (GMm\,\mathrm{dr})/r^2 = \mathrm{GMm}\ (1/r_2 - 1/r_1)$$

Ainsi on obtient la formule de l'énergie potentielle dans un champ gravitationnel à une distance r :

U(r)= - GMm/r

-Travail effectué pour étirer un ressort en spirale :

Considérons un ressort en spirale au repos, fixé par une de ses extrémités. Pour le maintenir étiré ou comprimé d'une longueur x, il faut exercer une force de norme F(x) = kx, où k désigne la constante de rappel et équivaut à la mesure de la raideur du ressort.

Déterminons le travail effectué pour étirer (ou comprimer) ce ressort de sa longueur normale (au repos) x_i=0 jusqu'à x_f=x.

On suppose que la variation de sa longueur se fait lentement et donc que l'accélération est essentiellement nulle.

On a donc:

$$w=\int_{P1}^{P2}\vec{F}.\overrightarrow{dr}=\int_{Xi}^{Xf}F(x)\vec{\imath}.\mathrm{dx}\,\vec{\imath}=\int_{0}^{x}F(x).\mathrm{dx}=\int_{0}^{x}kx\mathrm{dx}$$
$$=\frac{1}{2}kx^2$$

On constate que le travail à effectuer sur le ressort est proportionnel au carré du déplacement causé par l'allongement (ou la compression), x.

Par action réciproque le ressort pousse en sens opposée avec une force $F_r = - kx$

La variation d'énergie potentielle du ressort est :

$$\Delta U = - W$$

soit $U(x) – U(0)=-\int_{0}^{X}-kxdx=\frac{1}{2}kx^2$

$U(x)= \frac{1}{2}kx^2 + U(0)$

$U(x)= \frac{1}{2}kx^2 + cte$;

on peut choisir U(0)=0 et on pourra ainsi exprimer l'énergie potentielle d'un ressort dont la longueur a varié de x par rapport à l'équilibre par :

$$U(x)= \frac{1}{2}kx^2.$$

IV- CONSERVATION DE L'ENERGIE TOTALE

Pour un champ de force dérivant d'un potentiel, on peut déduire des équations : $W = T_2 – T_1$ et $W =V_1-V_2$

Que $T_1 +V_1 = T_2 + V_2$

Ce qui montre que la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle en P_1 et P_2 est la même.

On appelle Energie totale cette somme : E=T+V

Théorème : Dans un champ de force dérivant d'un potentiel, l'énergie totale est constante, soit E=T+V=Cte.

5- TRAVAIL ET PUISSANCE

On définit la puissance fournie au point matériel comme étant le travail qui lui est fourni par unité de temps :

$$\mathcal{P} = \frac{dW}{dt}$$

Si $\vec{v}$ est la vitesse du point matériel sous l'action de $\vec{F}$, alors :

$$\mathcal{P} = \vec{F}.\vec{v}$$

COMPLEMENT DE COURS

1- GRADIENT ET ROTATIONNEL

Si à chaque point (x,y,z) de l'espace correspond un vecteur $\vec{U}$, on dit que $\vec{U}$ est une fonction vectorielle de x,y et z et on appelle $\vec{U}$(x,y,z) le champ vectoriel . De même, on appelle la fonction scalaire ϕ(x,y,z) champ scalaire.

Exemple : $\vec{E}$(x,y,z) :champ électrique :champ vectoriel

P(x,y,z) : champ de pression :champ scalaire

Si on considère l'opérateur vectoriel différentiel, appelé nabla, défini par :

$$\vec{\nabla}=\vec{\imath}\,\frac{\partial}{\partial x}+\vec{\jmath}\,\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z}$$

Ainsi, on définit :

1- Gradient $\vec{\nabla}\phi = (\vec{\imath}\,\frac{\partial}{\partial x}+\vec{\jmath}\,\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z})\phi = \vec{\imath}\,\frac{\partial \phi}{\partial x}+\vec{\jmath}\,\frac{\partial \phi}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial \phi}{\partial z}=\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\phi$

2- Rotationnel $\vec{\nabla}\wedge\vec{U} =(\vec{\imath}\,\frac{\partial}{\partial x}+\vec{\jmath}\,\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\,\frac{\partial}{\partial z})\wedge(U_x\vec{i}+U_y\vec{j}+U\vec{k}_z)$

$$= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathrm{Ux} & \mathrm{Uy} & \mathrm{Uz} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial\,\mathrm{Uz}}{\partial y}-\frac{\partial\,\mathrm{Uy}}{\partial z}\right)\vec{\imath}+\left(\frac{\partial\,\mathrm{Ux}}{\partial z}-\frac{\partial\,\mathrm{Uz}}{\partial x}\right)\vec{\jmath}+\left(\frac{\partial\,\mathrm{Uy}}{\partial x}-\frac{\partial\,\mathrm{Ux}}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$= \overrightarrow{rot}\,\vec{U}$$

2-Forces centrales :

On appelle force centrale, une force agissant sur un point matériel et ayant les propriétés suivantes :

a- Elle est toujours portée par la droite joignant le point matériel et un point fixe O

b- Sa norme ne dépend que de la distance r au point O

Le point O s'appelle alors le centre de force.

On peut écrire dans ce cas :

$$\vec{F} = f(r)\overrightarrow{\mathrm{er}} = f(r)\,\frac{\vec{r}}{r}$$

Un champ de force central dérive d'un potentiel :

$$V(r) = -\int f(r)dr + Cte$$

PROPRIETES D'UN CHAMP DE FORCE CENTRAL:

Quand un point matériel se déplace dans un champ de force central :

a- Sa trajectoire est une courbe plane.

b- Son moment cinétique est conservé.

c- Son vecteur position balaye des aires proportionnelles aux temps mis pour les balayer : le taux de variation de l'aire est constant.

SERIE 5

I-Un pendule simple est formé d'une petite boule de masse m suspendue par une corde de longueur L. Une force $\vec{F}$ appliquée horizontalement donne au pendule un mouvement très lent de sorte que l'accélération reste à peu prés nulle. La grandeur de F varie selon l'angle α que la corde forme avec la verticale.(Fig.1)

Déterminer le travail effectué par $\vec{F}$ pour déplacer la pendule de $\alpha=0$ à $\alpha=\alpha_0$

Déterminer le travail effectué par son poids $\vec{P}$=m$\vec{g}$ et par la tension de la corde.

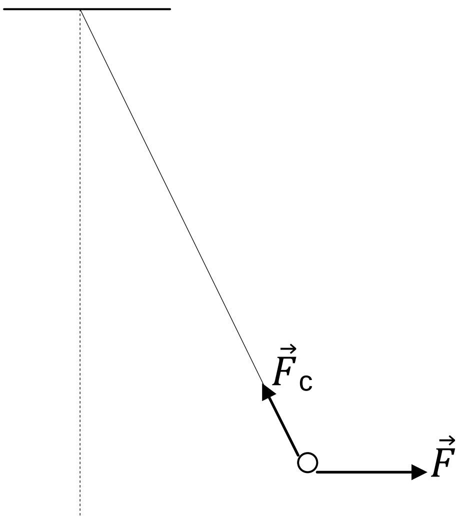


Fig.1

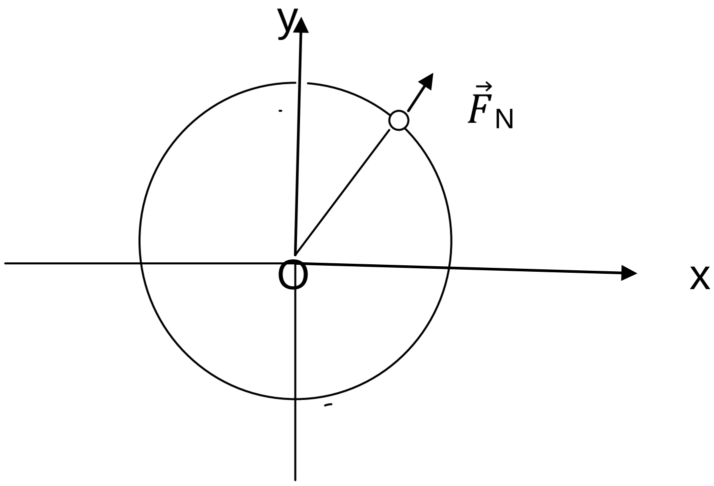


Fig.2

II-Un point matériel de masse m est placé au sommet A d'une sphère immobile et sans frottement de rayon b. On déplace légèrement le point matériel de sorte qu'il glisse sans rouler le long de la sphère (Fig.2)

En appliquant le principe de conservation de l'énergie et la deuxième loi de Newton :

Donner l'expression de la vitesse et de F_N en fonction de θ.

III- Un point matériel de masse m se déplace dans le plan xoy de façon que son vecteur position soit donnée par :

$\vec{r}$ = acos(wt)+bsin(wt) où a,b et w sont des constantes positives avec a>b ;

1-a- Montrer que la trajectoire est une ellipse

b-Montrer que la force agissant sur le point matériel est en tout point dirigé vers l'origine

2-a- Calculer l'énergie cinétique du point matériel aux points A et B

b-Calculer le travail fourni par le champ de force en déplaçant le point de A à B

c-Vérifier le théorème de l'énergie cinétique

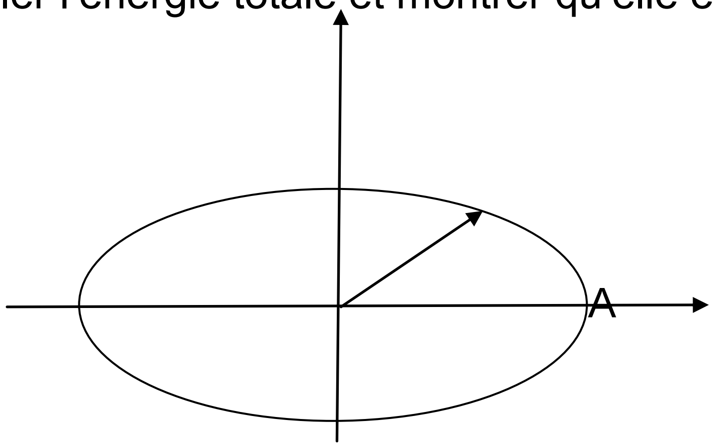
d-Montrer que le travail total effectué pour faire au point un tour complet est nul

3-a- Montrer que le champ de force dérive d'un potentiel

b-Calculer l'énergie potentiel aux points A et B

c-En déduire le travail fourni par la force en déplaçant le point de A à B ; comparer avec 2b

d-calculer l'énergie totale et montrer qu'elle est constante



Relations entre repères mobiles et repère fixe

Composition de vitesse et d'accélérations

Repère mobile qui tourne par rapport au repère fixe de même origine O :

On montre (Voir démonstration dans Annexe) que pour tout vecteur $\vec{A}$ variable avec le temps :

$$\left.\frac{d}{dt}\vec{A}\right|_F = \left.\frac{d}{dt}\vec{A}\right|_M + \vec{\omega}\wedge\vec{A}$$

En changeant la notation :

$\left.\frac{d\,()}{dt}\right|_F \equiv D_F$, dérivée dans le repère fixe

$\left.\frac{d\,()}{dt}\right|_M \equiv D_M$, dérivée dans le repère mobile

On peut donc considérer l'opérateur qu'on applique à tout vecteur :

$$D_F(\ ) = D_M(\ ) + \vec{\omega}\wedge(\ )$$

Composition de vitesses :

Appliquons l'opérateur au vecteur position $\vec{r}$ d'un point mobile P:

$$\left.\frac{d}{dt}\vec{r}\right|_F = \left.\frac{d}{dt}\vec{r}\right|_M + \vec{\omega}\wedge\vec{r}$$

On obtient la relation entre vitesses du point mobile dans les deux repères :

$$\vec{V}_{P/F} = \vec{V}_{P/M} + \vec{V}_{M/F}$$

Avec :

$\vec{V}_{P/F}$: vitesse du point mobile P dans le repère fixe

$\vec{V}_{P/M}$: vitesse du point mobile P dans le repère mobile

$\vec{V}_{m/F} = \vec{\omega}\wedge\vec{r}$: vitesse du repère mobile par rapport au repère fixe

composition d'accélérations :

Appliquons l'opérateur au vecteur $\frac{d}{dt}\vec{r}\Big|_F \equiv D_F(\vec{r})$, l'accélération est donnée par :

$D_F(D_F(\vec{r})$ $= \frac{d}{dt}(\frac{d\vec{r}}{dt}\Big|_F) -\Big|_F$

$D_F(\, D_M(\vec{r}\,) + \vec{\omega}\wedge(\,\vec{r}\,))$ $= \frac{d}{dt}(\,\frac{d}{dt}\vec{r}\Big|_M + \vec{\omega}\wedge\vec{r}\ \ ) -\Big|_F$

$= (D_M(\ ) + \vec{\omega}\wedge(\ ))(\,(\,D_M(\vec{r}\,) + \vec{\omega}\wedge(\,\vec{r}\,)) = D_M(\,D_M(\vec{r}\,) + \vec{\omega}\wedge(\,\vec{r}\,)) + \vec{\omega}\wedge(D_M(\vec{r}\,) + \vec{\omega}\wedge(\,\vec{r}\,))$

$= \frac{d}{dt}(\,\frac{d}{dt}\vec{r}\Big|_M + \vec{\omega}\wedge\vec{r}\ \ ) -\Big|_M + \vec{\omega}\wedge[(\,\frac{d}{dt}\vec{r}\Big|_M) + \vec{\omega}\wedge\vec{r}\ ]$

$= D^2_M(\vec{r}\,) + \ \vec{\omega}\wedge(D_M(\vec{r}\,) + D_M(\,\vec{\omega}\wedge\vec{r}) + \vec{\omega}\wedge(\,\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,)$

$= (d^2\,\vec{r}/dt^2)\,) -\Big|_M + + \vec{\omega}\wedge[(\,\frac{d}{dt}\vec{r}\Big|_M) + (d\,\vec{\omega}/dt)\wedge\vec{r} ++ \vec{\omega}\wedge(\,\frac{d}{dt}\vec{r}\Big|_M) + \vec{\omega}\wedge(\,\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,)$

Finalement :

$(d^2\,\vec{r}/dt^2)\,) -\Big|_F = (d^2\,\vec{r}/dt^2)\,) -\Big|_M + (\,\frac{d}{dt}\vec{\omega}\Big|_M)\wedge\vec{r}) + 2\vec{\omega}\wedge(\,\frac{d}{dt}\vec{r}\Big|_M) + \vec{\omega}\wedge(\,\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,)$

Si les vecteurs unitaires du repère mobile sont $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, alors :

$(d^2\,\vec{r}/dt^2)\,) -\Big|_M = (d^2x/dt^2)\,\vec{i} + (d^2y/dt^2)\,\vec{j} + (d^2z/dt^2)\ \vec{k}$

Et donc :

$\vec{a}_{P/F} = (d^2\,\vec{r}/dt^2)\,) -\Big|_F$: accélération du point mobile P dans le repère fixe

$\vec{a}_{P/M} = (d^2\,\vec{r}/dt^2)\,) -\Big|_M$: accélération du point mobile P dans le repère mobile

$\vec{a}_{M/F} = (\,\frac{d}{dt}\vec{\omega}\Big|_M\ )\wedge\vec{r})\ \ + 2\vec{\omega}\wedge(\,\frac{d}{dt}\vec{r}\Big|_M\ )\ + \vec{\omega}\wedge(\,\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,)$: accélération du repère mobile par rapport au repère fixe, elle est décomposée en :

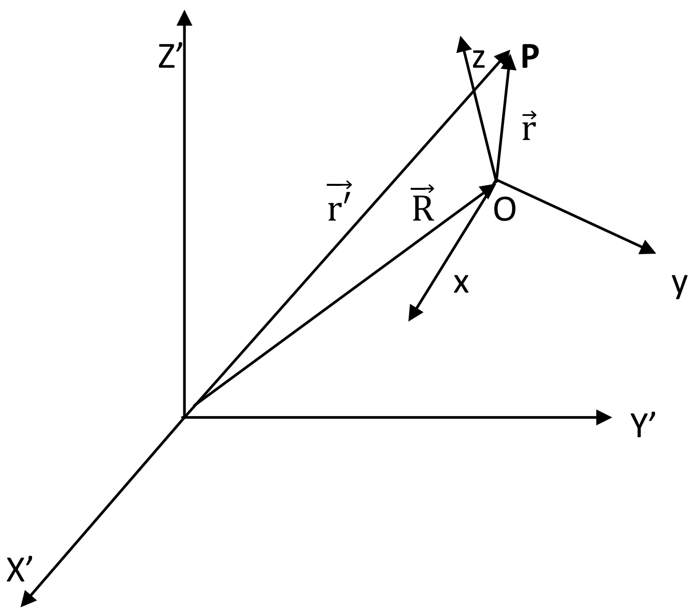
$(\,\frac{d}{dt}\vec{\omega}\Big|_M)\wedge\vec{r})$: accélération linéaire avec $\frac{d}{dt}\vec{\omega}\Big|_M$: accélération angulaire

$2\vec{\omega}\wedge(\,\frac{d}{dt}\vec{r}\Big|_M)$: accélération de Coriolis

$+ \vec{\omega}\wedge(\,\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,)$: accélération centripète

ou bien $- \vec{\omega}\wedge(\,\vec{\omega}\wedge\vec{r}\,)$ qui sera appelé accélération centrifuge

Repère mobile d'origine O qui tourne par rapport au repère fixe d'origine O' différent :



Dans le repère (O', $\vec{i}'$, $\vec{j}'$, $\vec{k}'$) fixe, le vecteur position de P est maintenant

$\vec{r'} = \vec{R} + \vec{r}$ et la vitesse de P est :

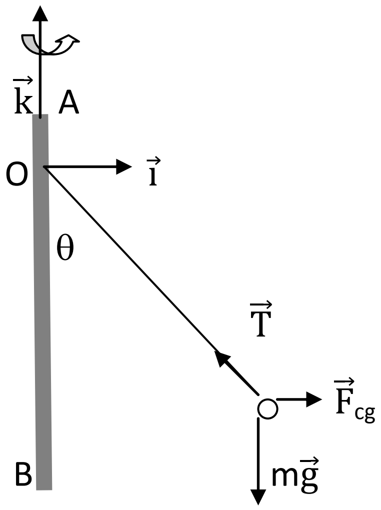
$$\frac{d}{dt}\vec{r'}\Big|_F = \frac{d(\vec{R} + \vec{r})}{dt}\Bigg|_F = \frac{d}{dt}\vec{R}\Big|_F + \frac{d}{dt}\vec{r}\Big|_F = \frac{d}{dt}\vec{R}\Big|_F + \frac{d}{dt}\vec{r}\Big|_M + \vec{\omega}\wedge\vec{r}$$

Par rapport au cas où les deux repères ont le même origine, rien ne change à part le fait de tenir compte de la vitesse de 0 par rapport à O' et donc ajouter le terme $\frac{d}{dt}\vec{R}\Big|_F$.

EXERCICES D'APPLICATION

I) Une tige verticale AB tourne avec une vitesse angulaire de rotation ω constante. Un fil inextensible, de masse négligeable et de longueur L, a une extrémité fixée en un point O de la barre. A l'autre extrémité, P, du fil est suspendue une masse m. Lorsque les conditions de l'équilibre sont atteintes, déterminer la tension du fil et l'angle que fait OP avec la tige verticale.

Considérons le repère mobile $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ lié à la barre ; le vecteur position du point mobile P dans ce repère s'écrit $\vec{r} = L\sin\theta\,\vec{i} - L\cos\theta\,\vec{k}$



Les forces qui agissent sur le point mobile P de masse m sont :

Le poids $m\vec{g} = -mg\,\vec{k}$

La force centrifuge $-m[\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{r})] = -m[(\omega\vec{k})\wedge((\omega\vec{k})\wedge(L\sin\theta\,\vec{i} - L\cos\theta\,\vec{k}))]$

$$= -m[(\omega\vec{k})\wedge(\omega L\sin\theta\vec{j})] = m\omega^2 L\sin\theta\vec{i}$$

La tension $\vec{T} = -T\sin\theta\,\vec{i} + T\cos\theta\,\vec{k}$

Lorsque les conditions d'équilibre sont atteintes, la résultante de ces forces est nulle :

$$-mg\,\vec{k} + m\omega^2 L\sin\theta\,\vec{i} - T\sin\theta\,\vec{i} + T\cos\theta\,\vec{k} = 0$$

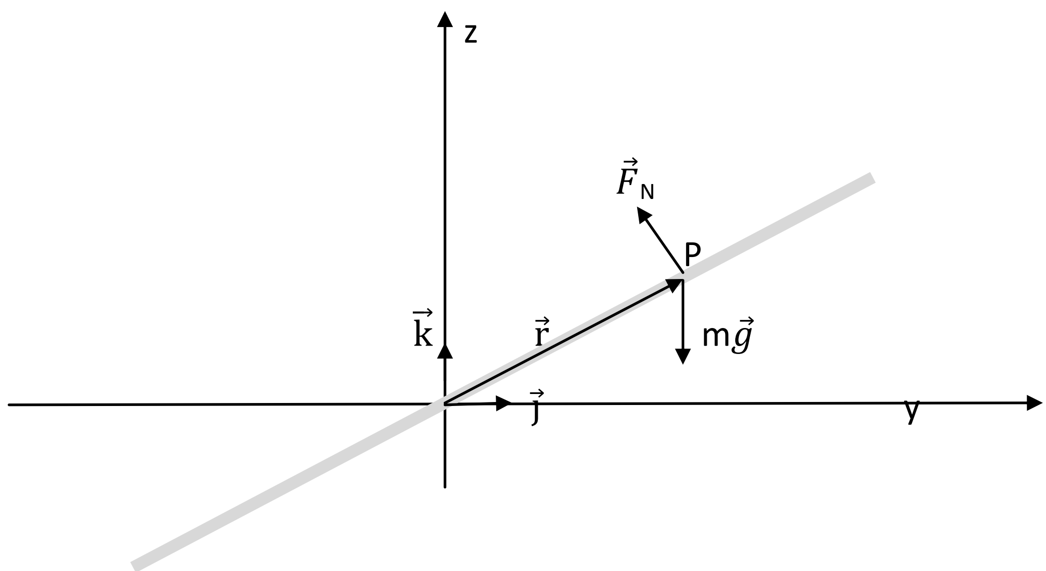
$$(m\omega^2 L\sin\theta - T\sin\theta)\,\vec{i} + (T\cos\theta - mg)\,\vec{k} = 0$$

Soit $m\omega^2 L\sin\theta - T\sin\theta = 0$ (1) et $T\cos\theta - mg = 0$ (2)

En résolvant le système d'équations (1) et (2) on obtient :

$T = m\omega^2 L$ et $\theta = \cos^{-1}(g/\omega^2 L)$

II) Considérons un tube fin AOB à l'intérieur duquel peut se déplacer un point matériel P. En faisant tourner ce tube dans un plan vertical yz autour d'un axe x'x perpendiculaire à ce plan avec une vitesse de rotation ω constante, étudier le mouvement de P sans frottement.



La position du point mobile sera repéré par les coordonnées polaires (r,θ) auxquelles on associe les vecteurs unitaires$(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

Considérons le mobile à l'instant t où le tube fait l'angle θ avec l'axe y'y, il est soumis aux forces suivantes :

Son poids $m\vec{g} = -mg\,\vec{k} = -mg\sin\theta\,\vec{e}_r - mg\cos\theta\vec{e}_\theta$

La force centrifuge : $-m[\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{r})]= -m[\omega\vec{i}\wedge(\omega\vec{i}\wedge(r\vec{e}_r))]$

$= -m[\omega\vec{i}\,(\omega\vec{i}.r\vec{e}_r)- r\vec{e}_r.(\omega\vec{i}\,.\,\omega\vec{i}\;)$

$= -m(0 - \omega^2\, r\vec{e}_r) = m\omega^2\, r\vec{e}_r$

La réaction du tube sans frottement, $\vec{F}_N = F_N\,\vec{e}_\theta$

Donc le principe fondamental dynamique s'écrit :

$$m(d^2\vec{r}/dt^2)\vec{e}_r = -mg\,\vec{k} + m\omega^2\, r\vec{e}_r + F_N\,\vec{e}_\theta$$

$$m(d^2r/dt^2)\vec{e}_r = -mg\sin\theta\,\vec{e}_r - mg\cos\theta\vec{e}_\theta + m\omega^2\, r\vec{e}_r + F_N\,\vec{e}_\theta$$

$$= (-mg\sin\theta + m\omega^2\, r)\vec{e}_r + (F_N - mg\cos\theta)\vec{e}_\theta$$

On en déduit que $F_N = mg\cos\theta$ et $md^2r/dt^2 = \omega^2 r - g\sin\theta$

Comme ω= Cste = $d\theta/dt$ donc $\theta=\omega t$ si on suppose $\theta=0$ à t=0, d'où :

$$md^2r/dt^2 - \omega^2 r= - g\sin\omega t$$

et si on suppose qu'à t=0, $r=r_0$ et $dr/dt=v_0$,on trouve :

$$r= (r_0/2 + v_0/2\omega - g/4\omega^2)e^{\omega t} + (r_0/2 - v_0/2\omega + g/4\omega^2)e^{-\omega t} +(g/2\omega^2)\sin\omega t$$

$$= r_0\,ch\omega t + (v_0/\omega - g/2\omega^2)sh\omega t +(g/2\omega^2)\sin\omega t$$

Sh(x) et ch(x) sont les fonctions hyperboliques

On voit que si $r_0 = 0$ et $v_0 = g/2\omega$, les coefficients des fonctions hyperboliques son nuls et il reste $r= (g/2\omega^2)\sin\omega t$

Le point matériel effectue un mouvement oscillatoire harmonique, de période $T=2\pi/\omega$ et d'amplitude $(g/2\omega^2)$